

# 结构-形状记忆合金惯容器协同系统的控制性能

孙晓东, 曹黎媛, 李春祥, 马汝为

(上海大学力学与工程科学学院土木工程系, 上海 200444)

**摘要:** 为发挥传统形状记忆合金阻尼器和惯容器的协同作用, 进一步提高其有效性和鲁棒性, 使其能够广泛应用于实际工程中, 提出了一种形状记忆合金惯容器(Shape Memory Alloy Inerter, SMAI)协同系统。采用随机等效线性化方法建立了结构-SMAI系统的动力学方程, 推导出了白噪声激励下结构-SMAI系统的位移方差解析式, 进而定义了 SMAI 系统的优化目标函数。通过迭代优化过程, 在频域内对结构-SMAI 系统进行了优化分析, 并给出了可供工程应用参考的 SMAI 系统的设计参数。数值结果表明, 相比于 SMA, SMAI 系统具有更好的减振效果; 相比于调谐惯容阻尼器(Tuned Inerter Damper, TID), 在总惯容质量比超过 0.3 时, SMAI 系统能显著地减小阻尼需求。使用模拟的白噪声和脉动风速时程, 对结构-SMAI 系统进行了时域分析, 数值分析结果进一步验证了 SMAI 系统减振的有效性和低阻尼需求; 此外, SMAI 系统中惯容器出力显著减小, 从而降低了惯容器对结构的损伤。

**关键词:** 振动控制; 形状记忆合金; 惯容器; 白噪声; 随机等效线性化

**中图分类号:** TU352.12; TB381 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)06-1676-11

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.06.022

## 引言

在地震、极端风等激励作用下, 结构会产生过大的振动响应。为有效降低结构的振动响应, 对结构振动控制的研究必不可少<sup>[1-2]</sup>。近年来, 由于形状记忆合金(SMA)具有优越的超弹性特性和形状记忆效应, 在土木工程领域得到了广泛的研究及应用<sup>[3]</sup>。SMA 能控制由地震或风引起的结构振动, 并能够降低结构的残余变形, 被认为是控制结构振动的理想材料<sup>[4]</sup>。许多学者对 SMA 阻尼器及其减振性能开展了系统性研究。Shi 等<sup>[5]</sup>提出了一种自定心防屈曲支撑(Self-Centering Buckling-Restrained Brace, SC-BRB), 它由基于 SMA 拉索的自定心系统和全钢 BRB 组成; 研究给出了 SC-BRB 中 SMA 拉索的理想退火方案和训练程序, 并对 SC-BRB 的力学性能进行了数值模拟和参数研究。谭平等<sup>[6]</sup>提出了基于 SMA-压电阻尼器的巨-子结构智能控制体系, 研究表明这种智能体系可有效提高巨-子结构的抗震安全性。李祥秀等<sup>[7]</sup>提出了在巨-子结构隔震层处或子结构顶部与主结构连接处施加 SMA-压电智能复合阻尼器, 形成一种巨-子结构智能隔震体系, 并对该体系的抗震性能进行了研究。展猛等<sup>[8]</sup>研发了一种 SMA 压电混合减震装置, 并对其进行了减震

控制试验及数值分析研究。钱辉等<sup>[9]</sup>研制开发了一种自复位形状记忆合金复合摩擦阻尼器, 将其应用于偏心结构并进行了振动台试验研究。在 Smith<sup>[10]</sup>提出惯容器(Inerter)概念之后, 学者们开展了各种带有惯容器的耗能减振装置研究, 例如调谐黏滞质量阻尼器(Tuned Viscous Mass Damper, TVMD)<sup>[11]</sup>、调谐惯容器阻尼器(Tuned Inerter Damper, TID)<sup>[12]</sup>、调谐质量阻尼器惯容器(Tuned Mass Damper Inerter, TMDI)<sup>[13]</sup>、串并联调谐质量阻尼器惯容器(Tuned Tandem Mass Dampers-Inerters, TTMDI)<sup>[14]</sup>。为充分挖掘 SMA 的优势, Zhang 等<sup>[15]</sup>提出了一种惯容增强自定心阻尼系统(Inerter-enhanced Self-Centering Damping System, ISCDS), 该系统在基于 SMA 的自定心阻尼器基础上并联添加一个杠杆式惯容器(Lever-Based Inerter, LBI), 研究表明, 与 SCDS 相比, ISCDS 加固的桥梁排架在减少自定心材料的使用、降低最大加速度和降低最大基底剪力方面具有明显的优势。Tiwari 等<sup>[16]</sup>提出了 SMA-TMDI, 并将其用于控制连体单自由度结构的地震响应。Zhang 等<sup>[17]</sup>提出了一种 SMA 阻尼惯容器(Shape Memory Alloys Damper Inerter, SDI), 并将其用于单自由度结构的减震控制。为发挥传统形状记忆合金阻尼器和惯容器的协同作用, 进一步提高其有效性和鲁棒性, 使其能够广泛地应用于实际工程中, 在上述研究的基础上提出了一

收稿日期: 2021-11-30; 修订日期: 2022-06-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51978391); 上海市青年科技英才扬帆计划资助项目(21YF1412700)。

种形状记忆合金惯容器(Shape Memory Alloy Inert-er, SMAI)系统。运用随机等效线性化方法以及定义的结构-SMAI系统均方位移目标函数,在频域内对 SMAI 系统进行了迭代优化分析,进一步在时域内验证了其控制性能。

## 1 结构-SMAI 系统

### 1.1 形状记忆合金

超弹性 SMA 是 SMAI 系统的重要组成部分,先讨论其力-变形关系。Yan 等<sup>[18]</sup>提出的改进 SMA 本构关系,已经在一些研究中<sup>[14]</sup>得到广泛应用。

超弹性 SMA 的具体力-变形关系如图 1 所示。

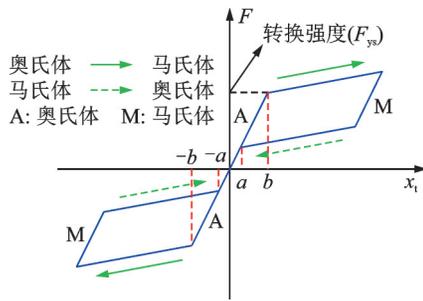


图 1 超弹性 SMA 的力-变形关系

Fig.1 Force-deformation relationship of the super-elastic SMA

在该本构关系中,SMA 元件的非线性恢复力表示为:

$$F_{SMA} = \varphi k_{SMA} x_t + (1 - \varphi) k_{SMA} z_s \quad (1)$$

式中  $\varphi$  为 SMA 屈服后与屈服前的刚度比(即 SMA 在马氏体中的刚度与奥氏体中的刚度之比);  $k_{SMA}$  为 SMA 在奥氏体中的初始刚度;  $x_t$  为 SMA 的位移;  $z_s$  为迟滞位移,由下式给出:

$$z_s = \left\{ 1 - \text{sign}[\text{sign}(|x_t| - a) + 1] \right\} x_t + \frac{[\text{sign}(|x_t| - a) + 1]}{2} \cdot \left\{ \frac{[\text{sign}(x_t) + \text{sign}(\dot{x}_t)]}{2} (b - a) + a \cdot \text{sign}(x_t) \right\} \quad (2)$$

式中  $a$  和  $b$  分别为奥氏体相变的弹性极限和触发马氏体相变的位移极限;  $\text{sign}(x)$  表示符号函数,由如下公式确定:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

采用随机等效线性化方法,将式(2)中的非线性项  $z_s$  替换为等效线性化形式  $z_{eq}$ ,则 Yan 等<sup>[18]</sup>本构关

系的随机线性化形式为:

$$z_{eq} = k_{eq} x_t + c_{eq} \dot{x}_t \quad (4)$$

式中  $k_{eq}$  和  $c_{eq}$  为等效线性系数。

使实际非线性  $z_s$  与等效线性化  $z_{eq}$  之间的均方误差最小化:

$$\frac{\partial E[(z_{eq} - z_s)^2]}{\partial c_{eq}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial E[(z_{eq} - z_s)^2]}{\partial k_{eq}} = 0 \quad (6)$$

式中  $E$  表示期望算子。

求解式(5)和(6),  $k_{eq}$  和  $c_{eq}$  可以分别表示为:

$$c_{eq} = \frac{E[\dot{x}_t \cdot z_s]}{E[\dot{x}_t^2]} \quad (7)$$

$$k_{eq} = \frac{E[x_t \cdot z_s]}{E[x_t^2]} \quad (8)$$

将式(2)分别代入式(7)和(8)可得:

$$c_{eq} = \frac{b - a}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}_t}} \left[ 1 - \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}_t}}\right) \right] \quad (9)$$

$$k_{eq} = \frac{a + b}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_t}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_{x_t}^2}\right) \quad (10)$$

式中  $\sigma_{x_t}$  和  $\sigma_{\dot{x}_t}$  分别为  $x_t$  和  $\dot{x}_t$  的均方根值;  $\text{erf}(x)$  为误差函数。

将式(4)代入式(1),SMA 恢复力的等效形式为:

$$F_{SMA} = \varphi k_{SMA} x_t + (1 - \varphi) k_{SMA} (k_{eq} x_t + c_{eq} \dot{x}_t) \quad (11)$$

SMA 的随机等效阻尼、刚度和恢复力可分别表示为:

$$\begin{cases} \tilde{c}_e = (1 - \varphi) k_{SMA} c_{eq} \\ \tilde{k}_e = \varphi k_{SMA} + (1 - \varphi) k_{SMA} k_{eq} \\ F_{SMA} = \tilde{c}_e \dot{x}_t + \tilde{k}_e x_t \end{cases} \quad (12)$$

### 1.2 惯容器

惯容器是 SMAI 系统的重要组成部分,是一种两端点元件,其输出力与两端的相对加速度成正比。惯容元件的两个端点的相对加速度可以通过改变内部组件的运动形式来实现,如平动-转动转换<sup>[11]</sup>的改变等方式。其物理实现形式以平动-转动转换装置最为多见,此类惯容又称机械式惯容。机械式惯容的惯容系数本质上是转动惯量进行等效平动化的宏观参数。目前常见的机械式惯容器类型是齿条齿轮机构。图 2 所示为齿条齿轮飞轮装置,该系统由两个半径为  $R_i$  和质量为  $m_i$  ( $i=1,2$ ) 的飞轮组成,可自由旋转,通过小齿轮机构连接到直线齿条。

假设惯容器两端的相对加速度为  $\ddot{x}_m$  (如图 3 所示),惯容器的反力  $F_{in}$  可表示为<sup>[8]</sup>:

$$F_{in} = m_{in} \ddot{x}_m \quad (13)$$

式中  $m_{in}$  为惯容器的表观质量(或称为惯性系数)。

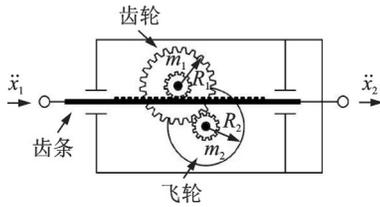


图 2 惯容器物理实现模型

Fig. 2 Physical implementation model of inerter

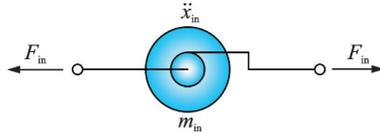


图 3 惯容器力学模型

Fig. 3 Mechanical model of inerter

1.3 SMAI 系统

目前形状记忆合金阻尼器存在 SMA 变形量小或 SMA 利用率低的缺点,并不能充分发挥 SMA 的潜在性能,所以考虑将 SMA 与惯容器相结合,利用惯容器的负刚度效应实现 SMA 有效变形的放大,起到耗能增效的作用,以进一步抑制结构响应。为更好地利用惯容器实现结构减振的目的,通常惯容器需要有耗能元件的配合。SMA 拥有超弹性特性和高阻尼特性,是理想的耗能元件,所以考虑将 SMA 与惯容器协同工作组成 SMAI 系统,该系统是有效可行的耗能减振装置。SMAI 系统的力学模型如图 4(b)中红色虚线框所示。

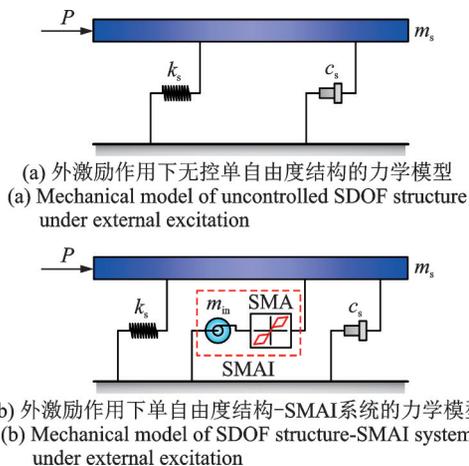


图 4 外激励作用下无控单自由度结构的力学模型及外激励作用下单自由度结构-SMAI 系统的力学模型

Fig. 4 Mechanical model of uncontrolled SDOF structure under external excitation and mechanical model of SDOF structure-SMAI system under external excitation

黏滞阻尼器是目前工程中常用的耗能减振装置,但是存在价格偏高、密封性不佳及耐久性差等问题,特别是内部材料处于压缩状态时会产生动态刚度而影响其性能,并且在工程应用中也常常面临着

诸如老化、可靠性差、维护成本高等问题,这些都会影响其减振性能并增加后期维护成本<sup>[19-21]</sup>。而 SMAI 系统中惯容的耗能增效特性会提高其耗能效率,并且 SMA 具有抗疲劳、高耐久性等优点<sup>[3-4]</sup>。因此在工程抗震、抗风领域中,SMAI 系统相较于黏滞阻尼器将具备更优的减振控制性能和更低的后期维护成本。

1.4 结构-SMAI 系统的动力方程

在外激励作用下结构-SMAI 系统的力学模型如图 4(b)所示。SMAI 系统由惯容器和 SMA 两部分组成。外激励作用下结构-SMAI 系统的运动微分方程为:

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s + F_{in} = P(t) \\ F_{SMA} = F_{in} \end{cases} \quad (14)$$

式中  $m_s, c_s$  和  $k_s$  分别为结构的质量、阻尼和刚度; $x_s$  为结构相对于地面的位移; $F_{in}$  为惯容器的反力; $P(t)$  为一随机激励。

由式(12)可知,SMA 的恢复力包括  $\tilde{c}_e \dot{x}_i$  和  $\tilde{k}_e x_i$  两项。通过等效线性化方法,可以将图 4(b)中的 SMAI 系统等效为图 5 所示的简化形式,其中 SMA 由支撑弹簧  $\tilde{k}_e$  和耗能单元  $\tilde{c}_e$  代替。

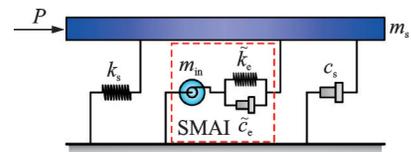


图 5 结构-SMAI 的简化形式

Fig. 5 Simplified form of structure-SMAI

在外激励下结构-SMAI 系统的运动微分方程可重新整理为:

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s + m_{in} \ddot{x}_{in} = P(t) \\ \tilde{c}_e (\dot{x}_s - \dot{x}_{in}) + \tilde{k}_e (x_s - x_{in}) = m_{in} \ddot{x}_{in} \end{cases} \quad (15)$$

引入变量:

$$\begin{cases} \omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}, \zeta_s = \frac{c_s}{2m_s \omega_s} \\ \beta = \frac{m_{in}}{m_s}, \xi(t) = \frac{P(t)}{m_s} \\ F_0 = \frac{F_{ys}}{m_{in} g}, k_{SMA} = \frac{F_0 m_{in} g}{u_{yt}} \end{cases} \quad (16)$$

式中  $\omega_s$  为结构固有频率; $\zeta_s$  为结构阻尼比; $\beta$  为惯容质量比; $\xi(t)$  为功率谱密度为恒定  $S_0$  的理想白噪声; $F_0$  为 SMA 弹簧的归一化转换强度; $F_{ys}$  为转换强度; $u_{yt}$  为触发 SMA 正向相变的位移。

将上述变量代入式(15)可得:

$$\begin{cases} \ddot{x}_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + \frac{\tilde{c}_e}{m_s} \dot{x}_s + \omega_s^2 x_s + \\ \frac{\tilde{k}_e}{m_s} x_s - \frac{\tilde{c}_e}{m_s} \dot{x}_{in} - \frac{\tilde{k}_e}{m_s} x_{in} = \xi(t) \\ \frac{\tilde{c}_e}{\beta m_s} \dot{x}_s - \frac{\tilde{k}_e}{\beta m_s} x_s - \ddot{x}_{in} - \\ \frac{\tilde{c}_e}{\beta m_s} \dot{x}_{in} - \frac{\tilde{k}_e}{\beta m_s} x_{in} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

对结构-SMAI系统的位移、速度、加速度响应以及外激励进行拉普拉斯变换:

$$\begin{aligned} X_s(s) &= L[x_s(t)], sX_s(s) = L[\dot{x}_s(t)], \\ s^2 X_s(s) &= L[\ddot{x}_s(t)]; \\ X_{in}(s) &= L[x_{in}(t)], sX_{in}(s) = L[\dot{x}_{in}(t)], \\ s^2 X_{in}(s) &= L[\ddot{x}_{in}(t)]; \\ F(s) &= L[\xi(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

运用上面的拉普拉斯变换算子对式(17)进行拉普拉斯变换得:

$$\begin{cases} [s^2 + (2\zeta_s \omega_s + \frac{\tilde{c}_e}{m_s})s + \omega_s^2 + \frac{\tilde{k}_e}{m_s}] X_s + \\ (-\frac{\tilde{c}_e}{m_s} s - \frac{\tilde{k}_e}{m_s}) X_{in} = F \\ (-\frac{\tilde{c}_e}{\beta m_s} s - \frac{\tilde{k}_e}{\beta m_s}) X_s + \\ (s^2 + \frac{\tilde{c}_e}{\beta m_s} s + \frac{\tilde{k}_e}{\beta m_s}) X_{in} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

推导出结构-SMAI系统中结构和惯容器的相对位移传递函数分别为:

$$\begin{aligned} H_s(i\omega) &= \frac{X_s(s)}{F} \Big|_{s=i\omega}, \\ H_{in}(i\omega) &= \frac{X_{in}(s)}{F} \Big|_{s=i\omega} \end{aligned} \quad (20)$$

根据随机振动理论<sup>[17]</sup>得到确定性线性系统的输出功率谱 $S_{X_p}(\omega)$ 为:

$$S_{X_p}(\omega) = |H_p(i\omega)|^2 S_F(\omega) \quad (21)$$

式中 输入功率谱为白噪声谱,即 $S_F(\omega) = S_0$ ,其中 $S_0$ 为白噪声功率谱密度。

使用式(20)和(21),结构-SMAI系统的位移方差可表示为:

$$\sigma_{x_p}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{X_p}(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_p(i\omega)|^2 d\omega$$

结构的响应可表示为:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_p(i\omega)|^2 d\omega, p = s, in \quad (22)$$

式(22)可以表示为<sup>[16]</sup>:

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Xi_m(\omega)}{\Lambda_m(-i\omega)\Lambda_m(i\omega)} d\omega \quad (23)$$

式(23)的积分表达式定义为:

$$\begin{aligned} \Xi_m &= \Delta_{m-1}\omega^{2m-2} + \Delta_{m-2}\omega^{2m-4} + \dots + \Delta_0, \\ \Lambda_m &= \Phi_m(i\omega)^m + \Phi_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + \Phi_0 \end{aligned} \quad (24)$$

结构-SMAI系统的频响函数绝对值平方可以表示为:

$$\begin{aligned} |H_s(i\omega)|^2 &= \\ & \frac{\Delta_3\omega^6 + \Delta_2\omega^4 + \Delta_1\omega^2 + \Delta_0}{\Phi_4\omega^4 - i\Phi_3\omega^3 - \Phi_2\omega^2 + i\Phi_1\omega + \Phi_0} \times \\ & \frac{1}{\Phi_4\omega^4 + i\Phi_3\omega^3 - \Phi_2\omega^2 - i\Phi_1\omega + \Phi_0} \end{aligned} \quad (25)$$

比较式(25)与(24),可知 $m$ 的值为4,式(25)分子和分母中的系数可由下式求解出:

引入变量:

$$\begin{cases} A_1 = 2\zeta_s \omega_s + \frac{\tilde{c}_e}{m_s}, A_2 = \omega_s^2 + \frac{\tilde{k}_e}{m_s} \\ A_3 = -\frac{\tilde{c}_e}{m_s}, A_4 = -\frac{\tilde{k}_e}{m_s} \\ B_1 = -\frac{\tilde{c}_e}{\beta m_s}, B_2 = -\frac{\tilde{k}_e}{\beta m_s} \\ B_3 = \frac{\tilde{c}_e}{\beta m_s}, B_4 = \frac{\tilde{k}_e}{\beta m_s} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} B'_1 = A_1 + B_3 \\ B'_2 = A_2 + B_4 + A_1 B_3 - A_3 B_1 \\ B'_3 = A_1 B_4 + A_2 B_3 - A_3 B_2 - A_4 B_1 \\ B'_4 = A_2 B_4 - A_4 B_2 \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \Delta_0 = B'_4, \Delta_1 = -2B_4 + B'_3 \\ \Delta_2 = 1, \Delta_3 = 0 \\ \Phi_0 = B'_1, \Phi_1 = B'_3 \\ \Phi_2 = B'_2, \Phi_3 = B'_1, \Phi_4 = 1 \end{cases} \quad (28)$$

在功率谱密度为 $S_0$ 的白噪声激励作用下,结构-SMAI系统的位移方差可表示为<sup>[18]</sup>:

$$\sigma_{x_s}^2 = I_4 S_0 \quad (29)$$

式中:

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_1 & \Delta_0 \\ -\Phi_4 & \Phi_2 & -\Phi_0 & 0 \\ 0 & -\Phi_3 & \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_4 & -\Phi_2 & \Phi_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_3 & -\Phi_1 & \Phi_0 & 0 \\ -\Phi_4 & \Phi_2 & -\Phi_0 & 0 \\ 0 & -\Phi_3 & \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_4 & -\Phi_2 & \Phi_0 \end{vmatrix}} \frac{\pi}{\Phi_4} \quad (30)$$

## 2 结构-SMAI系统的参数分析

为了能够研究 SMAI 系统内不同设计参数对其

减振控制性能的影响,对结构-SMAI系统进行相应的参数分析。这里参数分析所用的量化指标 $\gamma_{xs}$ (即位移响应减振比)定义为:结构-SMAI系统与无控结构的均方位移之比。 $\gamma_{xs}$ 比值越小,代表SMAI的控制性能越好。

参数分析所考虑的结构参数和相关参数范围如下:

结构参数: $\omega_s=0.5$  Hz, $\zeta_s=1\%$ , $m_s=25000$  kg; SMAI系统的设计参数考虑为<sup>[16-17]</sup>: $\varphi\in[0.01,0.1]$ , $F_0\in[0.1,0.5]$ , $\beta\in[0.05,0.1,0.2]$ ; SMA参数: $a=0.005$  m, $b=0.02$  m, $u_{yt}=0.02$  m。

图6为白噪声功率谱密度 $S_0=0.01$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>和不同惯容质量比 $\beta$ 下结构-SMAI系统的 $\gamma_{xs}$ 等值线图,其

中不同的颜色区域代表不同的位移响应减振比 $\gamma_{xs}$ 。图6中的冷色区(紫色和蓝色)代表参数组合为最有利的区域,而暖色区(红色、黄色和橙色)代表参数组合为最不利的区域。

对图6~8进行综合分析,可以得出以下结论:

(1)  $\gamma_{xs}$ 对 $\varphi$ 相对不敏感,而对 $F_0$ 较为敏感;

(2) 在相同功率谱密度的白噪声激励下,随着 $\beta$ 增大,参数组合的有利区域显著向左移动(即对 $F_0$ 的需求值逐渐降低);

(3) 不同 $S_0$ 条件下的 $\gamma_{xs}$ 变化趋势大致相同;

(4) 随着 $S_0$ 增加,在相同 $\beta$ 下,参数组合的有利区域呈右移趋势,即随着 $S_0$ 增加,对 $F_0$ 值的需求逐渐增加。

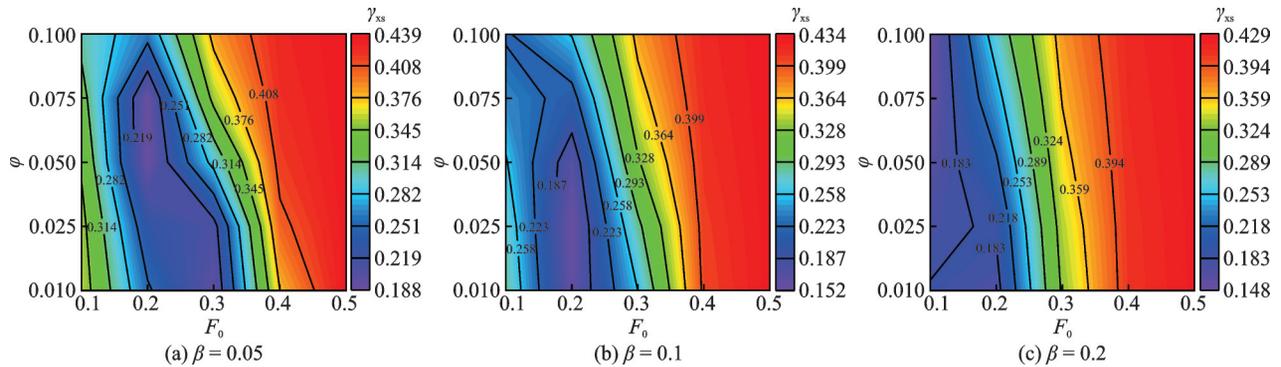


图6  $S_0=0.01$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>和不同 $\beta$ 值下结构-SMAI系统的 $\gamma_{xs}$ 等值线图

Fig. 6 Contour plots of  $\gamma_{xs}$  of structure-SMAI system under  $S_0=0.01$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup> and different values of  $\beta$

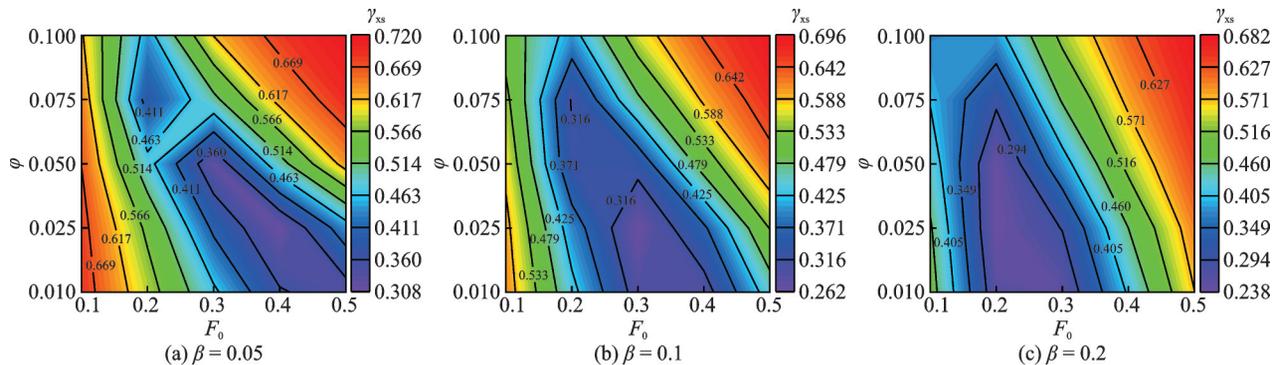


图7  $S_0=0.03$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>和不同 $\beta$ 值下结构-SMAI系统的 $\gamma_{xs}$ 等值线图

Fig. 7 Contour plots of  $\gamma_{xs}$  of structure-SMAI system under  $S_0=0.03$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup> and different values of  $\beta$

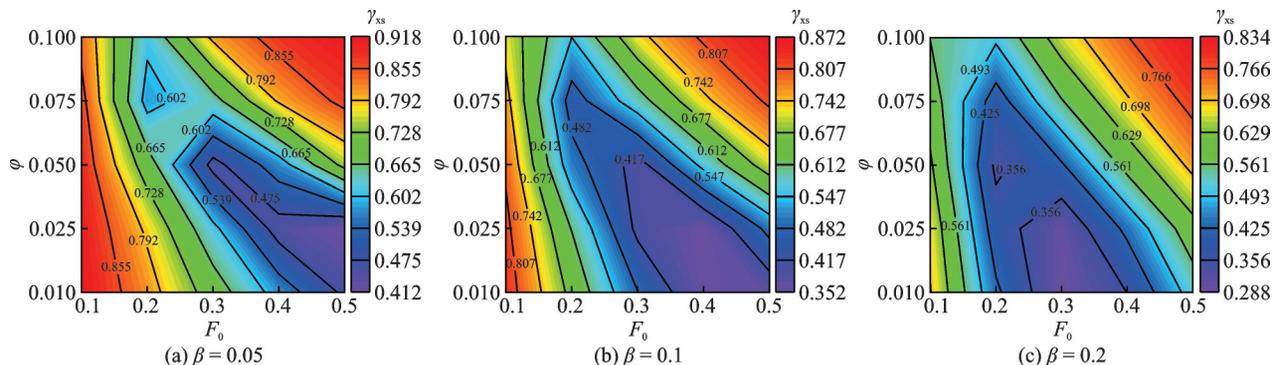


图8  $S_0=0.05$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>和不同 $\beta$ 值下结构-SMAI系统的 $\gamma_{xs}$ 等值线图

Fig. 8 Contour plots of  $\gamma_{xs}$  of structure-SMAI system under  $S_0=0.05$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup> and different values of  $\beta$

### 3 SMAI系统的优化

#### 3.1 优化准则

本节研究的重点是通过减小结构位移响应来保护结构的完整性和安全性,因而目标函数定义为:装配有结构-SMAI系统的无量纲位移均方差。目标函数可以度量 SMAI系统的控制性能,通过使结构的无量纲位移均方差最小化可以得到 SMAI系统相应的最优参数,所以 SMAI系统的优化准则为<sup>[16]</sup>:

$$\min_{\varphi, F_0} R_s = \min \sigma_{x_s}(\varphi, F_0), \quad \text{s.t. } L_{lb} \leq L \leq L_{ub} \quad (31)$$

式中  $L=[\varphi, F_0]$ ,  $L_{lb}$  为参数取值的下界,  $L_{ub}$  为参数取值的上界。一般来说,  $\min R_s$  值越小, 结构位移控制的有效性越高。

#### 3.2 迭代优化流程

由于 SMA 的等效线性阻尼  $\tilde{c}_e$  和刚度  $\tilde{k}_e$  是 SMA 位移响应均方差  $\sigma_{x_s}$  和速度响应均方差  $\sigma_{\dot{x}_s}$  的函数,使得输入和输出之间呈隐式关系,需要采用迭代来计算位移响应的均方差。开始迭代时,首先假设设计参数的初始值,然后计算  $\sigma_{x_s}$  和  $\sigma_{\dot{x}_s}$  值,在每个迭代中重新计算  $\tilde{c}_e$  和  $\tilde{k}_e$ 。这个过程重复进行,直至达到设定的收敛目标(即连续两次迭代产生大致相等的  $\tilde{c}_e$  和  $\tilde{k}_e$  值)。图 9 给出了通过迭代优化计算结构-SMAI系统位移均方差的流程图。根据结构-SMAI系统优化准则和迭代优化流程,使用粒子群优化算法可以得到 SMAI系统的最优设计参数。表 1 给出了不同功率谱密度  $S_0$  下 SMAI系统的最优参数。

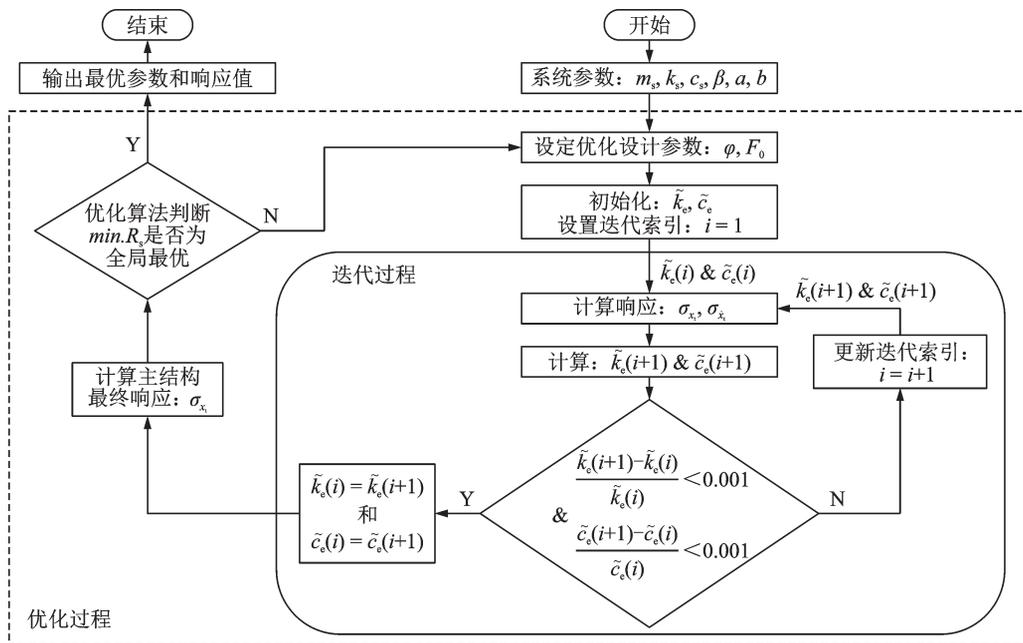


图 9 通过迭代优化计算设置结构-SMAI系统位移均方差的流程图

Fig. 9 Flowchart of the mean square deviation calculation of displacement of the structure with SMAI system through iteration optimization

表 1 不同功率谱密度  $S_0$  下 SMAI 系统的最优设计参数

Tab. 1 Optimal design parameters of the SMAI system with different values of power spectral density  $S_0$

$\beta$ 值	$S_0=0.01 \text{ m}^2/\text{s}^3$		$S_0=0.03 \text{ m}^2/\text{s}^3$		$S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$	
	$\varphi$	$F_0$	$\varphi$	$F_0$	$\varphi$	$F_0$
$\beta=0.05$	0.0530	0.2166	0.0317	0.3641	0.0248	0.4658
$\beta=0.1$	0.0422	0.1818	0.0254	0.3061	0.0199	0.3924
$\beta=0.2$	0.0181	0.1466	0.0114	0.2485	0.0091	0.3189
$\beta=0.3$	0.0010	0.1240	0.0010	0.2116	0.0010	0.2718
$\beta=0.4$	0.0010	0.01046	0.0010	0.1784	0.0010	0.2289
$\beta=0.5$	0.0010	0.0911	0.0010	0.1552	0.0010	0.1992

### 3.3 结构位移响应控制性能

图 10 为  $S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$  时, 设置不同控制系统结构  $\min.R_s$  随惯容质量比  $\beta$  的变化趋势。如图 10 所示, 随着  $\beta$  增大, 各结构  $\min.R_s$  都呈下降趋势, TID 与 SMAI 系统的控制有效性接近但都优于传统的 SMA 阻尼器 (SMA 参数值与不同  $\beta$  情况下 SMAI 系统中的 SMA 参数值相同), 同时随着  $\beta$  的增大, SMAI 系统的控制有效性逐渐提高, 但其控制有效性的提升效率逐渐降低; 当  $\beta > 0.4$  时, 其控制效率的提升并不显著 (即其控制效率的提升将趋于饱和)。

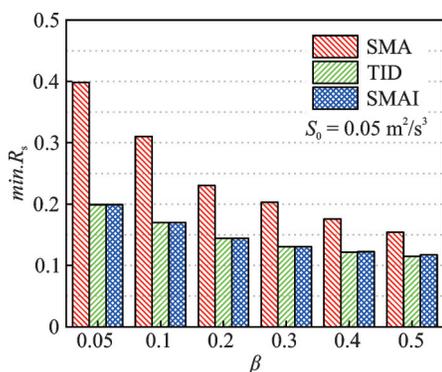


图 10 在  $S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$  时不同控制系统结构  $\min.R_s$  随  $\beta$  的变化趋势

Fig. 10 Variation trends of  $\min.R_s$  of different control systems with  $\beta$  under  $S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$

图 11 为  $S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$  时, SMAI 和 TID 系统的最优阻尼值随  $\beta$  的变化趋势。从图 11 中可以看出, 随着  $\beta$  增大, TID 与 SMAI 系统的最优阻尼值都呈递增趋势, 但 SMAI 系统最优等效阻尼系数小于 TID 系统阻尼系数, 且在大  $\beta$  下尤为明显。对图 10 和 11 综合分析可知, 随着  $\beta$  增大, SMAI 系统可以在

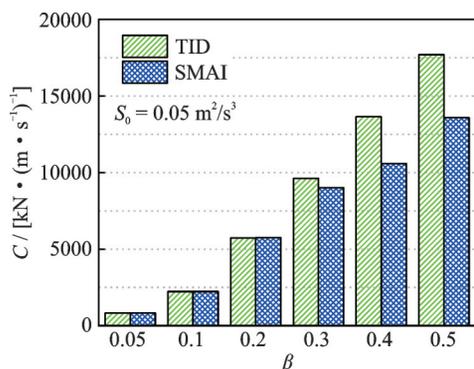


图 11 在  $S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$  时 TID 和 SMAI 系统最优阻尼系数随  $\beta$  的变化趋势

Fig. 11 Variation trends of the optimal damping coefficients of the TID and SMAI systems with  $\beta$  under  $S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$

阻尼值相对较低的情况下取得与 TID 系统相近的控制性能。

### 3.4 结构频率响应行为

图 12 为无控和 SMA, TMDI, TID 和 SMAI 系统控制下结构的位移频响曲线。如图 12 所示, 随着总惯容质量比增大, 不同控制系统下结构的位移频响曲线峰值都呈下降趋势, 其中设置 TMDI, TID 与 SMAI 系统结构频率响应曲线的峰值比较接近, 但都小于设置 SMA 结构的频率响应峰值。与 TMDI 系统相比, TID 和 SMAI 系统都无需附加质量块。

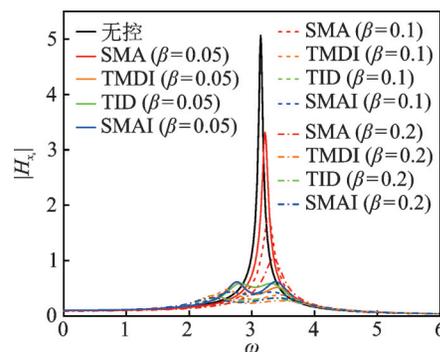


图 12 无控, SMA, TMDI, TID 和 SMAI 系统控制下结构位移频响曲线

Fig. 12 Displacement frequency response curves of structures without control or under SMA, TMDI, TID and SMAI system control

此外在大惯容质量比  $\beta$  情况下分别设置 TID 和 SMAI 系统结构的位移频响曲线的峰值也比较接近, 并且他们的频响曲线峰值都小于设置 SMA 结构的位移频率响应峰值。

## 4 结构-SMAI 系统的时域分析

### 4.1 白噪声模拟时程

为了在时域内验证 SMAI 系统的控制性能, 将  $S_0=0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$  的白噪声信号由 MATLAB 自编程序随机生成, 将白噪声信号以激励力的形式作用于结构-SMAI 系统上。本节结构模型参数和前文中取值一致, 并利用在频域内得到的优化参数进行时域验证。结构-SMAI 系统动力学方程的矩阵形式为:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = B_1 f_{\text{SMA}}(t) + E_1 P(t) \quad (32)$$

式中  $M, K, C, B_1, E_1$  为矩阵形式, 具体为:

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_{in} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_{in} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} f_{\text{SMA}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} P(t) \quad (33)$$

式中  $f_{SMA}$  表示非线性 SMA 的恢复力;  $P(t)$  表示激励力。

将单自由度结构-SMAI 系统的动力方程(33)转换成状态空间方程为:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bf_{SMA}(t) + EP(t) \quad (34)$$

其中:

$$z(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}E_1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

将连续时间状态空间方程(35)转换为离散时间状态空间方程:

$$z[k+1] = A_d z[k] + B_d f_{SMA}[k] + E_d P[k] \quad (36)$$

式中  $A_d = e^{A\Delta t}$  为  $4 \times 4$  的离散化系统矩阵; 上标“ $\Delta t$ ”表示时间步长;  $B_d = A^{-1}(A_d - I)B$  为  $4 \times 1$  的离散化非线性恢复力向量;  $E_d = A^{-1}(A_d - I)E$  为  $4 \times 1$  的离散化荷载向量。

对于非线性 SMA 来说, 离散化非线性恢复力  $f_{SMA}[k]$  定义为:

$$f_{SMA}[k] = \varphi k_{SMA} D_1 z[k] + (1 - \varphi) k_{SMA} z_s[k],$$

$$z_s[k] = \left\{ 1 - \text{sign}[\text{sign}(D_1 z[k] - a) + 1] \right\} \cdot$$

$$D_1 z[k] + \frac{\text{sign}(D_1 z[k] - a) + 1}{2} \cdot$$

$$\left\{ \frac{\text{sign}(D_1 z[k] + \text{sign}(G_1 z[k]))}{2} (b - a) + a \cdot \text{sign}(D_1 z[k]) \right\} \quad (37)$$

式中  $D_1 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$  为连接 SMA 的相对位移输出向量;  $G_1 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]$  为连接 SMA 的相对速度输出向量。

相较于惯容质量比  $\beta$  取值为 0.4,  $\beta$  取 0.5 时的 SMAI 系统控制有效性的提升效率并不十分显著, 所以综合考虑控制有效性和阻尼需求, 这里  $\beta$  的取值为 0.4。图 13 给出了  $S_0 = 0.05 \text{ m}^2/\text{s}^3$  时无控和分别设置 SMA, TID, SMAI 系统结构的位移时程曲线。从图 13 中可以看出: 在惯容质量比  $\beta = 0.4$  的情况下, SMA, TID 和 SMAI 系统都能有效地减小结构位移响应; 与 SMA 相比, TID 和 SMAI 系统的控制效果更佳, 不过此时 SMAI 系统的等效阻尼系数约为 TID 阻尼系数的 3/4。

图 14 展示了 TID 和 SMAI 系统中惯容器的位移时程曲线。由图 14 可以看出, SMAI 系统中惯容器的位移峰值小于 TID 系统中惯容器的位移峰值 (这时 SMAI 系统中惯容器位移峰值为 0.604 m 左右, 而 TID 系统中惯容器位移峰值为 0.662 m 左右)。

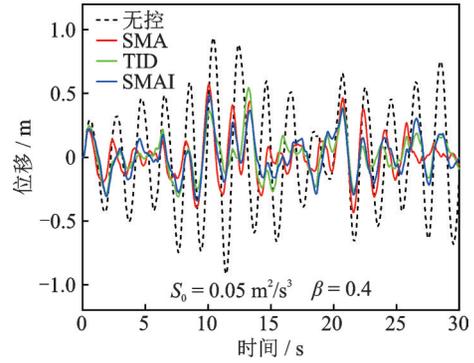


图 13 白噪声激励下无控和分别设置 SMA, TID, SMAI 系统结构的位移时程曲线

Fig. 13 Displacement time-history curves of structures without control and respectively with SMA, TID, SMAI systems under white noise excitation

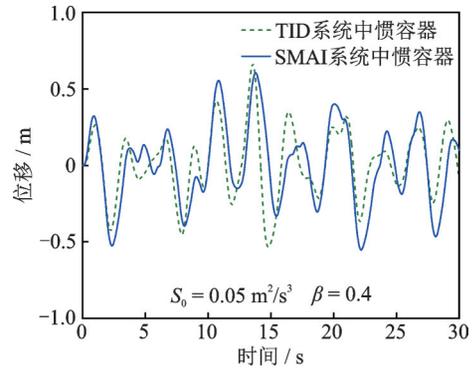


图 14 白噪声激励下 TID 和 SMAI 系统中惯容器的位移时程曲线

Fig. 14 Displacement time-history curves of inerters of TID and SMAI systems under white noise excitation

图 15 为上述白噪声激励下 SMA 的力-位移曲线。从图 15 中可以看出, SMAI 系统中 SMA 位移明显大于传统 SMA 的位移 (传统 SMA 的最大位移约为 0.57 m, 而 SMAI 系统中 SMA 的最大位移约为 0.72 m)。在惯容质量比  $\beta = 0.4$  的情况下, SMAI 系统中 SMA 滞回位移的最大值与滞回曲线面积都大于传统 SMA 的相应值, 且 TID 系统中惯容器的最

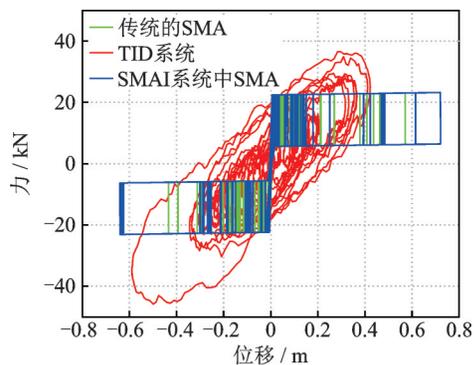


图 15 白噪声激励下 SMA 的力-位移曲线

Fig. 15 Force-displacement curves of SMA under white noise excitation

大出力为 46 kN 左右, SMAI 系统中惯容器的最大出力为 23 kN 左右, 意味着 SMAI 系统中惯容器对结构的损害更小。

综上所述, 与 TID 系统相比, SMAI 系统中 SMA 与惯容器协同作用可以有效降低惯容器的位移峰值; SMAI 系统中惯容器的最大出力远低于 TID 系统中惯容器的出力, 即 SMAI 系统中惯容器对结构的损害更小; 此外惯容器可以进一步发挥 SMA 的潜力, 通过放大 SMA 位移提高其能量耗散能力。

#### 4.2 脉动风模拟时程

选择一单层结构, 并根据上述的优化设计方法, 给出 SMAI 系统的具体设计参数如下:  $\beta=0.4$ ,  $\varphi=0.001$ ,  $F_0=0.2289$ 。并通过一组模拟的脉动风荷载时程进一步验证 SMAI 系统的控制性能。结构参数为:  $\omega_s=0.5$  Hz,  $\zeta_s=1\%$ ,  $m_s=250$  t, 迎风面积为  $(50 \times 16)$  m<sup>2</sup>。

图 16 展示了一组模拟的脉动风荷载时程。图 17 给出了其在脉动风荷载激励下无控和分别设置 SMA, TID, SMAI 系统结构的位移时程曲线。由图

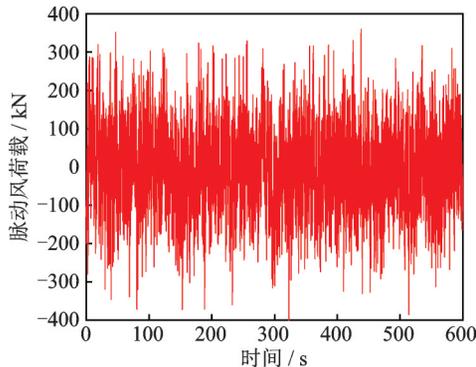


图 16 模拟脉动风荷载时程

Fig. 16 Time-history of simulated fluctuating wind load

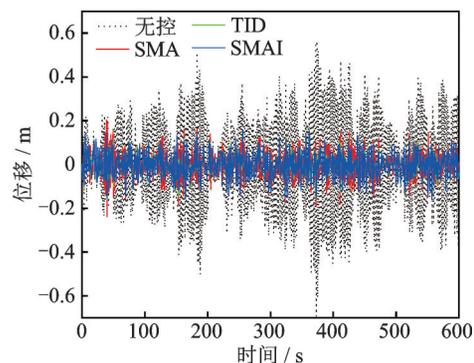


图 17 脉动风荷载激励下无控和分别设置 SMA, TID, SMAI 系统结构的位移时程曲线

Fig. 17 Displacement time-history curves of structures without control and respectively with SMA, TID, SMAI systems under fluctuating wind load

17 可见, SMA, TID 和 SMAI 系统都能有效地减小结构位移响应, 其中, 无控状态下结构位移峰值为 0.695 m 左右, SMA 系统控制下结构位移峰值为 0.239 m 左右, TID 系统控制下结构位移峰值为 0.171 m 左右, SMAI 系统控制下结构位移峰值为 0.159 m 左右。特别值得注意的是, 此时 SMAI 系统中最优等效阻尼系数仅为 TID 系统最优阻尼系数的 5/7 左右。

文章研究的单自由度建筑结构-SMAI 系统, 是为将 SMAI 装置应用在多自由度建筑结构中打下理论基础, 在之后的研究中会在多自由度建筑结构中连接 SMAI 并添加风谱进行验证计算。根据实际工程应用, 应将 SMA 的一端设置在横向位移最大的楼层, 一般是在最顶层与楼板相连, 另一端则与惯容器相连。惯容器的另一端可通过设计足够大的楼板开口连接到建筑结构的下一层或几层的楼板处(单自由度建筑结构-SMAI 系统中, 惯容器一端则直接与地面相连)。形状记忆合金阻尼器、惯容器在建筑结构中协同工作的示意图如图 18 所示。

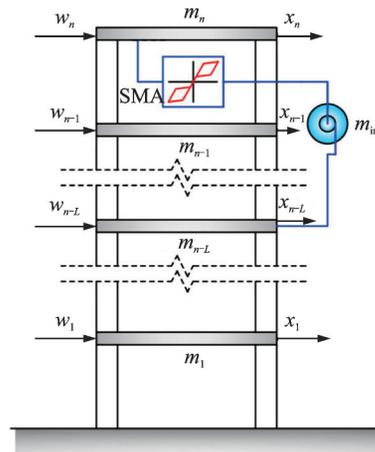


图 18 形状记忆合金阻尼器、惯容器在多自由度建筑结构中协同工作的示意图

Fig. 18 Schematic diagram of cooperative operation of shape memory alloy damper and inerter in multi-degree-of-freedom building structure

图 18 中,  $n$  为基本建筑结构的自由度;  $w_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 表示每一层上的风荷载激励;  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 表示基本建筑结构的第  $i$  层相对于地面的位移;  $m_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 表示基本建筑结构的第  $i$  层的质量; 下标 “ $n-L$ ” 表示惯容器所连接的楼层。

## 5 结 论

本文提出了一种 SMAI 协同系统, 首先在频域内揭示了 SMAI 系统的减振行为, 然后在时域内进

一步验证了 SMAI 系统的控制性能。得出的主要结论如下:

(1) 提出了以结构均方位移响应为控制目标的 SMAI 系统优化设计方法,并通过算例验证了优化设计方法的有效性。

(2) 与传统的 SMA 阻尼器相比, SMAI 系统中惯容器可以显著提高 SMA 的滞回位移,因而提高了其能量耗散能力。

(3) 与 TID 系统相比,在总惯容质量比大于 0.3 时, SMAI 系统的最优等效阻尼系数值明显低于 TID 系统的最优阻尼系数值,并能提供相近的控制有效性;同时, SMAI 系统中的惯容器出力明显低于 TID 系统中的惯容器出力,这意味着 SMAI 系统中惯容器对结构损伤更小。这些优势使得 SMAI 系统在实际工程中具有极佳的应用前景。

本文在频域和时域内对单自由度结构-SMAI 系统的控制性能进行了系统研究。接下来的研究工作将是使用平稳和非平稳脉动风速谱对多自由度结构-SMAI 系统的风致振动控制性能及设计方法进行研究。

#### 参考文献:

- [1] Housner G W, Bergman L A, Caughey T K. Structural control: past, present, and future[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123(9): 897-971.
- [2] Wang N M, Adeli H. Robust vibration control of wind-excited highrise building structures[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2015, 21(8): 967-976.
- [3] Li T, Zhou M Y, Qiu C X, et al. A shape memory alloy-tuned mass damper and its application to transmission tower-line system under seismic excitation[J]. Structural Engineering & Mechanics, 2020, 74(1): 129-143.
- [4] Huang H Y, Chang W S. Application of pre-stressed SMA-based tuned mass damper to a timber floor system[J]. Engineering Structures, 2018, 167: 143-150.
- [5] Shi Y F, Qian H, Kang L P, et al. Cyclic behavior of superelastic SMA cable and its application in an innovative self-centering BRB[J]. Smart Materials and Structures, 2021, 30(9): 095019.
- [6] 谭平, 李森萍, 刘良坤, 等. 基于 SMA-压电阻尼器的巨-子结构智能控制[J]. 自然灾害学报, 2015, 24(4): 78-85.  
Tan Ping, Li Senping, Liu Liangkun, et al. Smart control of mega-sub structure based on SMA-piezoelectric damper[J]. Journal of Natural Disasters, 2015, 24(4): 78-85.
- [7] 李祥秀, 李小军, 刘爱文, 等. 巨-子结构智能隔震体系抗震性能研究[J]. 震灾防御技术, 2017, 12(1): 157-165.  
Li Xiangxiu, Li Xiaojun, Liu Aiwen, et al. Study on seismic performance of smart mega-sub isolation system[J]. Technology for Earthquake Disaster Prevention, 2017, 12(1): 157-165.
- [8] 展猛, 王社良, 赵云. 干式空心电抗器模型结构减震控制试验及数值分析[J]. 振动工程学报, 2020, 33(1): 179-187.  
Zhan Meng, Wang Sheliang, Zhao Yun. Vibration control test and numerical analysis for dry-type air core reactor model structure[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(1): 179-187.
- [9] 钱辉, 李宏男, 郜新军. 偏心结构自复位复合摩擦阻尼器平扭耦联震动控制振动台试验研究[J]. 土木工程学报, 2016, 49(增刊1): 125-130.  
Qian Hui, Li Hongnan, Gao Xinjun. Shaking table tests on eccentric structure with re-centering hybrid friction damper for horizontal-torsional coupled seismic response mitigation[J]. China Civil Engineering Journal, 2016, 49(Sup1): 125-130.
- [10] Smith M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1648-1662.
- [11] Ikago K, Saito K, Inoue N. Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2012, 41(3): 453-474.
- [12] Lazar I F, Neild S A, Wagg D J. Using an inerter-based device for structural vibration suppression[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2014, 43(8): 1129-1147.
- [13] Marian L, Giaralis A. Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2014, 38: 156-164.
- [14] Cao L Y, Li C X. Tuned tandem mass dampers-inerters with broadband high effectiveness for structures under white noise base excitations[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2019, 26(4): e2319.
- [15] Zhang Z H, Zhang J S, Wang L, et al. A novel lever-based-inerter-enhanced self-centering damping system to retrofit double-column bridge bent[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, 151: 107003.
- [16] Tiwari N D, Gogoi A, Hazra B, et al. A shape memory alloy-tuned mass damper inerter system for passive control of linked-SDOF structural systems under seismic excitation[J]. Journal of Sound and Vibration,

- 2021, 494: 115893.
- [17] Zhang R F, Jiang J L, Jia Y Q, et al. Influence of mechanical layout of shape memory alloy damping inerter (SDI) systems for vibration control[J]. *Smart Materials and Structures*, 2021, 30(8): 085021.
- [18] YAN X, NIE J. Response of SMA superplastic systems under random excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 238(5): 893-901.
- [19] Roberts J B, Spanos P D. *Random Vibration and Statistical Linearization*[M]. New York: Dover Publications, 2003.
- [20] Newland D E. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*[M]. 3rd ed. New York: Dover Publications, 2012.
- [21] Li R, Ge H B, Shu G P. Parametric study on seismic control design of a new type of SMA damper installed in a frame-type bridge pier[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2018, 31(2): 04017100.

## Control performance of structure-shape memory alloy inerter collaborative system

SUN Xiao-dong, CAO Li-yuan, LI Chun-xiang, MA Ru-wei

(Department of Civil Engineering, School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** Based on the synergistic effect of the shape memory alloy (SMA) and inerter, a novel shape memory alloy-inerter (SMAI) cooperative system has been proposed for higher effectiveness, better robustness and wider engineering application. The closed-form expressions for calculating the displacement variances under random Gaussian white noise base excitations are thereupon derived from the dynamics equations of the structure-SMAI system established by resorting to the equivalent linearization method, and then the optimization criterion is determined. By means of iterative optimization process, the optimization analysis for the structure-SMAI system is performed in frequency domain, and then the design parameters of the SMAI for engineering application are suggested. Results demonstrate that the SMAI has a better effectiveness of alleviating vibration than the SMA, and a notably small damping demand than the tuned inerter damper (TID) after mass ratio of the inerter exceeding 0.3. To further verifying the above results, a time domain analysis of the structure-SMAI system is carried out using simulated white noise and fluctuating wind speed time histories. In addition, it is found that the out force of the inerter in the SMAI is markedly decreased, thus conducive to reducing the damage for the structure from the inerter device. Therefore, the SMAI system has the prospect for engineering application.

**Key words:** vibration control; shape memory alloy; inerter; white noise; stochastic equivalent linearization

**作者简介:** 孙晓东(1995—),男,硕士研究生。E-mail:1244304992@qq.com。

**通讯作者:** 曹黎媛(1991—),女,博士,讲师。E-mail:caoly@shu.edu.cn。