

# 多频未知时变扰动下的结构微振动 鲁棒自适应控制

方昱斌<sup>1</sup>, 朱晓锦<sup>2</sup>, 杨龙飞<sup>1</sup>, 许志超<sup>1</sup>, 田梦楚<sup>1</sup>, 张小兵<sup>3</sup>

(1. 南京理工大学智能制造学院, 江苏 南京 210094; 2. 上海大学机电工程及自动化学院, 上海 200072;

3. 南京理工大学能源与动力工程学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 本文针对多频窄带未知和时变扰动, 基于内模原理和 Y-K 参数化方法, 提出一种反馈鲁棒自适应振动的主动控制算法。该算法通过设计 PID 中央鲁棒控制器, 有效解决了次级通道模型未知情况下的鲁棒控制器参数设计问题。同时提出一种变步长最小均方 (Variable Step Size Least Mean Square, VSSLMS) 方法, 可以在保证稳态误差的基础上大幅提升收敛速度, 并通过系统辨识实验验证了所提 VSSLMS 方法相较于其他 VSSLMS 算法在收敛性能上的优越性。通过结构微振动主动控制实时实验, 对比验证了单独采用滤波 x 最小均方 (Least Mean Square, LMS) 自适应控制算法、基于 LMS 算法的鲁棒自适应控制算法和基于 VSSLMS 算法的鲁棒自适应控制算法的抑振效果。实验结果表明, 本文基于 VSSLMS 算法的鲁棒自适应控制算法在面向双频正弦窄带扰动以及其频谱、幅值突变情况时, 都具有较好的收敛性和鲁棒性。

**关键词:** 振动主动控制; Y-K 参数化; 变步长 (VSS); LMS 算法; 鲁棒自适应

**中图分类号:** TB535; O327 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)05-1309-09

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.05.015

## 引言

在高分遥感探测领域中, 卫星结构微振动会引发空间相机产生视线抖动和像移, 继而降低成像质量和分辨率, 其影响不能忽视<sup>[1-2]</sup>。因此, 结构微振动的抑制问题成为学者们研究的重要方向和热点之一<sup>[3]</sup>。

当前, 针对结构微振动的抑制通常采用主动控制或者是主、被动控制相结合的方式。就主动控制方法而言, 当前的研究涵盖了控制理论中的大部分内容<sup>[4-7]</sup>。从控制理论角度来讲, 要想对扰动信号取得足够好的控制效果, 控制器中必须包含有扰动的模型。因此, 在控制器设计时需要将扰动模型嵌入到闭环系统控制器中, 保证在闭环系统稳定的前提下抵消扰动所引起的微振动响应<sup>[8]</sup>。由于扰动环境的复杂性, 很多系统受到的扰动可能是时变或未知的, 这使得通常的鲁棒控制器参数设计变得困难, 对其控制效果也产生了诸多影响。但与此同时, 一般的控制系统中仍能获得关于扰动的部分信息, 诸如扰动模型结构或者其变化范围等, 此时, 自适应控制方法具有优势。

在结构振动自适应控制领域中, 滤波自适应控制算法因其简单、快速的特点而被广泛使用, 成为最常用的主动振动控制 (Active Vibration Control, AVC) 算法之一。根据是否能够获取与扰动相关的参考信号, 该类算法又可以分为前馈滤波自适应控制与反馈滤波自适应控制。

在前馈滤波自适应控制系统中, 由于可以取得参考信号, 滤波自适应控制算法对于单频窄带扰动通常能够取得较为有效的抑制, 对于有限带的宽频扰动也能够有一定程度的抑制。但同时, 由于参考传感器采集的扰动相关信号会受到作动器作动的影响, 从而形成一个反馈环, 使得控制系统不再是原来的一个单纯前馈系统 (称作“正反馈”效应), 还会影响到系统的稳定性。

对于反馈滤波自适应控制算法, 其在处理窄带扰动时具有较好的抑制效果, 但其控制效果受到输出灵敏度函数伯德积分和“水床”效应的限制。而且, 对于多频窄带扰动, 反馈滤波自适应控制算法会因滤波器阶数有限而限制其抑制效果。此时, 常用的处理手段是通过配合前馈控制算法或者是建立内扰动模型<sup>[9]</sup>。实际上, 很多应用场合很难接近扰动源甚至是找不到扰动源, 无法放置参考传感器, 也就

无法实施前馈控制。

针对滤波自适应控制算法在 AVC 应用中所面临的两个典型问题:前馈 AVC 系统中的“正反馈”效应,以及反馈 AVC 系统中多频窄带扰动的抵消。Y-K 参数化方法成为自适应控制算法实施中的一个重要且有效的手段。

Y-K 参数化方法最初在 20 世纪 70 年代被 Youla 和 Kucera 分别提出,通过自适应滤波器配合中央鲁棒控制器为反馈系统中的线性时不变对象提供一组线性稳定控制器,该方法的优势在于可以在不改变控制系统闭环极点的情况下对扰动的内模进行参数估计<sup>[10-12]</sup>。20 世纪 90 年代,文献[13]对 Y-K 参数化方法的发展及其在系统辨识、自适应控制和非线性系统中的应用进行了系统的阐述。在这之后的 20 年间,Y-K 参数化方法被引入到 AVC 领域中,并取得了较好的控制效果。

文献[14]首次将 Y-K 参数化方法用于前馈 AVC 系统的正反馈效应处理中,通过分析及实验,取得了较好的控制效果。随后,针对 Y-K 参数化解决正反馈环引起的稳定性问题,Landau<sup>[6]</sup>团队做了大量研究,包括采用不同形式的滤波器、不同的参数自适应算法、不同的参考信号滤波算法等,通过对于算法的稳定性分析以及不同振动、噪声实验 Test-bench 的实验验证,系统地验证了 Y-K 参数化方法对于正反馈环所引起的前馈系统稳定性问题的适用性和优越性。

面向多频窄带扰动的抑制,Y-K 参数方法成功地解决了内扰动模型的建立问题,可以在不改变系统原有极点分布的情况下采用自适应滤波器逼近扰动模型<sup>[15]</sup>。基于 Y-K 参数化的反馈自适应控制方法,在应对多频未知和时变窄带扰动的应用中取得了较好的控制效果<sup>[16]</sup>。

就基于 Y-K 参数化的反馈自适应控制方法而言,目前的研究大都是已知次级通道数学模型来设计中央鲁棒控制器的参数。文献[17-20]采用了极点配置的方法,中央控制器的预设部分能够较好地调整系统的极点分布与输出灵敏度函数,保证了系统的稳定性。文献[21-23]通过 H 无穷或最优控制方法设计中央鲁棒控制器,也取得了令人满意的振动噪声抑制效果。

中央鲁棒控制器的设计需要振动系统次级通道的精确数学模型。在很多场合,为了方便设计控制器,假设系统的次级通道是固定且已知的,甚至假设它的变化是可以量化且有界的。但是,一些系统中也存在次级通道模型未知的应用场景,此时基于模型的中央鲁棒控制器设计存在困难。

面向多频窄带微振动,针对不能获得次级通道

精确模型情况下的多频时变或未知窄带扰动的自适应控制问题,基于 Y-K 参数化方法在 AVC 应用中的优势,本文提出一种多频窄带扰动微振动反馈自适应控制算法。该算法通过 PID 控制方法设计中央鲁棒控制器,采用 FIR 形式参数滤波器,并采用一种改进的 VSSLMS 方法作为参数自适应算法。通过相应的微振动主动控制实时实验,对比验证了本文所提算法对于多频窄带扰动的抑振效果。

## 1 基于 Y-K 参数化的反馈 AVC 算法

图 1 为本文所给出的基于 Y-K 参数化的反馈 AVC 算法框图。其中, $d(t)$ 为主通道  $G$  经过扰动信号  $D(t)$ (已知模型结构)激励后的结构微振动响应; $y(t)$ 为次级通道  $H$  的结构微振动响应; $e_q(t)$ 为系统残差信号,可通过主通道与次级通道的微振动响应叠加测量得到; $u(t)$ 为控制器输出; $\omega(t)$ 表示自适应滤波器的输入; $\hat{Q}$ 表示自适应滤波器; $A_H$ 与  $B_H$ 分别表示次级通道  $H$  的传递函数的分母与分子多项式; $G$ 为系统的主通道; $S_0$ 与  $R_0$ 分别表示中央鲁棒控制器  $N_0$ 的传递函数的分母与分子多项式。

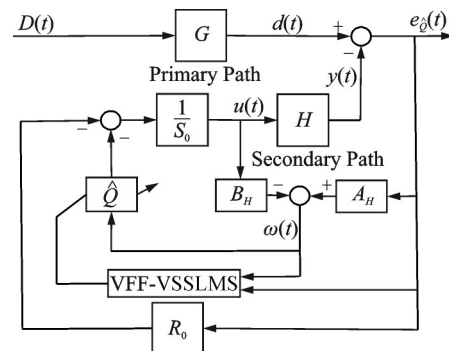


图 1 基于 Y-K 参数化的反馈自适应振动主动控制算法

Fig. 1 Feedback adaptive active vibration control algorithm based on Y-K parameterization

$G$ 和 $H$ 分别表示系统的主通道和次级通道,具体如下式所示:

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-d_G} B_G(q^{-1})}{A_G(q^{-1})} \quad (1)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-d_H} B_H(q^{-1})}{A_H(q^{-1})} \quad (2)$$

其中

$$A_G(q^{-1}) = 1 + a_1^G q^{-1} + a_2^G q^{-2} + \dots + a_{n_{AG}}^G q^{-n_{AG}} \quad (3)$$

$$B_G(q^{-1}) = b_1^G q^{-1} + b_2^G q^{-2} + \dots + b_{n_{BG}}^G q^{-n_{BG}} \quad (4)$$

$$A_H(q^{-1}) = 1 + a_1^H q^{-1} + a_2^H q^{-2} + \dots + a_{n_{AH}}^H q^{-n_{AH}} \quad (5)$$

$$B_H(q^{-1}) = b_1^H q^{-1} + b_2^H q^{-2} + \dots + b_{n_{BH}}^H q^{-n_{BH}} \quad (6)$$

式中  $q$  表示延时因子; $d_G$ 和 $d_H$ 分别表示主通道和

次级通道的整数延迟;上标“ $n$ ”表示多项式的阶次。

采用  $\hat{A}_G(q^{-1})$ ,  $\hat{B}_G(q^{-1})$ ,  $\hat{A}_H(q^{-1})$  和  $\hat{B}_H(q^{-1})$  来表示  $A_G(q^{-1})$ ,  $B_G(q^{-1})$ ,  $A_H(q^{-1})$  和  $B_H(q^{-1})$  的估计值。在本文中,假设可以通过系统辨识的手段得到准确的  $A_G(q^{-1})$ ,  $B_G(q^{-1})$ ,  $A_H(q^{-1})$  和  $B_H(q^{-1})$ , 即  $\hat{A}_G(q^{-1})=A_G(q^{-1})$ ,  $\hat{B}_G(q^{-1})=B_G(q^{-1})$ ,  $\hat{A}_H(q^{-1})=A_H(q^{-1})$ ,  $\hat{B}_H(q^{-1})=B_H(q^{-1})$ 。

在图1所示的反馈控制系统中,采用PID控制方法设计中央鲁棒控制器。由多项式  $R_0(q^{-1})$  和  $S_0(q^{-1})$  构成的中央鲁棒控制器表示为  $N_0(q^{-1})$ , 具体如下式所示:

$$N_0(q^{-1}) = \frac{R_0(q^{-1})}{S_0(q^{-1})} \quad (7)$$

$$S_0(q^{-1}) = 1 + s_1^0 q^{-1} + s_2^0 q^{-2} + \dots + s_{n_{s0}}^0 q^{-n_{s0}} \quad (8)$$

$$R_0(q^{-1}) = r_1^0 + r_2^0 q^{-1} + \dots + r_{n_{r0}}^0 q^{-n_{r0}} \quad (9)$$

当单独采用中央鲁棒控制器时,反馈控制器的输入  $e(t)$  和输出  $u(t)$  分别如下式所示:

$$e(t) = d(t) - \frac{q^{-d_H} B_H(q^{-1})}{A_H(q^{-1})} \cdot u(t) \quad (10)$$

$$S_0(q^{-1}) \cdot u(t) = -R_0(q^{-1}) \cdot e(t) \quad (11)$$

系统的特征多项式  $P_0(q^{-1})$  决定了系统的闭环极点分布,如下式所示:

$$P_0(q^{-1}) = A_H(q^{-1})S_0(q^{-1}) + q^{-d_H} B_H(q^{-1})R_0(q^{-1}) \quad (12)$$

当反馈系统中加入Y-K参数滤波器后,  $Q(q^{-1})$  的输入信号为  $\omega(t)$ , 如下式所示:

$$\omega(t) = A_H(q^{-1})e(t) - q^{-d_H} B_H(q^{-1})u(t) \quad (13)$$

Y-K参数滤波器采用FIR形式,其最优值  $Q(q^{-1})$  如下式所示:

$$Q(q^{-1}) = Q_0 + Q_1 q^{-1} + Q_2 q^{-2} + \dots + Q_{n_{BQ}} q^{-n_{BQ}} \quad (14)$$

此时,  $Q(q^{-1})$  和中央鲁棒控制器  $N_0(q^{-1})$  共同构成了新的反馈鲁棒自适应控制器  $K(q^{-1})$ , 如下式所示:

$$K(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \quad (15)$$

其中

$$R(q^{-1}) = R_0(q^{-1}) + A_H(q^{-1})Q(q^{-1}) \quad (16)$$

$$S(q^{-1}) = S_0(q^{-1}) - q^{-d_H} B_H(q^{-1})Q(q^{-1}) \quad (17)$$

新的闭环系统特征多项式  $P(q^{-1})$  如下式所示:

$$P(q^{-1}) = A_H(q^{-1})S_0(q^{-1}) + q^{-d_H} B_H(q^{-1})R_0(q^{-1}) \quad (18)$$

可以发现,Y-K参数滤波器  $Q(q^{-1})$  的加入并未改变闭环系统的极点分布。此时,系统误差如下式所示:

$$e(t) = \frac{S_0(q^{-1}) - q^{-d_H} B_H(q^{-1})Q(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \omega(t) \quad (19)$$

在实际系统运行中,由于系统辨识存在的偏差以及扰动信号在频域上的浮动,需要通过参数自适应算法来调整Y-K参数滤波器及时匹配系统扰动的模型。随着参数自适应算法的实施,  $Q(q^{-1})$  被其参数估计值  $\hat{Q}(t, q^{-1})$  所替代,如下式所示:

$$\hat{Q}(t, q^{-1}) = \hat{Q}_0(t) + \hat{Q}_1(t)q^{-1} + \hat{Q}_2(t)q^{-2} + \dots + \hat{Q}_{n_{BQ}}(t)q^{-n_{BQ}} \quad (20)$$

反馈鲁棒自适应控制器如下式所示:

$$\hat{K}(t, q^{-1}) = \frac{R_0(q^{-1}) + A_H(q^{-1})\hat{Q}(t, q^{-1})}{S_0(q^{-1}) - B_H(q^{-1})\hat{Q}(t, q^{-1})} \quad (21)$$

我们定义系统的自适应误差如下式所示:

$$\epsilon(t) = e_{\hat{Q}}(t) - e(t) \quad (22)$$

式中  $e_{\hat{Q}}(t)$  表示在参数自适应过程中基于滤波器估计值  $\hat{Q}(q^{-1})$  得到的误差信号,如下式所示:

$$e_{\hat{Q}}(t) = \frac{S_0(q^{-1}) - q^{-d_H} B_H(q^{-1})\hat{Q}(t, q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \omega(t) \quad (23)$$

将式(19)和(23)代入式(22),得到系统的自适应误差:

$$\epsilon(t) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(t, q^{-1})] \frac{q^{-d_H} B_H(q^{-1})}{P(q^{-1})} \omega(t) \quad (24)$$

构建参数向量:

$$\mathbf{Q} = [Q_0, Q_1, \dots, Q_{n_{BQ}}] \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}(t) = [\hat{Q}_0(t), \hat{Q}_1(t), \dots, \hat{Q}_{n_{BQ}}(t)] \quad (26)$$

构建系统观测向量:

$$\Phi(t) = [1, \omega(t), \omega(t-1), \dots, \omega(t-n_{BQ}+1)] \quad (27)$$

$$\Phi^*(t) = [1, \omega_1(t), \omega_1(t-1), \dots, \omega_1(t-n_{BQ}+1)] \quad (28)$$

其中

$$\omega_1(t) = \frac{q^{-d_H} B_H}{P_0} \omega(t) \quad (29)$$

这样,系统自适应误差可以表示为:

$$\epsilon(t) = [\mathbf{Q}^T - \hat{\mathbf{Q}}^T(t)] \Phi^*(t) \quad (30)$$

因为系统扰动是未知的,所以最优参数向量  $\mathbf{Q}$  也是不确定的。最接近  $\mathbf{Q}$  的参数向量估计值  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$  可以使得下式所示的代价函数最小:

$$J(\hat{\mathbf{Q}}, t) = \epsilon^2(t) \quad (31)$$

依据最小均方(Least Mean Square, LMS)算法,代价函数选用系统瞬时误差平方的梯度:

$$\nabla \epsilon^2(t) = \frac{\partial \epsilon^2(t)}{\partial \hat{\mathbf{Q}}(t)} = -2\epsilon(t)\Phi^*(t) \quad (32)$$

可得  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$  的参数更新迭代如下式所示:

$$\hat{\mathbf{Q}}(t+1) = \hat{\mathbf{Q}}(t) - \frac{\mu}{2} \nabla \epsilon^2(\hat{\mathbf{Q}}, t) = \hat{\mathbf{Q}}(t) + \mu \epsilon(t) \mathbf{W}^*(t) \quad (33)$$

式中  $\mu$  为步长因子;  $W$  表示参数向量。

当 Y-K 参数滤波器取最优值  $Q(q^{-1})$  时, 系统误差为 0。那么, 系统自适应误差  $\varepsilon(t)$  可被系统实时误差值  $e_{\hat{Q}}(t)$  替代, 实际系统中通过传感器测量得到, 故式(33)可写作:

$$\hat{Q}(t+1) = \hat{Q}(t) + \mu e_{\hat{Q}}(t) \Phi^*(t) \quad (34)$$

综上所述, 该反馈 AVC 算法的表达如下式所示:

$$u(t) = \frac{R_0(q^{-1}) + A_H(q^{-1})\hat{Q}(t, q^{-1})}{S_0(q^{-1}) - B_H(q^{-1})\hat{Q}(t, q^{-1})} \cdot e_{\hat{Q}}(t) \quad (35)$$

$$e_{\hat{Q}}(t) = \frac{S_0(q^{-1}) - q^{-d_H} B_H(q^{-1})\hat{Q}(t, q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \omega(t) \quad (36)$$

$$\hat{Q}(t+1) = \hat{Q}(t) + \mu e_{\hat{Q}}(t) \Phi^*(t) \quad (37)$$

## 2 变步长 LMS 算法

在基于 Y-K 参数化的反馈 AVC 算法中, 参数自适应算法对于整体算法的实施效果起着至关重要的作用。LMS 算法作为常用的参数自适应算法, 有着简单、鲁棒性好的优点, 但其固定步长因子的存在引起了收敛速度与稳态误差之间的矛盾。在 VSSLMS 算法的思想面世后, 学者们陆续提出多种形式的 VSSLMS 算法, 通过实时改变步长因子来提升算法的性能。其中有一类 VSSLMS 算法是通过设置遗忘因子的方式调节实时步长以取得更好的收敛效果, 典型算法如表 1 中的“算法 A<sup>[24]</sup>”、“算法

B<sup>[25]</sup>”和“算法 C<sup>[26]</sup>”所示。基于遗忘因子改进形式, 方昱斌等<sup>[27]</sup>提出了一种 VSSLMS 算法, 其具体步长更新公式如表 1 中的“算法 D<sup>[27]</sup>”所示。

文献[27]中详细给出了算法 D(文献[27]中命名为 VSSLMS-New) 的动态性能与稳定性分析。并通过联合仿真分析与微振动实时控制实验, 采用 LMS 算法、算法 A、算法 B 和算法 C 作为对比算法, 验证了算法 D 在前馈滤波自适应微振动主动控制应用中的抑振性能以及在较高噪声水平下的鲁棒性能。

对于表 1 中所列出的这类通过设置遗忘因子的方式来提升算法收敛性能的 VSSLMS 算法, 本文通过大量的仿真和实验调试得出结论: 该类算法中所采用的固定遗忘因子  $\xi$  会影响 VSSLMS 算法整体的收敛速度。最初, 固定遗忘因子  $\xi$  用来衰减步长因子  $\mu(n)$  的计算中对于前一采样时刻的权重, 通常取接近于 1 的值, 如 0.97。当  $\xi = 0.97$  时, 当前采样时刻的步长因子  $\mu(n)$  是在上一采样时刻步长因子  $\mu(n-1)$  的 0.97 倍基础上获得的。这样一来, 该类 VSSLMS 算法的步长因子  $\mu(n)$  会衰减的很快, 尤其是在高采样频率的系统中, 几秒之后, VSSLMS 算法的收敛速度就会变得非常慢。

文献[27]发现, 如果将现有算法中的固定遗忘因子  $\xi$  替换为时变遗忘因子  $\xi(n)$ , 且  $\xi(n)$  能够从 1 逐渐衰减至  $\xi$ , 则原有算法的收敛速度会得到提升, 且保持原来的稳态性能。

表 1 典型 VSSLMS 算法的步长更新公式

Tab. 1 Step size update formula of typical VSSLMS algorithms

算法	步长因子更新公式	参数
算法 A <sup>[24]</sup>	$\mu(n) = \xi\mu(n-1) + \eta e^2(n-1)$	$2(\xi, \eta)$
算法 B <sup>[25]</sup>	$\mu(n) = \xi\mu(n-1) + \eta p^2(n-1)$ $p(n) = \lambda p(n-1) + (1-\lambda)e(n)e(n-1)$	$3(\xi, \eta, \lambda)$
算法 C <sup>[26]</sup>	$\mu(n) = \xi\mu(n-1) + \eta e^2(n-1)e^2(n-2)$	$2(\xi, \eta)$
算法 D <sup>[27]</sup>	$\mu(n) = \xi\mu(n-1) + \eta(n)e^2(n-1)$ $\eta(n) = \beta \cdot \arccot( e(n) )$	$2(\xi, \beta)$

注:  $e$  为系统误差信号。

基于此, 本文提出一种变遗忘因子改进方法。通过按照特定曲线衰减遗忘因子, 保证在原有算法稳态性能的基础上, 提升算法收敛速度, 遗忘因子更新公式如下式所示:

$$\xi(t) = \lambda_1(0) + 1 - \lambda_1(t) \quad (38)$$

$$\lambda_1(t) = \lambda_0 \lambda_1(t-1) + 1 - \lambda_0 \quad (39)$$

式中  $\xi(t)$  表示变遗忘因子。参数  $\lambda_0$  和  $\lambda_1$  用于调节衰减的速率,  $\lambda_0$  的取值范围为  $0 < \lambda_0 < 1$ , 其取值通常接近于 1, 如  $\lambda_0 = 0.90, \dots, 0.99$ 。  $\lambda_0$  的取值决定

$\lambda_1(t)$  的衰减速率,  $\lambda_0$  的取值越接近于 1, 参数  $\lambda_1(t)$  的衰减速率越慢, 几个经典取值的衰减曲线如图 2 所示。  $\lambda_1(0)$  表示参数  $\lambda_1(t)$  的初始值,  $\xi(t)$  从 1 衰减至  $\lambda_1(0)$ 。

自适应控制的本质是次级通道的参数辨识, 通过参数辨识仿真验证该改进 VSSLMS 算法的收敛效果。假设有有限维的自适应滤波器可以完全准确地表示真实系统(没有模型误差)。采用白噪声信号激励未知系统和自适应滤波器, 真实系统的输出与模

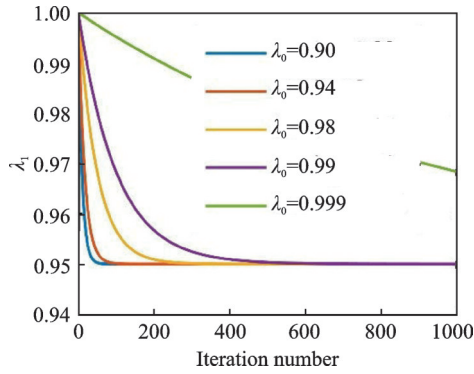


图 2  $\lambda_0$ 经典取值下 $\lambda_1$ 的衰减曲线

Fig. 2 Attenuation curves of  $\lambda_1$  under classic values of  $\lambda_0$

型输出在测量噪声的基础上得到系统误差。系统误差反映自适应滤波器模型与真实系统之偏差。真实系统数学模型取为  $W_{opt}^T = [0.5, 1.1, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1]$ , 同时施加信噪比为 10 dB 的测量噪声, 信噪比按照  $SNR = 10 \lg [E(x^2(n)) / E(v^2(n))]$  计算, 其中,  $E$  表示期望,  $v$  表示测量噪声信号采样序列。

针对表 1 中所给出的四种 VSSLMS 算法以及它们的改进算法做参数辨识仿真验证。在参数辨识中, 采用原文献中推荐的参数组合。参数  $\lambda_1(0)$  取值与原文献中的遗忘因子  $\xi$  相同, 其他参数诸如上、下限等均与原文献中保持一致。为使上述 VSSLMS 算法具有相同的初始收敛速度, 四种算法选择同样的初始步长。经多次实验均值后, 取 MSE 为各算法的性能对比指标, 如图 3 所示。

通过图 3 可以看出, 变遗忘因子改进算法能切实提升该类型 VSSLMS 算法的收敛性能, 在保持原有 VSSLMS 算法稳态性能的前提下提升收敛速度。并且, 在前文四种 VSSLMS 算法的收敛效果以及它们的改进算法对比中, 变遗忘因子改进算法 D 仍旧可以取得优于其他几种改进算法的收敛效果, 其完整表示如下式所示:

$$\hat{Q}(t+1) = \hat{Q}(t) + \mu(t)e_{\hat{Q}}(t)\Phi^*(t) \quad (40)$$

$$\mu(t) = \xi(t)\mu(t-1) + \eta(t)e_{\hat{Q}}^2(t-1) \quad (41)$$

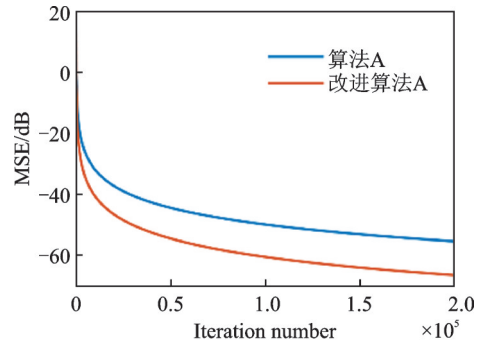
$$\xi(t) = \lambda_1(0) + 1 - \lambda_1(t) \quad (42)$$

$$\lambda_1(t) = \lambda_0\lambda_1(t-1) + 1 - \lambda_0 \quad (43)$$

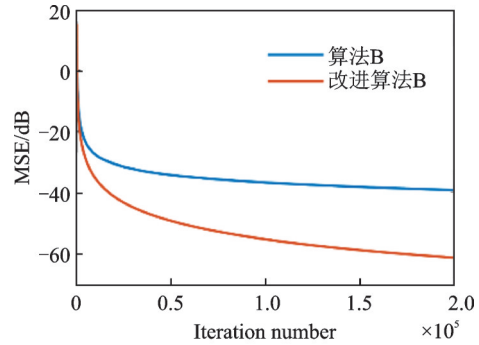
$$\eta(t) = \beta \cdot \text{arccot}(\left|e_{\hat{Q}}(t)\right|) \quad (44)$$

式中  $\eta$  表示误差信号系数;  $\beta$  表示反余切函数的可调参数。

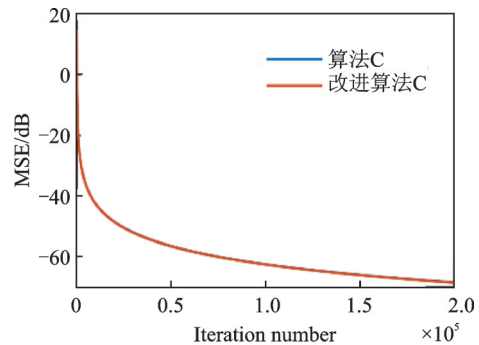
为了进一步提升本文基于 Y-K 参数化的反馈 AVC 算法的抑振效果与鲁棒性, 本文拟采用式(40)~(44)所示的变遗忘因子改进算法 D 作为反馈 AVC 系统的参数自适应算法, 则整个反馈 AVC 控制器的运行步骤如下:



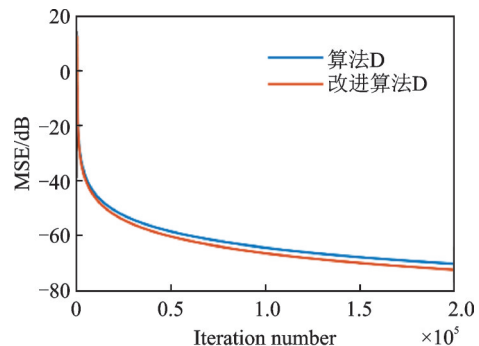
(a) 改进算法A  
(a) Improved algorithm A



(b) 改进算法B  
(b) Improved algorithm B



(c) 改进算法C  
(c) Improved algorithm C



(d) 改进算法D  
(d) Improved algorithm D

图 3 四种变遗忘因子改进 VSSLMS 算法及原始形式的 MSE 曲线对比

Fig. 3 Comparison of the MSE curves between the VSSLMS algorithms improved by four variable forgetting factors and their original versions

(1) 基于当前控制周期测得的系统误差  $e_{\hat{Q}}(t)$  和控制器输出  $u(t)$ , 按式(13)求得自适应滤波器的输

入信号  $\omega(t)$ 。

(2)按照式(27)和(28)构建扰动信号的观测向量  $\Phi(t)$ 及  $\Phi^*(t)$ 。

(3)按照式(40)~(44)更新自适应滤波器参数向量  $\hat{Q}(t+1)$ 。

(4)按照式(35)计算下一控制周期的控制器输出  $u(t+1)$ 。

### 3 微振动主动控制实验验证

为了验证前文所给出的基于Y-K参数化的反馈AVC算法的抑振效果,本文基于文献[27]中的三自由度隔振结构微振动主动隔振实验系统,选择 $x$ 轴作动方向进行微振动隔振实验。实验系统如图4所示,具体细节参见文献[27]。

实验中,采用两个窄带扰动叠加激励模拟多频窄带扰动环境,同时,进行双频窄带扰动频谱突变以及幅值突变实验,验证所提出的基于Y-K参数化的反馈AVC算法在多频扰动环境下的抑振性能及鲁棒性能。

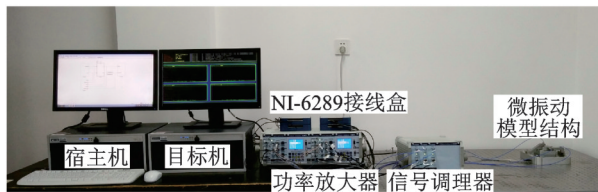


图4 三自由度隔振结构微振动主动隔振实验系统

Fig. 4 Experimental system of micro-vibration active vibration isolation of 3 DOF vibration isolation structure

#### 3.1 双频正弦扰动

采用幅值为0.3 V,频率分别为10和25 Hz的2个正弦信号的叠加作为微振动激励信号,在实验时间为5 s时开始施加控制算法,双频正弦扰动激励下微振动主动控制的时域曲线如图5所示,各算法的功率谱密度对比如图6所示。

综合图5和6来看,FxLMS自适应控制算法仅对10 Hz的扰动具有有效抑制,对于25 Hz的扰动并无明显抑制作用,在时域表现出其针对双频窄带扰动的抑制效率约为50%。

相比于单独采用自适应控制算法,另外两种基于Y-K参数化方法的鲁棒自适应控制算法时域稳态效果提升明显,稳态时的振动仅为0.3  $\mu\text{m}$ 。从功率谱密度来看,参数自适应算法分别选择LMS算法与本文所提出的VSSLMS算法,在双频窄带扰动激励下,两种算法的抑振效果差别不大,本文所提出的VSSLMS算法略优。为方便表示,分别将三种算法

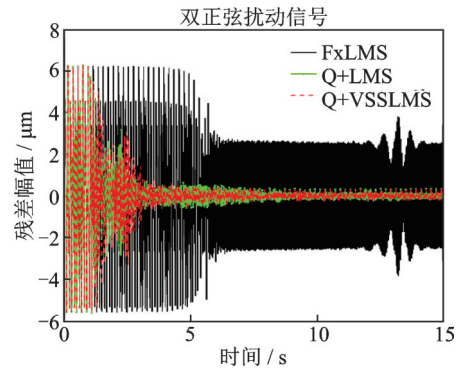


图5 双正弦扰动激励下的微振动主动控制时域图

Fig. 5 Time domain diagram of micro-vibration active control under double sinusoidal perturbation excitation

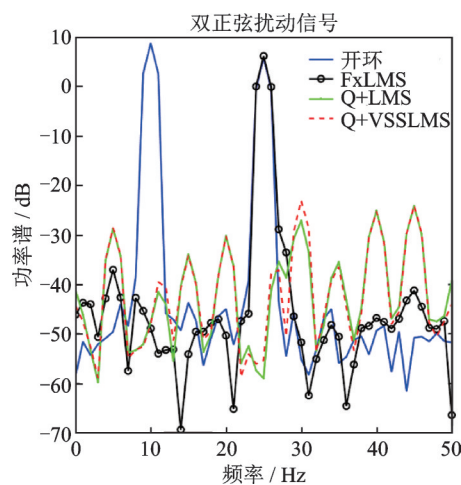


图6 双正弦扰动激励下微振动主动控制的功率谱密度对比  
Fig. 6 Comparison of power spectral density of micro-vibration active control under double sinusoidal perturbation excitation

简称为FxLMS,Q+LMS和Q+VSSLMS。

#### 3.2 频谱突变

与双频正弦扰动一样,采用频率分别为10和25 Hz的2个正弦信号的叠加作为微振动激励信号。在实验时间为20 s时,扰动信号的频谱分别突变为11和26 Hz,幅值不变。频谱突变扰动激励下微振动主动控制的时域曲线和功率谱密度分别如图7和8所示。

在该实验中,三种算法在频谱突变后均取得了不同程度的抑振效果。从图7来看,Q+VSSLMS算法能够在发生频谱突变后快速调整,在3 s之内进入新的稳态,抑振效果及鲁棒性能要明显优于其他两种算法。从图8来看,在频谱突变后,FxLMS自适应控制算法对26 Hz的扰动失去抑制作用。Q+LMS算法、Q+FANG算法在11与26 Hz处的抑振效果也有明显弱化,但仍能够取得较为满意的效果。必须指出的是,Q+LMS算法原有的步长因子在频谱突

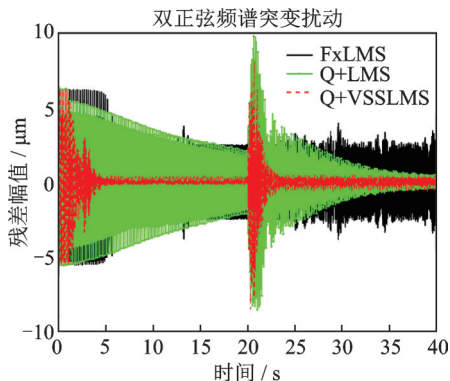


图 7 频谱突变扰动激励下的微振动主动控制时域图

Fig. 7 Time domain diagram of micro-vibration active control under spectrum mutation perturbation excitation

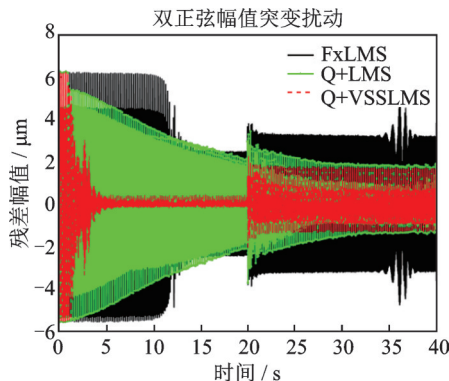


图 9 幅值突变扰动激励下的微振动主动控制时域图

Fig. 9 Time domain diagram of micro-vibration active control under amplitude mutation perturbation excitation

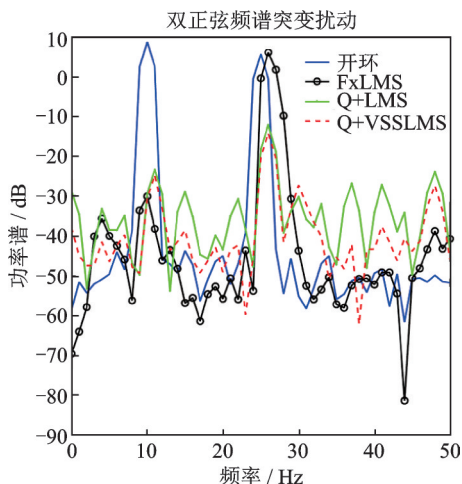


图 8 频谱突变扰动激励下微振动主动控制的功率谱密度对比

Fig. 8 Comparison of power spectral density of micro-vibration active control under spectrum mutation perturbation excitation

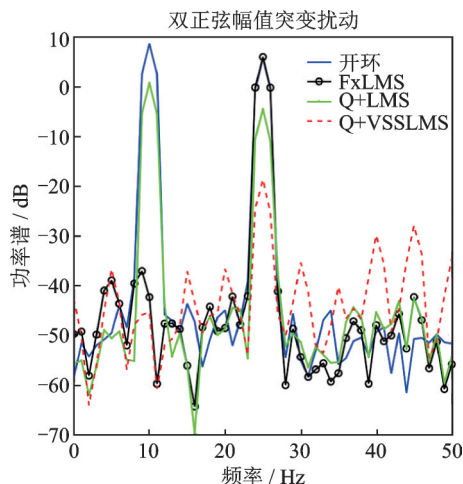


图 10 幅值突变扰动激励下微振动主动控制的功率谱密度对比

Fig. 10 Comparison of power spectral density of micro-vibration active control under amplitude mutation perturbation excitation

变后会立即发散。调小步长因子后取得了收敛的控制效果,但限制了算法的收敛速度,在频谱突变前的收敛速度甚至慢于单独采用 FxLMS 控制算法。

### 3.3 幅值突变

与前面两个实验相同,以 10 和 25 Hz 的双频窄带正弦扰动开始,在实验时间为 20 s 时,每个正弦扰动信号的幅值突变为原有正弦信号幅值的 125%,频谱不变。幅值突变扰动激励下微振动主动控制的时域曲线和功率谱密度分别如图 9 和 10 所示。

由图 9~10 可以看出,幅值突变后,三种算法的抑振效果都有了不同程度的减弱。从功率谱密度角度来看,幅值突变后 Q+LMS 算法在两个窄带频谱处的抑振效果都明显弱化,Q+VSSLMS 算法对 10 Hz 窄带扰动仍具有较好抑制效果。从时域来看,Q+VSSLMS 算法的稳态振幅由突变前的 0.3 μm 变为突变后的 1.5 μm,但是仍优于 Q+LMS 算法与

FxLMS 算法。

通过上述 3 种典型扰动激励下的微振动主动控制实验,可以发现:

(1)在双频正弦窄带扰动下,基于 Y-K 参数化法鲁棒自适应控制算法的抑振效果要明显优于单独采用 FxLMS 自适应控制算法。

(2)在应对双频正弦窄带扰动频谱突变和幅值突变的情况时,Q+VSSLMS 算法能够取得更令人满意的效果。相较于 Q+LMS 算法,本文设计的 VSSLMS 算法能够及时调整参数自适应算法的步长因子,使算法在新扰动情况下快速收敛至新稳态,具有更好的鲁棒性能。

## 4 结 论

本文以多频未知和时变窄带扰动激励下的微振动主动控制为目标,针对次级通道模型未知的情况,

基于Y-K参数化方法,提出一种反馈鲁棒自适应振动主动控制算法及一种VSSLMS参数自适应算法。通过系统辨识仿真验证了本文所提出VSSLMS算法的优越特性,通过微振动主动控制实时实验验证了基于Y-K参数化的反馈鲁棒自适应控制算法的抑振效果及相比于其他算法在扰动信号频谱、幅值突变情况下的鲁棒性能。

#### 参考文献:

- [1] 曹登庆,白坤朝,丁虎,等.大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展[J].力学学报,2019,51(1):1-13.  
Cao Dengqing, Bai Kunchao, Ding Hu, et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(1): 1-13.
- [2] 李林,王栋,徐婧,等.飞轮组件微振动对高分辨率光学卫星光轴的影响[J].光学精密工程,2016,24(10):2515-2522.  
Li Lin, Wang Dong, Xu Jing, et al. Influence of micro-vibration of flywheel components on optical axis of high resolution optical satellite[J]. Optics and Precision Engineering, 2016, 24(10): 2515-2522.
- [3] 孟光,周徐斌.卫星微振动及控制技术进展[J].航空学报,2015,36(8):2609-2619.  
Meng Guang, Zhou Xubin. Progress review of satellite micro-vibration and control[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(8): 2609-2619.
- [4] Wang L, Liu J X, Li Y L. The optimal controller design framework for PID-based vibration active control systems via non-probabilistic time-dependent reliability measure[J]. ISA Transactions, 2020, 105: 129-145.
- [5] 孙延超,李传江,常雅杰,等.空间智能桁架的有限时间振动抑制控制[J].哈尔滨工业大学学报,2018,50(10):27-34.  
Sun Yanchao, Li Chuanjiang, Chang Yajie, et al. Finite-time vibration control of space intelligent truss[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2018, 50(10): 27-34.
- [6] Landau I D. On the use of Youla-Kucera parametrization in adaptive active noise and vibration control-a review[J]. International Journal of Control, 2020, 93(2): 204-216.
- [7] 张顺琦,于喜红,王战玺,等.压电智能悬臂梁模糊振动抑制研究[J].振动工程学报,2017,30(1):110-117.  
Zhang Shunqi, Yu Xihong, Wang Zhanxi, et al. Active vibration control of a piezoelectric bonded smart cantilever beam using fuzzy logic[J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(1): 110-117.
- [8] Wang J, Aranovskiy S V, Bobtsov A A, et al. Compensating for a multisinusoidal disturbance based on Youla-Kucera parametrization[J]. Automation and Remote Control, 2017, 78(9): 1559-1571.
- [9] Chen X, Tomizuka M. A minimum parameter adaptive approach for rejecting multiple narrow-band disturbances with application to hard disk drives[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(2): 408-415.
- [10] Youla D C, Bongiorno J T, Jabr H A. Modern wiener-hopf design of optimal controllers-part I: the single-input-output case[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1976, 21(1): 3-13.
- [11] Youla D C, Jabr H A, Bongiorno J J. Modern wiener-hopf design of optimal controllers-part II: the multivariable case[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1976, 21(3): 319-338.
- [12] Kučera V. Stability of discrete linear feedback systems [J]. IFAC Proceedings Volumes, 1975, 8(1): 573-578.
- [13] Anderson B D O. From Youla-Kucera to identification, adaptive and nonlinear control [J]. Automatica, 1998, 34(12): 1485-1506.
- [14] Landau I D, Alma M. An adaptive feedforward compensation algorithm for active vibration control[C]. Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Atlanta, USA: IEEE, 2010: 3626-3631.
- [15] 马逊军,陆洋,陈仁良,等.直升机多频振动并联结构自适应控制方法研究[J].振动工程学报,2016,29(5):755-764.  
Ma Xunjun, Lu Yang, Chen Renliang, et al. Multi-frequency helicopter vibration control method using parallel-form adaptive filters[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(5): 755-764.
- [16] Vau B, Landau I D. Adaptive rejection of narrow-band disturbances in the presence of plant uncertainties-A dual Youla-Kucera approach[J]. Automatica, 2021, 129: 109618.
- [17] Silva A C, Landau I D, Airimitoie T-B. Direct adaptive rejection of unknown time-varying narrow band disturbances applied to a benchmark problem [J]. European Journal of Control, 2013, 19(4): 326-336.
- [18] Landau, I D, Airimitoie T-B, Silva A C. Adaptive attenuation of unknown and time-varying narrow band and broadband disturbances[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2015, 29(11): 1367-1390.
- [19] Airimitoie T-B, Landau I D. Combined adaptive feedback and feedforward compensation for active vibration control using Youla-Kučera parametrization[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 434: 422-441.
- [20] Airimitoie T-B, Landau I D, Melendez R, et al. Algo-



- rithms for adaptive feedforward noise attenuation—a unified approach and experimental evaluation[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2021, 29(5): 1850-1862.
- [21] Qian, F F, Wu Z Z, Zhang M T, et al. Youla parameterized adaptive vibration control against deterministic and band-limited random signals[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 134, 106359.
- [22] Zhang M T, Wu Z Z, Qian F F. Youla parameterized adaptive noise attenuation in ducts[C]. Proceedings of 2019 IEEE 8th Joint International Information Technology and Artificial Intelligence Conference (ITAIC). Chongqing: IEEE, 2019: 306-310.
- [23] Wu Z Z, Zhang M T, Chen Z Y, et al. Youla parameterized adaptive vibration suppression with adaptive notch filter for unknown multiple narrow band disturbances[J]. Journal of Vibration and Control, 2019, 25(3): 685-694.
- [24] Kwong R H, Johnston E W. A variable step size LMS algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(7): 1633-1642.
- [25] Aboulnasr T, Mayyas K. A robust variable step-size LMS - type algorithm: analysis and simulations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(3): 631-639.
- [26] Huang B Y, Xiao Y G, Ma Y P, et al. A simplified variable step-size LMS algorithm for Fourier analysis and its statistical properties[J]. Signal Processing, 2015, 117: 69-81.
- [27] 方昱斌,朱晓锦,胡佳明,等.一种VSSFxLMS算法及其在多自由度微振动控制中的应用[J].振动工程学报, 2020, 33(3): 467-476.
- Fang Yubin, Zhu Xiaojin, Hu Jiaming, et al. A VSS-FxLMS algorithm and its application in multiple DOF micro-vibration control[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(3), 467-476.

## Robust adaptive control for micro-vibration under multiple unknown and time-varying disturbances

FANG Yu-bin<sup>1</sup>, ZHU Xiao-jin<sup>2</sup>, YANG Long-fei<sup>1</sup>, XU Zhi-chao<sup>1</sup>, TIAN Meng-chu<sup>1</sup>, ZHANG Xiao-bing<sup>3</sup>

(1.School of Intelligent Manufacturing, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2.School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China;

3.School of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** The paper presents a feedback robust adaptive micro-vibration control algorithm for rejection of multiple unknown and time-varying narrow band disturbances. This algorithm is based on the internal model principle and Y-K parameterization method. It solves the problem of the parameter design of center robust controller effectively when the model of secondary path is unknown. Meanwhile, a new variable step size least mean square (VSSLMS) method is proposed, and the advantages of the proposed VSSLMS method compared with other VSSLMS methods is verified by system identification. In the end, the active micro-vibration real-time control experiments are carried out through an active micro-vibration control system. The effect of the filtered-x least mean square (LMS), robust adaptive control algorithm based LMS and robust adaptive control algorithm based VSSLMS are verified by experimental comparison. The results of experiments show that the proposed feedback robust adaptive control algorithm has the best performance compared with the other control algorithms under various disturbances.

**Key words:** active vibration control; Y-K parameterization; variable step size (VSS); LMS algorithm; robust adaptive

**作者简介:** 方昱斌(1990—),男,博士,讲师。电话: 18321869901; E-mail: fangyubin91@163.com。

**通讯作者:** 张小兵(1968—),男,博士,教授。电话: 13851879963; E-mail: zhangxb680504@163.com。