

# 随机振动下产品包装系统的传递路径 数值仿真与实验研究

陈俊菲<sup>1,2,3</sup>, 张元标<sup>1,2,3</sup>, 林 聪<sup>1,2,3</sup>

(1. 暨南大学包装工程研究所, 广东 珠海 519070; 2. 暨南大学产品包装与物流重点实验室, 广东 珠海 519070;  
3. 暨南大学珠海市产品包装与物流重点实验室, 广东 珠海 519070)

**摘要:** 针对产品内部质量分布不均、材料和结构特性不同, 建立产品包装系统模型, 通过数值仿真和实验研究产品包装系统的振动传递特性, 并探究在限带白噪声谱和 ASTM 卡车运输谱激励下产品包装系统的振动响应规律。利用状态空间法和 MATLAB/Simulink 仿真工具对产品包装系统进行随机振动仿真分析, 研究缓冲衬垫材料参数对路径的频响传递函数和产品动态响应的影响。研究表明: 在产品的四条振动传递路径中, 刚度和质量分布大的路径上的频响传递函数和质量块的振动响应更大; 产品内部的阻尼参数对各路径的频响传递函数和质量块的加速度响应基本无影响; 关键元件上的加速度响应大小介于产品各路径上质量块的加速度响应大小之间; 较大的缓冲衬垫阻尼有利于降低关键元件上加速度响应功率谱(PSD)的共振峰大小, 较大的缓冲衬垫刚度使关键元件响应 PSD 共振频率和共振峰值均增大。外部激励谱型、系统的振动传递特性和共振频率附近的激励谱能量对缓冲衬垫的减振效果均有影响。仿真分析和实验研究下的产品包装系统的随机响应规律具有一致性。

**关键词:** 随机振动; 包装工程; 数值仿真; 刚度; 阻尼; 功率谱

**中图分类号:** O324; TB48 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)06-1633-14

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.06.018

## 引 言

实际物流中的产品大多由若干个零部件构成, 产品内部结构复杂且各零部件的材料、结构和质量均有差异, 个别零部件的材料结构等相对于产品其他部件更容易受到损坏, 这些零部件被称为关键元件。为了确保包装在运输过程中受到随机激励作用时不发生破损, 分析随机振动下产品及其关键元件构成的系统的响应十分重要。

国内外的学者对随机振动下的产品包装系统进行了大量研究, 这些研究大多集中在随机振动测试分析方法、振动信号调研和模拟方法以及产品运输包装动态响应分析<sup>[1-6]</sup>, 而对产品包装系统数值模型建立和验证的研究较少<sup>[7-9]</sup>。王志伟等<sup>[10]</sup>研究了产品包装件在不同的约束方式下的随机振动特性, 采用有限元法分析了产品包装件的响应特性以及应力和变形情况。孙君等<sup>[11]</sup>研究了随机振动下啤酒瓶周转箱的响应规律, 分析了啤酒瓶和周转箱的加速度峰值分布。Jamialahmadi 等<sup>[12]</sup>研究了两层堆码纸箱的随机响应, 利用 I-scan 系统得到了纸箱接触面间的动压力。Bernad 等<sup>[13]</sup>采用六自由度的振动测试系统, 得到了随机振动下堆码包装单元的工作模态

和系统模态参数。Fang 等<sup>[14]</sup>研究了多层堆码包装系统的动态响应, 分析了各层产品包装的动压力峰值分布规律。通过实验研究和有限元分析方法可得到特定产品包装系统的动态响应, 为特定产品的包装设计提供理论指导。Rouillard 等<sup>[8]</sup>采用数值分析方法研究了堆码包装单元在随机振动下的动态响应, 并通过物理模型验证了数值模型的正确性。李晓刚<sup>[7]</sup>建立了车辆-包装系统数值模型, 研究了白噪声随机激励下产品与易损件的加速度响应。秦伟等<sup>[9]</sup>建立了三自由度半正定系统的质量-弹簧-阻尼系统, 研究了该系统在随机振动条件下的加速度动态响应以及加速度功率谱密度。在以往数值仿真中, 包装件一般简化为具有关键元件的二自由度系统, 这种方式将产品简化成了一个均质的质量块, 没有考虑产品内部复杂的结构与质量分布, 当缓冲衬垫采用局部缓冲包装形式时, 产品内部不同位置的响应会存在较大差异。

在传统的运输包装系统中, 车辆模型被简化为四自由度系统或八自由度系统, 车辆模型的底部受到来自路面不平的随机位移激励。实际车辆的内部结构过于复杂, 通过简化的车辆模型传递给产品包装系统底部的随机激励可能存在较大的偏差。本文采集振动台上的随机加速度激励作为输入信号, 能反映出产

品包装模型在实际物流中所受的随机激励。产品及关键元件是缓冲包装设计的关键关注对象,运输中的大多数产品内部结构复杂、材料各异,研究此类产品包装系统的随机动态响应具有重要意义。

本文选择产品包装系统作为研究对象,建立具有四条振动传递路径的产品包装系统数值仿真模型,通过数值仿真和实验研究了产品包装系统在不同路径上的振动响应,探究了产品内部参数、缓冲衬垫材料参数对产品及其关键元件响应的影

## 1 产品包装系统模型

### 1.1 模型建立

建立由缓冲衬垫、产品及其关键元件构成的产品包装系统,产品内部包含了四条振动传递路径,将激励信号传递至产品和关键元件上,不同路径上产品的内部质量、刚度和阻尼系数不同,产品包装系统的集总参数模型如图1所示。 $m_1, m_2, m_3, m_4$ 和 $m_c$ 为产品质量参数,其中 $m_c$ 为产品的关键元件质量; $x_1, x_2, x_3, x_4$ 和 $x_c$ 为各质量块的位移响应; $e_1, e_2, e_3, e_4$ 为振动台的位移激励。 $k_{pi}(i=1, 2, 3, 4)$ 和 $c_{pi}(i=1, 2, 3, 4)$ 分别为产品内部各个传递路径的刚度和阻尼; $k_i(i=1, 2, 3, 4)$ 和 $c_i(i=1, 2, 3, 4)$ 分别为缓冲衬垫的刚度和阻尼, $k_i$ 和 $c_i$ 参考实际缓冲衬垫材料。同时对比多种产品包装系统模型,设置数值仿真模型参数<sup>[7,9,15-17]</sup>,得到产品包装系统模型参数如表1所示,关键元件 $m_c$ 的质量为1 kg。

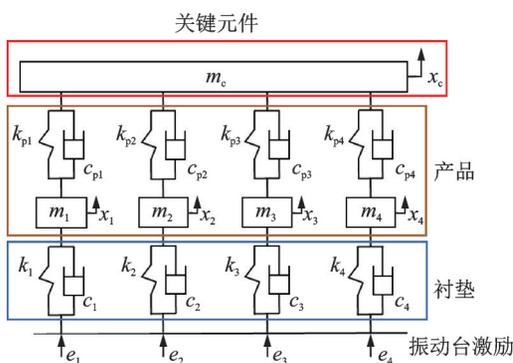


图1 产品包装系统模型

Fig. 1 Product packaging system model

表1 产品包装系统模型参数

Tab. 1 Product packaging system model parameters

路径	$k_{pi}/$ ( $N \cdot m^{-1}$ )	$c_{pi}/$ ( $N \cdot s \cdot m^{-1}$ )	$k_i/$ ( $N \cdot m^{-1}$ )	$c_i/$ ( $N \cdot s \cdot m^{-1}$ )	$m_i/$ kg
路径1	1000000	100	400000	250	3
路径2	3000000	100	400000	250	3
路径3	1000000	200	400000	250	6
路径4	1000000	100	400000	250	6

### 1.2 传递路径的频响传递函数

频响传递函数是路径振动传递能力的体现,对于产品包装系统结构 $S$ ,一般可以用频响传递函数以矩阵来表示激励与响应之间的关系,其表达式如下:

$$X_s = H_s F_s \quad (1)$$

式中  $X_s$  和  $F_s$  分别为产品包装系统结构的响应和激励向量。产品包装系统结构的频响传递函数可由下式求得:

$$H_s = (-\omega^2 M_s + j\omega C_s + K_s)^{-1} \quad (2)$$

式中  $M_s$  为系统的模态质量矩阵; $C_s$  为模态阻尼矩阵; $K_s$  为模态刚度矩阵; $\omega$  为频响传递函数的频率。产品包装系统结构的频响传递函数如图2所示。

产品上各路径材料参数的差异会影响路径的频响传递函数:对比路径1和路径4,路径4上局部质量分布较大,其频响传递函数大于路径1;对比路径1和路径2,路径2上刚度系数较大,增大路径上的刚度可使低频段0~40 Hz的频响传递函数增大;对比路径3和路径4,两者的频响传递函数几乎重合,产品内部路径上阻尼系数对路径的频响传递函数基本无影响。产品包装系统各路径的频响传递函数峰值集中在40~50 Hz频段内。

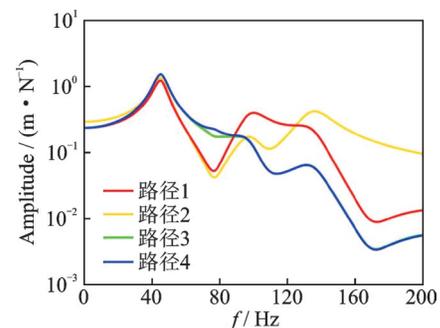


图2 产品包装系统各路径频响传递函数

Fig. 2 FRF of each path for product packaging system

### 1.3 产品包装系统振动分析

在数值仿真前,先确定模型的运动微分方程和状态空间模型,状态空间模型将多个变量的时间序列视为矢量时间序列,从变量到矢量的转换更适用于解决多输入、多输出变量情况下的建模问题。利用牛顿第二定律得到产品包装系统的运动微分方程如下式所示:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \quad (3)$$

式中  $M$  为质量矩阵; $C$  为阻尼矩阵; $K$  为刚度矩阵; $F(t)$  为系统所受到的激振力。将产品包装系统模型的参数代入公式(3),得到运动微分方程如下式

所示:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_{p1}(x_c - x_1) + c_{p1}(\dot{x}_c - \dot{x}_1) - k_1(x_1 - e_1) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{e}_1) \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_{p2}(x_c - x_2) + c_{p2}(\dot{x}_c - \dot{x}_2) - k_2(x_c - e_2) - c_2(\dot{x}_c - \dot{e}_2) \quad (5)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = k_{p3}(x_c - x_3) + c_{p3}(\dot{x}_c - \dot{x}_3) - k_3(x_c - e_3) - c_3(\dot{x}_c - \dot{e}_3) \quad (6)$$

$$m_4 \ddot{x}_4 = k_{p4}(x_c - x_4) + c_{p4}(\dot{x}_c - \dot{x}_4) - k_4(x_c - e_4) - c_4(\dot{x}_c - \dot{e}_4) \quad (7)$$

$$m_c \ddot{x}_c = -k_{p1}(x_c - x_1) - c_{p1}(\dot{x}_c - \dot{x}_1) - k_{p2}(x_c - x_2) - c_{p2}(\dot{x}_c - \dot{x}_2) - k_{p3}(x_c - x_3) - c_{p3}(\dot{x}_c - \dot{x}_3) - k_{p4}(x_c - x_4) - c_{p4}(\dot{x}_c - \dot{x}_4) \quad (8)$$

系统的运动微分方程的输入项包含了一阶导数项,为了消除导数项,选择状态变量如下式所示:

$$y_1 = x_1, y_2 = \dot{x}_1 - \frac{c_1}{m_1} e_1 \quad (9)$$

$$y_3 = x_2, y_4 = \dot{x}_2 - \frac{c_2}{m_2} e_2 \quad (10)$$

$$y_5 = x_3, y_6 = \dot{x}_3 - \frac{c_3}{m_3} e_3 \quad (11)$$

$$y_7 = x_4, y_8 = \dot{x}_4 - \frac{c_4}{m_4} e_4 \quad (12)$$

$$y_9 = x_c, y_{10} = \dot{x}_c \quad (13)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{p1} + k_1}{m_1} & -\frac{c_{p1} + c_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{p2} + k_2}{m_2} & -\frac{c_{p2} + c_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{p1}}{m_1} & \frac{c_{p1}}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{p2}}{m_2} & \frac{c_{p2}}{m_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{p3} + k_3}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{p1}}{m_c} & \frac{c_{p1}}{m_c} & \frac{k_{p2}}{m_c} & \frac{c_{p2}}{m_c} & \frac{k_{p3}}{m_c} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{c_{p3} + c_3}{m_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_{p4} + k_4}{m_4} & -\frac{c_{p4} + c_4}{m_4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_{p3}}{m_c} & \frac{k_{p4}}{m_c} & \frac{c_{p4}}{m_c} & -\frac{k_{p1} + k_{p2} + k_{p3} + k_{p4}}{m_c} & -\frac{c_{p1} + c_{p2} + c_{p3} + c_{p4}}{m_c} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} - \frac{c_1(c_{p1} + c_1)}{m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_2} - \frac{c_2(c_{p2} + c_2)}{m_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_3} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} - \frac{c_3(c_{p4} + c_3)}{m_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_4}{m_4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_4}{m_4} - \frac{c_4(c_{p4} + c_4)}{m_4^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1 c_{p1}}{m_c m_1} & \frac{c_2 c_{p2}}{m_c m_2} & \frac{c_3 c_{p4}}{m_c m_3} & \frac{c_4 c_{p4}}{m_c m_4} \end{pmatrix} \circ$$

整合式(9)~(13)可得:

$$\dot{y}_1 = y_2 + \frac{c_1}{m_1} e_1 \quad (14)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{k_{p1} + k_1}{m_1} y_1 - \frac{c_{p1} + c_1}{m_1} y_2 + \frac{k_{p1}}{m_1} y_9 + \frac{c_{p1}}{m_1} y_{10} + \left[ \frac{k_1}{m_1} - \frac{c_1(c_{p1} + c_1)}{m_1^2} \right] e_1 \quad (15)$$

同理可得  $\dot{y}_3, \dot{y}_4, \dot{y}_5, \dot{y}_6, \dot{y}_7, \dot{y}_8, \dot{y}_9, \dot{y}_{10}$ , 设系统的状态空间方程如下式所示:

$$\dot{Y} = AY + BI \quad (16)$$

将式(14)和(15)代入式(16),可得到产品包装系统的状态空间方程如下式所示:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \\ \dot{y}_7 \\ \dot{y}_8 \\ \dot{y}_9 \\ \dot{y}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & N \\ P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (17)$$

矩阵  $J, N, P, Q, E, F$  分别如下式所示:

通过公式(17)可计算得到质量块  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_c$  的速度响应,其中关键元件  $m_c$  的速度响应如下式所示:

$$\dot{x}_c = \dot{y}_9 = \left\{ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{matrix} + \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \quad (18)$$

$$\begin{matrix} \frac{c_1 c_{p1}}{m_c m_1} & \frac{c_2 c_{p2}}{m_c m_2} & \frac{c_3 c_{p3}}{m_c m_3} & \frac{c_4 c_{p4}}{m_c m_4} \end{matrix}$$

通过 Simulink 中的微分模块可计算得到关键元件  $m_c$  的加速度响应。

## 2 Simulink 建模与仿真计算

### 2.1 Simulink 模型建立

借助 MATLAB/Simulink 动态系统仿真工具,根据系统状态空间方程,利用各模块构建整个系统的仿真模型。产品包装系统的四个角垫均受到相同大小的位移激励,由公式(15)可知,Simulink 仿真分析需要输入随机激励信号。中国货运的主要方式是公路运输,本文选择使用 ASTM 中的 D4169—16 测试标准作为随机振动激励谱型<sup>[18]</sup>。为了探究谱型对产品动态响应的作用,还添加了一组限带白噪声激励谱作为对比。将两种激励谱型输入振动台控制系统,从振动台上采集两种随机加速度时域信号,如图3所示。

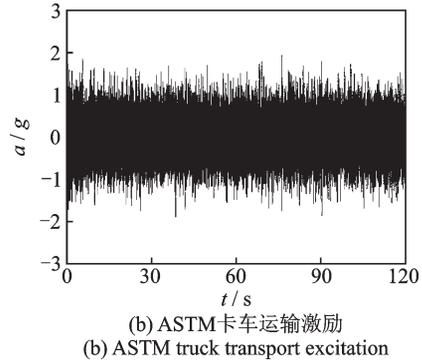
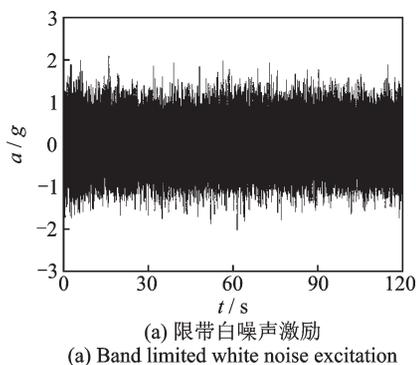


图3 随机加速度激励时域信号  
Fig. 3 Random acceleration excitation time domain signal

随机加速度信号通过 Signal Builder 模块导入 Simulink 模型中,通过两个积分模块将随机加速度输入信号转换为随机位移激励信号,与数值模型建立连接。两种激励加速度功率谱如图4所示,Simulink 模型如图5所示,各模块的功能如表2所示。

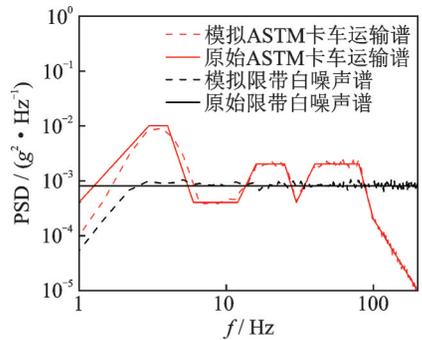


图4 激励加速度功率谱  
Fig. 4 Excitation acceleration power spectrum

表2 模块功能

Tab. 2 Module functions

模块	命名	功能
Signal Builder	Signal Builder	导入激励加速度信号
Gain	Gain1	转化输入加速度激励的单位量级
	Gain, Gain3~6	用矩阵形式表示四个输入激励
	Gain2	转化响应加速度激励的单位量级
Integrator	Integrator	将输入加速度求积分转换成输入速度
	Integrator1	将输入速度求积分转换成输入位移
State-Space	mc, m1, m2, m3, m4	状态空间方程仿真运算
Derivative	Acceleration1, 2, 3, 4, 5	将速度响应求微分转换成加速度响应
To Workspace	To Workspace1, 2, 3, 4, 5	将变量保存至工作区
Scope	Excitation, acceleration	绘制图像

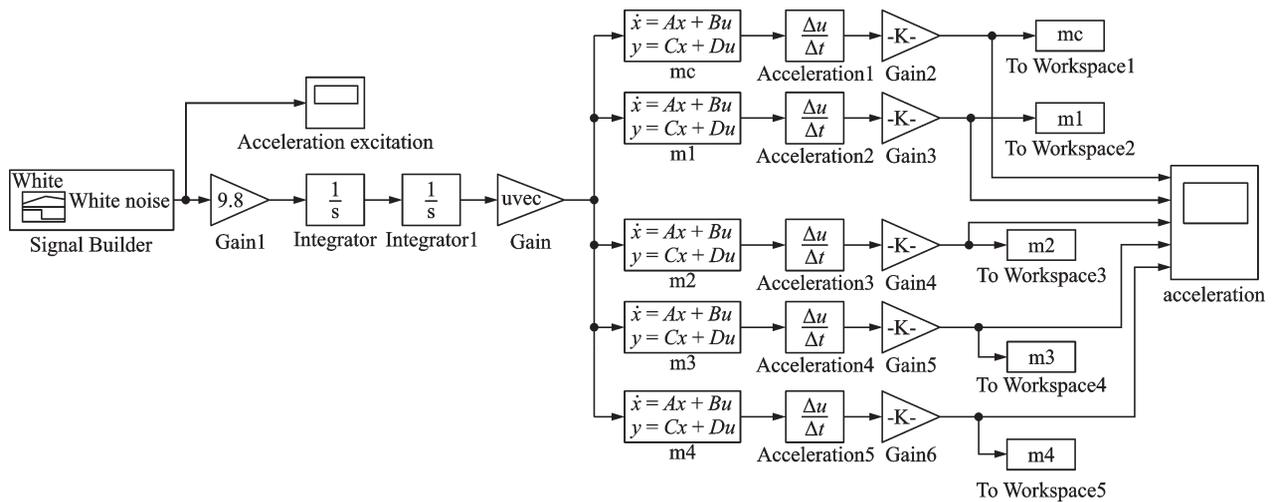


图 5 Simulink 仿真模型

Fig. 5 Simulink simulation model

2.2 仿真求解与结果处理

随机振动采样时间为 120 s, 仿真求解器设置为变步长的 ode45, 运行仿真可输出产品及关键元件的加速度响应曲线。通过 MATLAB 中的 Pw Welch 函数计算得到响应功率谱密度, 采样频率为 1024 Hz, 汉宁窗长度为 512, 数据重叠长度为 256。

2.3 仿真结果分析

在两种激励谱下, 各质量块的加速度响应时域信号和功率谱密度分别如图 6 和 7 所示。

时域信号: ASTM 激励谱下, 各质量块上的加速度时域响应明显大于限带白噪声激励下的响应。同一激励谱下,  $m_3$  和  $m_4$  的响应大于  $m_1$  和  $m_2$  的响应, 关键元件  $m_c$  的加速度响应时域信号更接近于  $m_3$  和

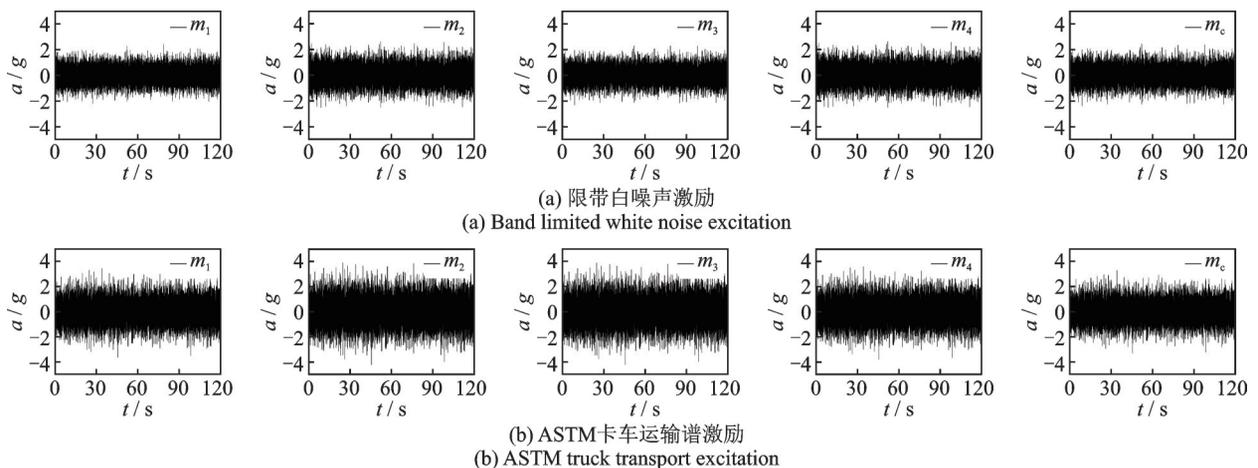


图 6 各质量块的加速度响应时域信号

Fig. 6 Acceleration response time domain signal of each mass block

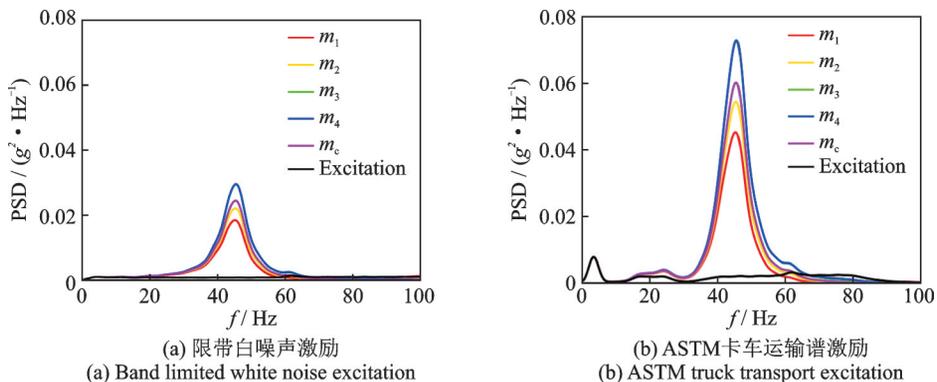


图 7 各质量块的加速度响应功率谱密度

Fig. 7 Acceleration response PSD of each mass block

$m_4$  的信号,各质量块上的加速度正负响应呈对称分布。

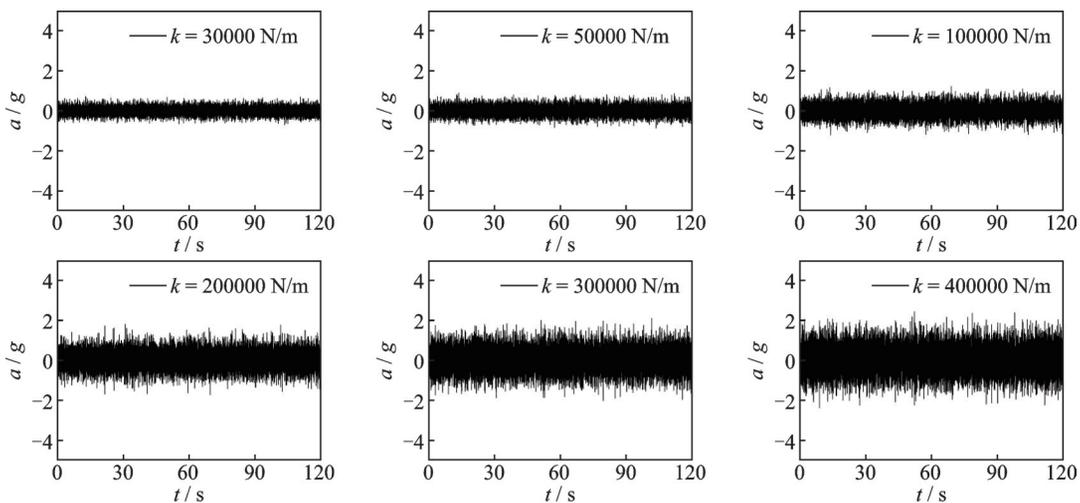
响应功率谱:相同激励谱下,四个质量块的加速度响应 PSD 不同,ASTM 激励谱下各质量块响应的差异更为显著。关键元件  $m_c$  的加速度响应 PSD 大于质量块  $m_1$  和  $m_2$ ,且小于质量块  $m_3$  和  $m_4$ ,即关键元件上加速度响应 PSD 介于各质量块响应 PSD 之间。路径 3 和路径 4 上产品内部阻尼参数不同,两种激励谱下质量块  $m_3$  和  $m_4$  的加速度响应 PSD 曲线完全重合,说明产品内部的阻尼参数对路径上各质量块加速度响应 PSD 大小基本无影响,与图 2 的频响传递函数结果一致。

不同路径上质量块的共振频率差异较小,产品包装系统的响应能量集中在 40~55 Hz,该频段 ASTM 激励谱的输入能量远大于限带白噪声激励谱的输入能量,因此 ASTM 激励谱下产品包装系统的响应远大于限带白噪声激励下的响应。

产品内部的质量分布和刚度系数对产品各路径上质量块加速度响应 PSD 的影响较大。系统路径 2 上产品的内部刚度远大于路径 1 上产品的内部刚度,图 7 中质量块  $m_2$  的加速度响应 PSD 大于  $m_1$  的响应 PSD,表明产品内部路径上的刚度系数越大,该路径上质量块的加速度响应 PSD 也越大。系统路径 3 上产品的内部质量分布远大于路径 1 上产品的内部质量分布,图 7 中质量块  $m_3$  的加速度响应 PSD 大于  $m_1$  的响应 PSD,表明产品内部路径上的质量分布越大,该路径上质量块的加速度响应 PSD 也越大。各路径上质量块的加速度响应 PSD 关系与各路径的频响传递函数在共振频段的关系相对应。

### 3 缓冲衬垫材料参数灵敏度的影响

在产品包装系统模型参数  $k_{pi}$ ,  $c_{pi}$  和  $m_i$  不变的前



(a) 限带白噪声激励  
(a) Band limited white noise excitation

提下,调整缓冲衬垫材料参数  $k_i$  和  $c_i$ ,探究不同缓冲衬垫参数对关键元件上动态响应和产品包装系统各路径频响传递函数的影响。通过控制变量法分别改变缓冲衬垫的刚度  $k_i$  和阻尼  $c_i$ ,记录关键元件  $m_c$  上的加速度响应。调整缓冲衬垫的材料参数可以改变产品包装系统各路径的频响传递函数,不同路径具有相同的规律,本文仅展示路径 1 频响传递函数的变化情况。

#### 3.1 缓冲衬垫材料刚度的影响

保持产品内部参数不变,设置缓冲衬垫的阻尼为 250 N·s/m,不同缓冲衬垫刚度下路径 1 的频响传递函数如图 8 所示,关键元件的加速度时域信号和响应功率谱密度分别如图 9 和 10 所示。

路径 1 的频响传递函数:随着缓冲衬垫刚度的增加,路径 1 的频响传递函数的一阶共振频率和一阶共振峰值均增大。适当减小缓冲衬垫材料的刚度系数有利于减小低频段路径的频响传递函数。

时域信号:两种激励谱下,随着缓冲衬垫刚度增大,关键元件的加速度响应时域信号明显增大,振动响应更剧烈。

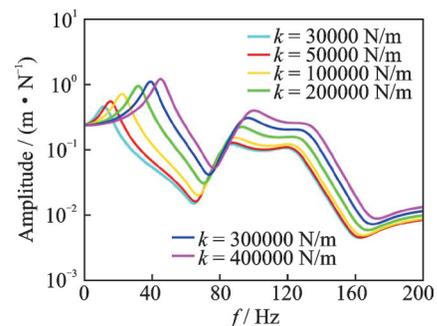


图 8 缓冲衬垫刚度参数对产品包装系统路径 1 频响传递函数的影响

Fig. 8 Effect of cushion stiffness parameters on the FRF of product packaging system path 1

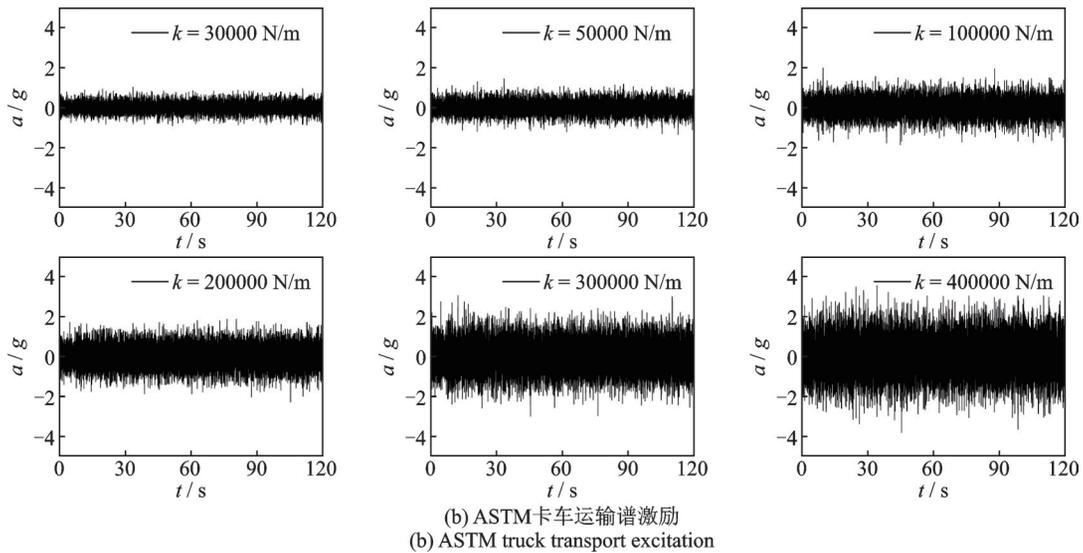


图 9 不同衬垫刚度下关键元件的加速度响应时域信号

Fig. 9 Acceleration response time domain signal of key component under different cushion stiffness

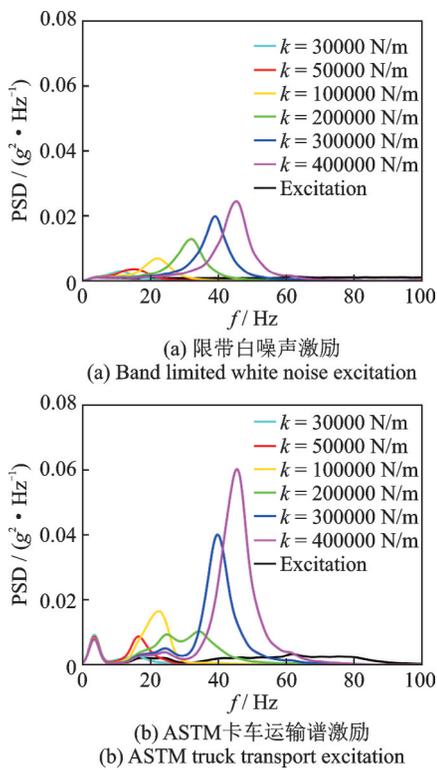


图 10 不同衬垫刚度下关键元件的加速度响应功率谱密度  
Fig. 10 Acceleration response PSDs of key component under different cushion stiffness

响应功率谱密度:两种激励谱下,关键元件的响应功率谱密度略有不同,缓冲衬垫材料的刚度值对关键元件响应功率谱密度的共振频率和共振峰值均有影响。限带白噪声激励下,增大缓冲衬垫的刚度值,关键元件的加速度响应功率谱密度增大,系统的共振频率随着刚度增大而增大,与频响传递函数变化规律一致(见图 8)。在 ASTM 激励谱下,增大缓冲衬垫的刚度值,关键元件的加速度响应功率谱整体呈现增大的趋势,共振频率变化规律也与白噪声激励下

保持一致。当缓冲衬垫材料的刚度为 200000 N/m 时,系统共振频率附近的激励功率谱值较小,关键元件的响应功率谱峰密度值骤减,关键元件的振动响应与共振频率处激励能量大小紧密相关。

### 3.2 缓冲衬垫材料阻尼的影响

保持产品内部参数不变,设置缓冲衬垫刚度为 400000 N/m,不同缓冲衬垫阻尼下路径 1 的频响传递函数如图 11 所示,不同缓冲衬垫材料阻尼下关键元件的加速度时域信号和响应功率谱密度分别如图 12 和 13 所示。

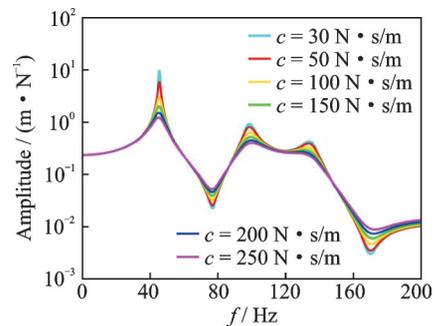


图 11 缓冲衬垫阻尼参数对产品包装系统路径 1 频响传递函数的影响

Fig. 11 Effect of cushion damping parameters on the FRF of product packaging system path 1

路径 1 的频响传递函数:随着缓冲衬垫阻尼的增加,路径 1 的频响传递函数的一阶共振频率不变,一阶共振峰值减小。适当增加缓冲衬垫的阻尼有利于减小低频段路径的频响传递函数。

时域信号:两种激励谱下,增大缓冲衬垫阻尼参数,关键元件上的加速度响应时域信号均明显减小,如图 12 所示。

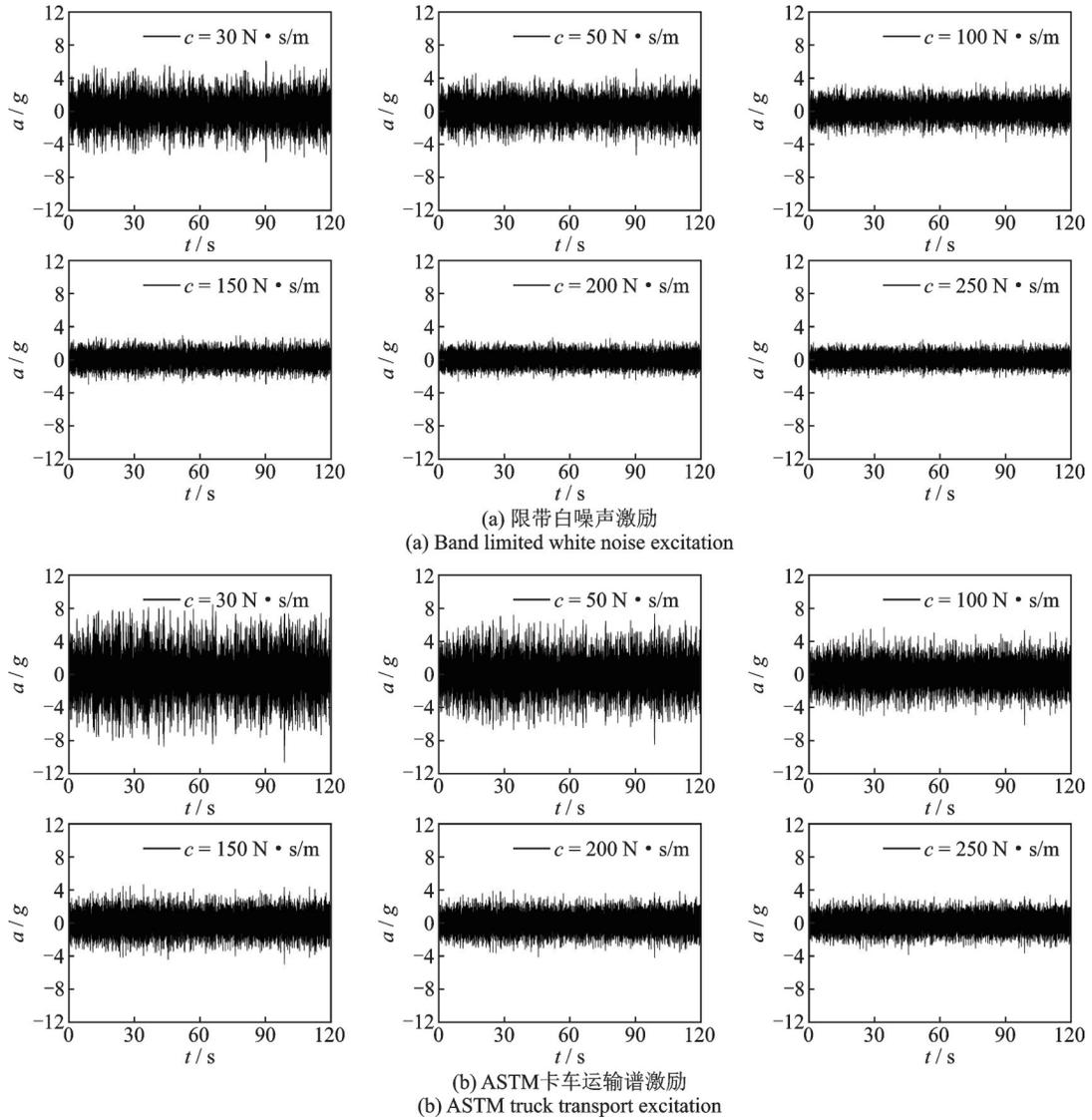


图12 不同衬垫阻尼下关键元件的加速度响应时域信号

Fig. 12 Acceleration response time domain signal of key component under different cushion damping

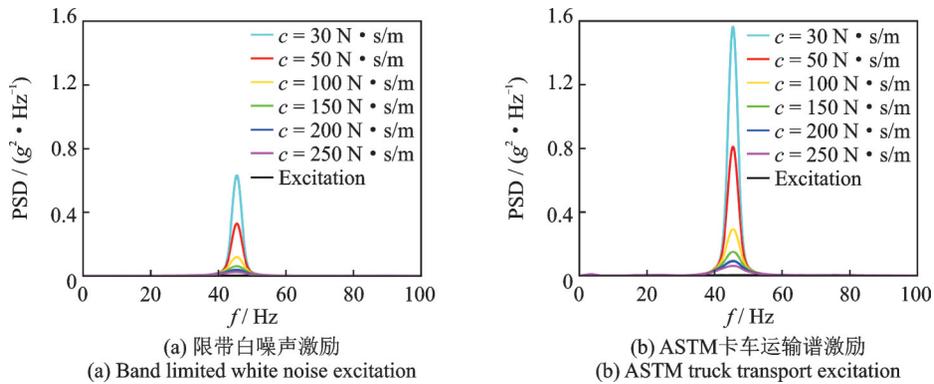


图13 不同衬垫阻尼下关键元件的加速度响应功率谱密度

Fig. 13 Acceleration response PSDs of key component under different cushion damping

响应功率谱密度:两种激励谱下,缓冲衬垫材料的阻尼参数仅影响关键元件上响应功率谱密度的共振峰值,响应功率谱密度的共振频率不受阻尼参数的影响。响应功率谱密度的共振峰值随着缓冲衬垫材料阻尼的增大而减小,较大的缓冲衬垫阻尼参数有利于减振。

### 3.3 缓冲衬垫材料刚度和阻尼的影响

考虑到实际缓冲衬垫材料刚度和阻尼系数的变化规律,需探究缓冲衬垫的刚度和阻尼共同变化对路径频响传递函数和关键元件振动响应的影响。缓冲衬垫刚度和阻尼同时变化时,路径1的频响传递

函数如图 14 所示,关键元件的加速度时域信号和响应功率谱密度分别如图 15 和 16 所示。

路径 1 的频响传递函数:缓冲衬垫刚度参数和阻尼参数同时增大时,路径 1 的频响传递函数的一阶共振频率增大,一阶共振峰值变化不大。

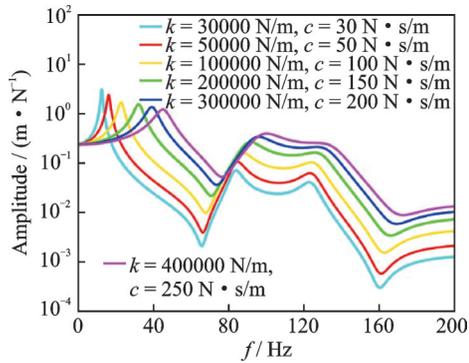


图 14 缓冲衬垫刚度和阻尼参数对产品包装系统路径 1 频响传递函数的影响  
Fig. 14 Effect of cushion stiffness and damping parameters on the FRF of product packaging system path 1

时域信号:当衬垫刚度和阻尼参数同时增大时,关键元件的响应时域信号没有呈现特定的规律,重点分析响应的功率谱信号。

响应功率谱:缓冲衬垫材料的刚度值影响着产品包装系统的共振频率,随着缓冲衬垫刚度的增加,系统的共振频率增大。不同激励谱下关键元件的共振频率差异较小,在 0.5 Hz 以内。缓冲衬垫的刚度和阻尼共同影响着产品关键元件的振动响应 PSD。

两种激励谱下关键元件的响应 PSD 特性如表 3 所示。在限带白噪声激励下,关键元件在缓冲衬垫材料参数为  $k=50000 \text{ N/m}$ ,  $c=50 \text{ N}\cdot\text{s/m}$  时的振动响应小于  $k=30000 \text{ N/m}$ ,  $c=30 \text{ N}\cdot\text{s/m}$  时的振动响应,如图 16(a) 所示,此时其他各频段激励谱 PSD 值基本相同,关键元件的响应 PSD 主要受缓冲衬垫的振动传递特性的影响。在 ASTM 激励谱下,关键元件在缓冲衬垫材料参数为  $k=50000 \text{ N/m}$ ,  $c=50 \text{ N}\cdot\text{s/m}$  时的振动响应远大于  $k=30000 \text{ N/m}$ ,  $c=30 \text{ N}\cdot\text{s/m}$  时的振动响应。当缓冲衬垫参数为

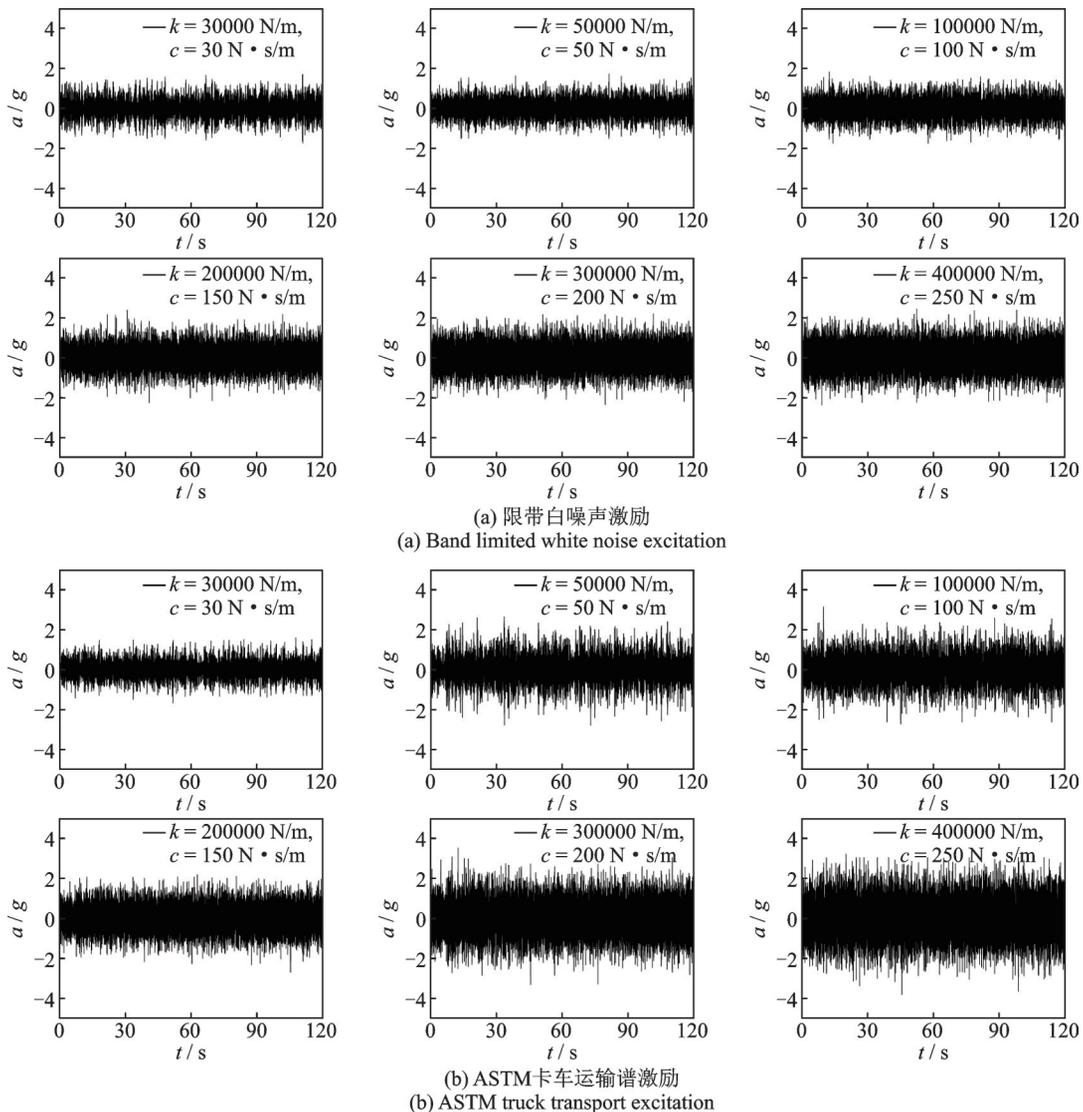


图 15 不同衬垫刚度和阻尼下关键元件的加速度响应时域信号  
Fig. 15 Acceleration response time domain signal of key component under different cushion stiffness and damping

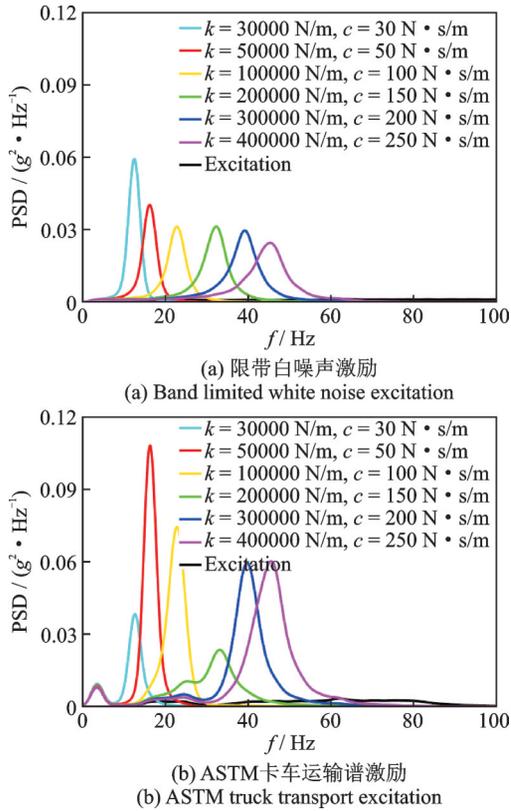


图 16 不同衬垫刚度和阻尼下关键元件的加速度响应功率谱密度

Fig. 16 Acceleration response PSDs of key component under different cushion stiffness and damping

表 3 Simulink 仿真中不同激励谱下关键元件的响应功率谱密度特性

Tab. 3 PSD characteristics of the key component under different excitation power spectra in Simulink simulation

缓冲衬垫 刚度/ ( $N \cdot m^{-1}$ )	缓冲衬垫 阻尼/ ( $N \cdot s \cdot m^{-1}$ )	共振频率/Hz		共振峰值/( $g^2 \cdot Hz^{-1}$ )	
		白噪声	ASTM	白噪声	ASTM
30000	30	12.5	12.7	0.05924	0.03820
50000	50	16.3	16.3	0.04023	0.10800
100000	100	22.8	22.8	0.03123	0.07438
200000	150	32.3	33.2	0.03127	0.02342
300000	200	39.2	39.7	0.02962	0.05944
400000	250	45.3	45.6	0.02448	0.06013

$k=30000 N/m, c=30 N \cdot s/m$  和  $k=50000 N/m, c=50 N \cdot s/m$  时, ASTM 激励谱在系统共振频率处的激励功率谱值分别为  $0.000667$  和  $0.001917 g^2/Hz$ , 此时响应功率谱还受到系统共振频率附近激励 PSD 值的影响。同一激励谱不同衬垫参数下, 关键元件上的响应功率谱大小由振动传递特性和系统共振频率附近的激励功率谱值共同控制。

两种激励谱同一刚度和阻尼值下, 关键元件的响应功率谱的差异是由两种激励谱在系统共振频率处激励能量的差异所造成的。由于白噪声激励谱下

产品包装系统共振频率附近的激励谱值远大于 ASTM 激励谱值, 衬垫材料参数为  $k=30000 N/m, c=30 N \cdot s/m$  时, 白噪声激励谱下的响应远大于 ASTM 激励谱下的响应。

不同激励谱下, 缓冲衬垫材料的减振效果差异较大, 在进行包装设计时, 应充分考虑产品包装系统在实际物流中所历经的随机振动信号, 并选择合适的缓冲衬垫材料, 减少传递至关键元件上的振动信号。

## 4 随机振动实验

### 4.1 产品和缓冲衬垫材料参数

用重心偏置、结构不均的模型作为产品, 产品模型由三个质量块构成, 产品顶部的质量块为产品的关键元件, 如图 17 所示。采用局部缓冲包装方式, 用发泡聚乙烯 (expanded polyethylene) 对产品进行包装, 选用 20, 30 和 40 mm 三种不同厚度的缓冲材料作为缓冲衬垫, 密度分别为  $14.3, 16.7$  和  $15.7 kg/m^3$ , 四个角垫的缓冲面积相同, 每个角垫的有效缓冲面积为  $(40 \times 90) mm^2$ , 产品的具体尺寸如表 4 所示。

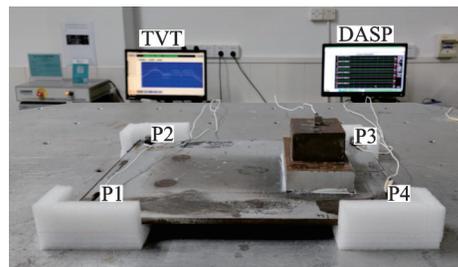


图 17 产品包装系统

Fig. 17 Product packaging system

表 4 产品尺寸与材料参数

Tab. 4 Product dimensions and material parameters

参数	底板	中板	顶板
长度/mm	400	152	82
宽度/mm	304	90	72
高度/mm	8	30	40
质量/kg	7.28	3.02	2.00

三种厚度缓冲衬垫的材料参数可以通过正弦扫频实验和半功率带宽法得到, 随着缓冲衬垫厚度的增加, 缓冲衬垫的刚度和阻尼均减小, 缓冲衬垫材料参数如表 5 所示。

表 5 缓冲衬垫材料特性参数

Tab. 5 Cushioning material property parameters

厚度/mm	刚度/( $N \cdot m^{-1}$ )	阻尼/( $N \cdot s \cdot m^{-1}$ )
20	95083	85.47
30	76574	78.39
40	39891	56.58

## 4.2 力锤实验

缓冲衬垫材料硬度低,力锤激励时衬垫变形大,难以直接测得产品包装系统各路径的频响传递函数,可通过力锤实验测得产品各路径的频响传递函数。对产品底部进行力锤激励,可获取产品各路径的频响传递函数,产品底部位置1,2,3,4如图18所示。

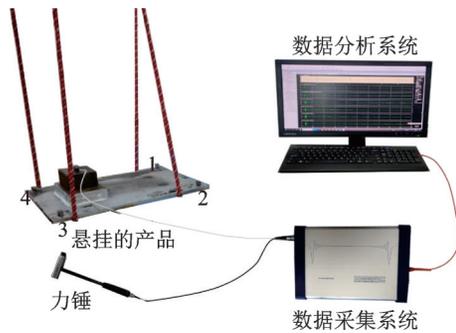


图18 力锤实验设置

Fig. 18 Force hammer experimental setup

通过弹性绳索将产品悬挂在钢架上,使产品处于自由状态,加速度传感器被固定在关键元件的顶部,用于采集关键元件上的加速度响应。用力锤对产品底部的1,2,3,4号位置进行力激励,得到关键元件上的加速度响应,利用数据采集系统采集得到力激励和关键元件上的加速度响应,最后利用DASP数据分析系统得到各激励点到响应点之间的频响传递函数。从位置1的激励到关键元件上的响应得到产品路径1的频响传递函数,依次实验分别得到路径2、路径3和路径4的频响传递函数。

各路径的频响传递函数如图19所示。在低频段0~5 Hz,四条路径的频响传递函数差别较小;在5~20 Hz频段内,四条传递路径的频响函数值差距逐渐增大。在20~100 Hz频段内,路径3和路径4的频响传递函数振幅非常接近,且远大于路径1和路径2,这说明路径3和路径4的振动传递能力明显大于路径1和路径2,在缓冲包装设计时应着重强调

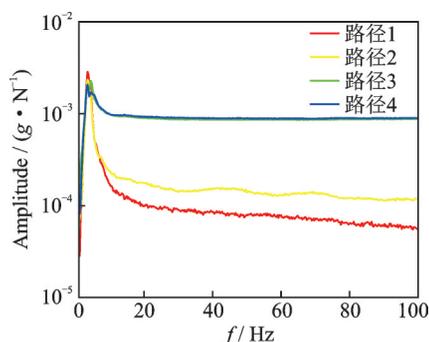


图19 产品上各路径的频响传递函数

Fig. 19 Product's FRF of each path

路径3和路径4的减振设计。

## 4.3 随机振动实验设计

实验设备采用美国Lansmont公司的M7000-10液压振动台,软件TVT用来控制振动台,输出信号为频域信号。为采集产品响应的时域信号,采用北京东方振动所的数据采集仪DASP系统。将产品包装系统放置在振动台的中心,连接产品和缓冲衬垫,确保缓冲衬垫在实验中不会因振动而脱离产品,产品包装系统在振动台上处于无约束状态。对由产品和缓冲衬垫组成的产品包装系统进行随机振动实验,采用与数值仿真相同强度等级的谱型作为随机振动实验的激励谱。

在关键元件的顶部固定了一个加速度传感器以记录其加速度响应,如图18所示。为了实现仿真与实验对照,在产品包装系统上点P1,P2,P3和P4处分别安装加速度传感器记录其加速度响应,以对照仿真模型中质量块 $m_1$ , $m_2$ , $m_3$ 和 $m_4$ 的加速度响应,P1,P2,P3和P4的位置如图17所示,P3和P4位置处的质量分布远大于P1和P2位置处,与产品包装系统模型对应。

## 4.4 随机振动实验结果

产品及关键元件的加速度响应时域信号和响应功率谱密度分别如图20和21所示,响应功率谱的共振频率和共振峰值如表6所示。

在限带白噪声激励下,关键元件的加速度响应时域信号较为对称。在ASTM激励谱下,当缓冲衬垫的厚度为20 mm和30 mm时,关键元件的加速度响应时域信号正向加速度大于负向加速度,此时产品包装系统产生轻微的跳跃,造成系统非线性。ASTM激励谱下,随着缓冲衬垫厚度的增加,关键元件的振动响应逐渐减小。

两种激励谱下,关键元件 $m_c$ 的响应功率谱略小于 $m_3$ 和 $m_4$ ,但远大于 $m_1$ 和 $m_2$ 的响应功率谱,与产品各路径的频响传递函数关系一致。产品包装系统具有一定的对称性,P1和P2,P3和P4的位置结构、材料两两对称,致使 $m_1$ 和 $m_2$ , $m_3$ 和 $m_4$ 的响应PSD的共振峰值十分接近。两种激励谱下,关键元件、 $m_3$ 和 $m_4$ 的共振频率, $m_1$ 和 $m_2$ 的一阶共振频率差异较小,共振频率差异在1 Hz以内,如表6所示。产品包装系统内部材料、结构不均,使 $m_1$ 和 $m_2$ 的响应功率谱激发了二阶共振频率。

衬垫的减振效果与产品包装系统的振动传递特性和激励谱在共振频率附近的能量大小紧密相关。缓冲衬垫厚度增加,产品及关键元件上的响应不一定减小。限带白噪声激励谱下,随着衬垫厚度的增

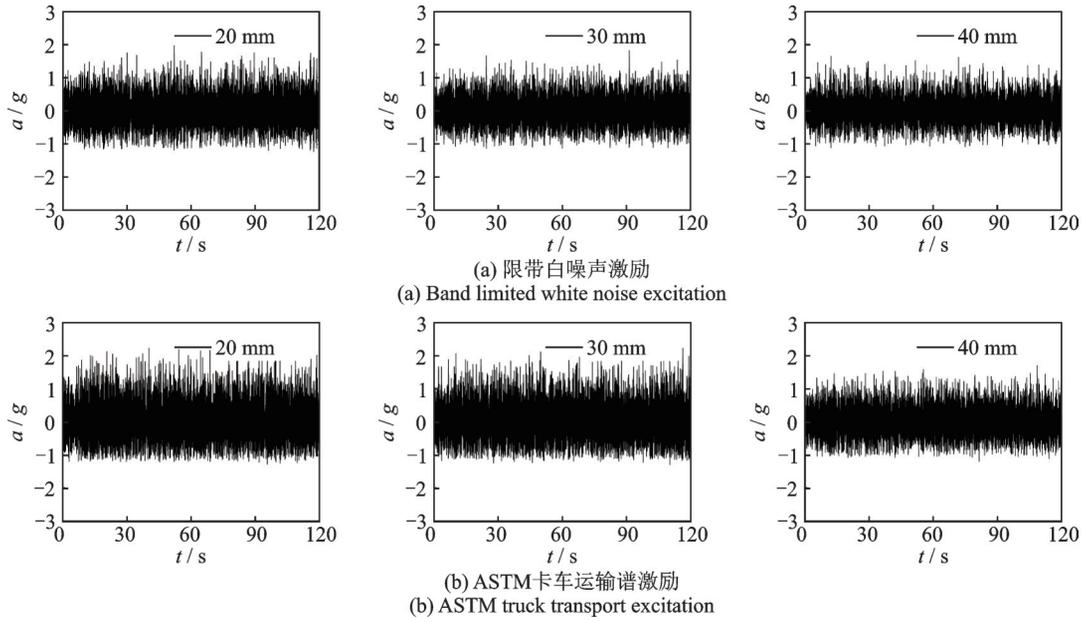


图20 随机振动实验关键元件的加速度响应时域信号

Fig. 20 Acceleration response time domain signal of key component in random vibration experiment

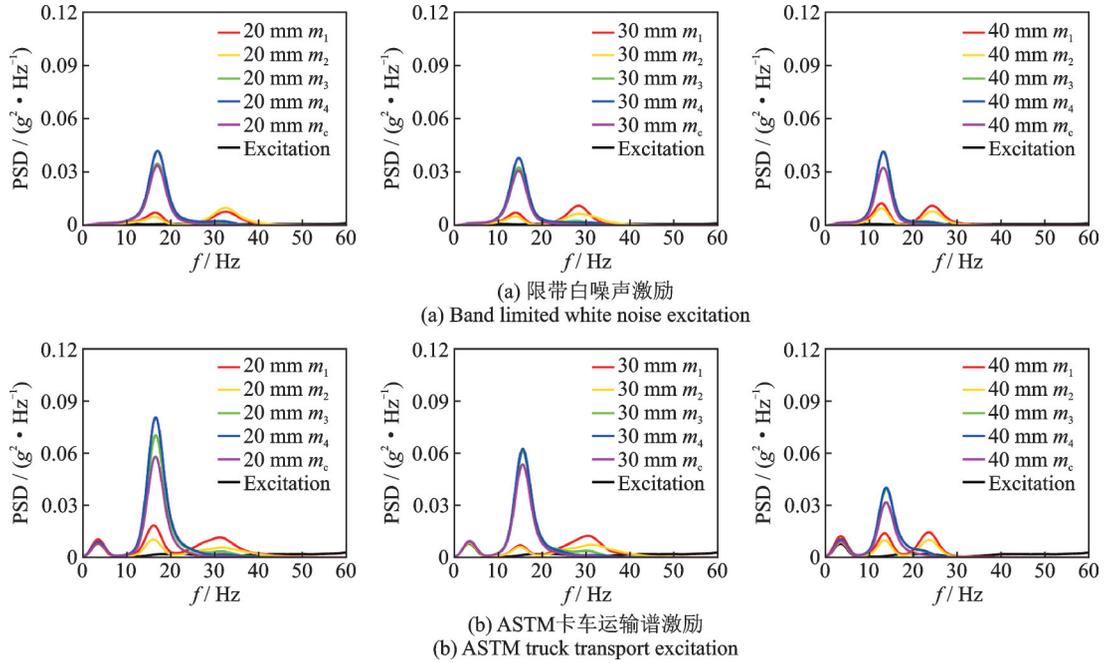


图21 随机振动实验关键元件和各质量块上的加速度响应功率谱密度

Fig. 21 Acceleration response PSDs of key component and mass blocks in random vibration experiment

表6 随机振动试验中不同激励谱下关键元件和各质量块的响应功率谱特性

Tab. 6 PSD characteristics of the key component and mass blocks under different excitation power spectra in random vibration experiment

PSD特性	20 mm		30 mm		40 mm	
	白噪声	ASTM	白噪声	ASTM	白噪声	ASTM
$m_1$ 共振频率/Hz	16.5	16.2	14	15	12.75	13.5
$m_2$ 共振频率/Hz	16.5	16.2	14	15	12.75	13.5
$m_3$ 共振频率/Hz	17	16.6	14.75	15.7	13.25	13.9
$m_4$ 共振频率/Hz	17	16.6	14.75	15.7	13.25	13.9
$m_c$ 共振频率/Hz	17	16.6	14.75	15.6	13.25	13.8
$m_1$ 共振峰值/( $g^2 \cdot Hz^{-1}$ )	0.007218	0.018490	0.007214	0.007104	0.012460	0.014020
$m_2$ 共振峰值/( $g^2 \cdot Hz^{-1}$ )	0.004891	0.010500	0.005194	0.006242	0.009616	0.009969
$m_3$ 共振峰值/( $g^2 \cdot Hz^{-1}$ )	0.034840	0.070170	0.032570	0.060770	0.041630	0.039380
$m_4$ 共振峰值/( $g^2 \cdot Hz^{-1}$ )	0.041880	0.080470	0.037870	0.062370	0.041290	0.040210
$m_c$ 共振峰值/( $g^2 \cdot Hz^{-1}$ )	0.033680	0.057950	0.030740	0.053470	0.324100	0.031730

加,缓冲衬垫刚度减小,产品包装系统的共振频率减小,产品包装系统共振频率附近的激励谱PSD值保持不变,三种厚度下的产品包装系统各质量块的响应功率谱的差异不大,共振峰值十分接近。ASTM激励谱下,随着缓冲衬垫厚度增加,共振频率减小,产品包装系统共振频率附近的激励谱PSD值逐渐减小,各质量块的加速度响应PSD也逐渐减小,此时较厚的缓冲衬垫有更好的减振效果。随机振动实验结果与Simulink仿真结果的规律一致。

## 5 结 论

本文建立了产品包装系统模型,在MATLAB/Simulink中进行了多输入多输出的随机振动数值仿真分析,通过数值仿真和实验可以得出以下结论:

(1) 两种激励谱下的产品包装系统的动态响应Simulink仿真结果与实验结果的规律具有一致性,为产品包装系统的振动研究和包装设计提供了理论指导。

(2) 在刚度和质量分布较大的路径上,产品包装系统中各路径的频响传递函数和各路径上质量块的加速度响应较大,各路径上产品内部的阻尼参数对各路径的频响传递函数和产品的加速度响应基本无影响。关键元件的加速度响应的大小介于不同传递路径上质量块的响应大小之间,不同激励谱下的关键元件的共振频率差异在1 Hz以内。缓冲减振设计应重点关注产品内部刚度和质量分布较大的传递路径。

(3) 缓冲衬垫材料的刚度和阻尼共同影响着产品包装系统各路径的频响传递函数,从而影响关键元件的振动响应。缓冲衬垫材料的阻尼影响关键元件的加速度响应PSD的共振峰值,阻尼越大,共振峰值越小。缓冲衬垫材料的刚度对关键元件响应PSD的共振频率和共振峰值均有影响,共振频率和共振峰值随着缓冲衬垫材料刚度的增加而增大。两种激励谱下产品包装系统的加速度响应不同,缓冲衬垫材料的减振效果是由系统的振动传递特性和共振频率附近的激励谱能量共同控制的。

### 参考文献:

- [1] ZHOU H, WANG Z W. Comparison study on simulation effect of improved simulation methods for packaging random vibration test[J]. Packaging Technology and Science, 2019, 32(3): 119-131.
- [2] ZHOU H, WANG Z W. Measurement and analysis of vibration levels for express logistics transportation in South China[J]. Packaging Technology and Science, 2018, 31(10): 665-678.
- [3] ZHOU H, WANG Z W. A new approach for road-vehicle vibration simulation[J]. Packaging Technology and Science, 2018, 31(5): 246-260.
- [4] WANG Z W, WANG L J. Accelerated random vibration testing of transport packaging system based on acceleration PSD[J]. Packaging Technology and Science, 2017, 30(10): 621-643.
- [5] LEPINE J, ROUILLARD V, SEK M. Review paper on road vehicle vibration simulation for packaging testing purposes[J]. Packaging Technology and Science, 2015, 28(8): 672-682.
- [6] WANG Z W, ZHONG L L. Finite element analysis and experimental investigation of beer bottle-turnover boxes transport unit under random vibration excitation[J]. Packaging Technology and Science, 2020, 33(6): 197-214.
- [7] 李晓刚. 运输包装系统随机振动频域分析[J]. 包装工程, 2012, 33(15): 50-54.  
LI X G. Random vibration frequency domain analysis of transport packaging system[J]. Packaging Engineering, 2012, 33(15): 50-54.
- [8] Rouillard V, Sek M A, Crawford S. The dynamic behaviour of stacked shipping units during transport. Part 1: model validation[J]. Packaging Technology and Science, 2004, 17(5): 237-247.
- [9] 秦伟, 李光. 三自由度半正定系统随机振动仿真与试验研究[J]. 包装工程, 2020, 41(7): 134-140.  
QIN W, LI G. Random vibration simulation and experimental study of three-degree-of-freedom semi-definite system[J]. Packaging Engineering, 2020, 41(7): 134-140.
- [10] 王志伟, 林深伟. 随机振动下产品包装件动态响应的实验研究和有限元分析[J]. 振动与冲击, 2017, 36(13): 223-229.  
WANG Z W, LIN S W. Tests and FE analysis for dynamic responses of packaged products under random vibration environment[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(13): 223-229.
- [11] 孙君, 王志伟. 啤酒瓶周转箱随机振动响应的实验研究[J]. 振动工程学报, 2018, 31(5): 759-771.  
SUN J, WANG Z W. Experimental investigation of dynamic response of beer bottle-turnover boxes in random vibration[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(5): 759-771.
- [12] Jamialahmadi A, Trost T, Östlund S. A proposed tool to determine dynamic load distribution between corrugated boxes[J]. Packaging Technology and Science, 2011, 24(6): 317-330.
- [13] Bernad C, Laspalas A, González D, et al. Dynamic

- study of stacked packaging units by operational modal analysis[J]. *Packaging Technology and Science*, 2010, 23(3): 121-133.
- [14] Fang K, Wang Z W. The statistical characteristics of maxima of contact force in stacked packaging units under random vibration [J]. *Packaging Technology and Science*, 2018, 31(5): 261-276.
- [15] 王启利, 王军. 基于逆子结构的产品包装耦合系统传递路径分析[J]. *包装工程*, 2015, 36(19): 7-12.  
WANG Q L, WANG J. Transfer path analysis of product packaging system based on dynamic inverse substructuring theory[J]. *Packaging Engineering*, 2015, 36(19):7-12.
- [16] 杨虹, 郑全成, 郭红菊, 等. 基于 MATLAB/SIMULINK 的非线性缓冲包装系统冲击响应特性的仿真研究[J]. *包装工程*, 2008, 29(3): 36-38.
- YANG H, ZHENG Q C, GUO H J, et al. Simulation study of shock properties of nonlinear cushioning packaging system based on MATLAB/SIMULINK[J]. *Packaging Engineering*, 2008, 29(3): 36-38.
- [17] ZHANG Y B, WANG Z W. Investigation of frequency response function of product-transport system based on multi-coordinate coupled inverse substructure method [J]. *Packaging Technology and Science*, 2014, 27(5): 364-375.
- [18] ASTM Committee. Standard practice for performance testing of shipping containers and systems: ASTM D4169—16[S]. USA: ASTM, 2016.

## Numerical simulation and experimental study of the transfer path of product packaging system under random vibration

CHEN Jun-fei<sup>1,2,3</sup>, ZHANG Yuan-biao<sup>1,2,3</sup>, LIN Cong<sup>1,2,3</sup>

(1.Packaging Engineering Institute, Jinan University, Zhuhai 519070, China; 2.Key Laboratory of

Product Packaging and Logistics of Jinan University, Zhuhai 519070, China;

3.Zhuhai Key Laboratory of Product Packaging and Logistics, Jinan University, Zhuhai 519070, China)

**Abstract:** The vibration transfer characteristics of the product packaging system are investigated through numerical simulations and experiments, and the vibration response of the product packaging system is investigated under the excitation of the band limited white noise spectrum and ASTM truck highway spectrum. The state-space method and MATLAB/Simulink simulation tools are used to carry out random vibration simulation analysis of the product packaging system to investigate the effect of cushion liner material parameters on the frequency response transfer function of the path and the dynamic response of the product. The results are as follows: among the four vibration transfer paths of the product, the frequency response transfer function and the vibration response of the mass block are larger in the path with large mass distribution and large stiffness; the damping parameters inside the product on the path have no effect on the frequency response transfer function and the acceleration response of the mass block on each path; the acceleration response on the key component is between the response of each part of the product; a larger cushion liner damping helps to reduce the resonance peak of the acceleration response power spectrum (PSD) on the key component, and larger cushion stiffness increases both the PSD resonance frequency and the resonance peak of the key component's response. The external excitation spectral patterns, the vibration transfer characteristics of the system and the excitation spectral energy near the resonance frequency all have effects on the damping effect of the cushion liner. The random response law of the product packaging system under the simulation analysis is consistent with experimental study, and the results provide a theoretical basis for product packaging design.

**Key words:** random vibration; packaging engineering; numerical simulation; stiffness; damping; PSD

**作者简介:** 陈俊菲(1998—),女,硕士研究生。E-mail:2422618177@qq.com。

**通讯作者:** 张元标(1979—),男,博士,副教授。E-mail:zybt@jnu.edu.cn。