

# 考虑齿距累积误差的圆柱齿轮动态磨损分析

皇甫一樊<sup>1</sup>, 董兴建<sup>1</sup>, 彭志科<sup>1</sup>, 刘冰<sup>2</sup>, 龙新华<sup>1</sup>

(1. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240; 2. 上海航天控制技术研究所 上海 201109)

**摘要:** 齿距累积误差是齿轮传动系统中广泛存在的一种制造误差。考虑齿距累积误差, 基于轮齿承载接触分析方法建立载荷分配模型, 从而得到啮合刚度和空载传递误差, 并将其导入齿轮转子动力学模型中计算系统振动响应。基于所得到的动态载荷和 Archard 磨损理论, 建立齿轮动态磨损预测模型。分析了齿距累积误差对啮合特性、响应特性以及磨损分布的影响。结果表明, 齿距累积误差会引发齿间载荷分配和齿间磨损的不均匀性, 导致振动响应中出现轴频、追逐齿频率和组合状态频率等频率成分; 轻微磨损有助于缓解齿间载荷分配不均, 但剧烈的磨损会恶化均载特性, 导致振动加剧; 采用追逐齿设计可以使磨损不均匀性系数降低约 30%。研究结果可为齿轮磨损机理研究和齿轮参数设计提供理论依据。

**关键词:** 齿轮动力学; 齿距累积误差; 振动特性; 磨损; 追逐齿

**中图分类号:** TH113.1; TH132.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)06-1706-08

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.06.025

## 引言

齿轮传动系统在工业中的应用非常广泛, 齿轮传动的啮合及动力学特性关系到整台设备的平稳性和可靠性。工程中大量存在的制造、安装误差会引起齿面接触状态的变化, 从而影响齿面损伤(如剥落<sup>[1]</sup>、磨损<sup>[2]</sup>和胶合)的发展, 进一步影响齿轮系统的动力学行为。大量研究聚焦于制造误差或齿面损伤对齿轮的啮合特性和响应特性的影响规律。

齿距累积误差是一种常见的齿轮制造误差, 国内外许多学者分析了齿距误差对系统动态特性的影响<sup>[3-7]</sup>。王奇斌等<sup>[5]</sup>研究了齿距偏差对直齿轮转子系统动力学特性的影响, 结果表明齿距偏差会使啮合频率附近出现边带频。基于轮齿承载接触分析方法, Yuan 等<sup>[6]</sup>建立了考虑齿距累积误差的斜齿轮动力学模型, 并将其推广到人字齿轮<sup>[7]</sup>。

在齿轮运转过程中, 齿面不可避免地发生磨损。对于磨损的研究主要可以分为准静态假设<sup>[8-9]</sup>和动态假设<sup>[10-12]</sup>。基于 Archard 磨损模型, 张俊等<sup>[8]</sup>建立了准静态条件下的直齿轮副磨损预测模型, 并研究了不对中和扭矩对磨损量的影响。Ding 等<sup>[10]</sup>将齿轮动力学模型与 Archard 磨损模型进行耦合, 建立了动态磨损预测模型, 揭示了磨损与动力学行为之间的相互作用。Feng 等<sup>[11]</sup>建立了一种改进的齿轮

副动态磨损预测模型, 并利用实验验证了磨损预测模型的有效性。

从上述文献可以看出, 现有的磨损模型忽略了齿间磨损的不均匀性, 认为各个轮齿上的磨损量是相同的。然而对于实际的齿轮副, 齿距累积误差的存在会改变齿间载荷分配, 从而引发齿间磨损的不均匀性。由于缺乏相应的理论与模型支撑, 目前尚无文献将考虑齿距误差的动力学模型与磨损模型相结合, 定量分析齿距误差对磨损均匀性的影响。针对上述问题, 本文提出了一种考虑齿距误差的齿轮副动态磨损预测模型, 并分析主/从动轮齿数与磨损分布之间的内在规律。

## 1 考虑齿距误差的动态磨损模型

### 1.1 考虑齿距累积误差的载荷分配算法

由于加工误差的存在, 实际齿廓面往往会偏离理论渐开线齿廓面, 造成啮合齿对提前或推迟参与啮合。齿距累积误差示意图如图 1 所示,  $P_i$  为理论齿距,  $f_{pi}$  为齿距误差,  $F_{pk}$  为第  $k$  个轮齿对应的齿距累积误差。齿距误差大于零表示实际齿厚大于理论齿厚, 反之表示实际齿厚小于理论齿厚。

轮齿承载接触分析(LTCA)方法兼顾了精度和求解效率<sup>[6,13]</sup>, 并且能有效考虑各种形式的齿廓误差, 因此本文采用 LTCA 方法获取含齿廓偏差的齿

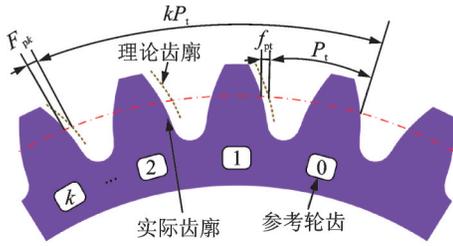


图 1 齿距累积误差示意图

Fig. 1 Schematic of cumulative pitch errors

轮副载荷分配。LTCA 方法的核心思想是将齿轮啮合过程中的整体变形与接触变形分离。接触变形采用解析公式计算以提升计算效率,整体变形采用有限元法计算。

为了提升程序的通用性和计算效率,本文的有限元计算过程均在 MATLAB 环境中实现。在 MATLAB 中构建的有限元网格如图 2 所示。

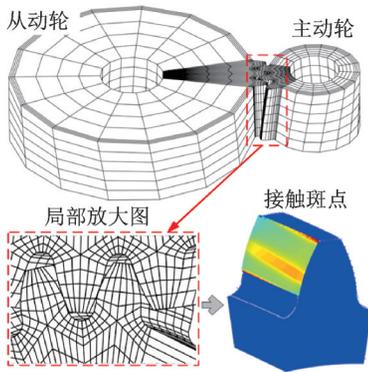


图 2 LTCA 所使用的有限元模型

Fig. 2 Finite element model adopted in LTCA

LTCA 方法计算的是齿面法向位移,因此需要将齿距累积误差转化到齿面法向:

$$E_{pt} = f_{pt} \cos \alpha_i \cos \beta_b \quad (1)$$

式中  $\alpha_i$  为端面压力角;  $\beta_b$  为基圆螺旋角。

整体柔度矩阵可以表示为:

$$\lambda_b = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^p + \lambda_{11}^g & \lambda_{12}^p + \lambda_{12}^g & \dots & \lambda_{1n}^p + \lambda_{1n}^g \\ \lambda_{21}^p + \lambda_{21}^g & \lambda_{22}^p + \lambda_{22}^g & \dots & \lambda_{2n}^p + \lambda_{2n}^g \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1}^p + \lambda_{n1}^g & \lambda_{n2}^p + \lambda_{n2}^g & \dots & \lambda_{nm}^p + \lambda_{nm}^g \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 下标  $i$  和  $j$  分别表示在  $j$  点施加单位力,在  $i$  点提取位移;上标  $p$  和  $g$  分别代表主动轮和从动轮;  $n$  表示潜在接触点数目。

局部接触柔度矩阵为:

$$\lambda_c = \text{diag}(\lambda_{c1}, \lambda_{c2}, \dots, \lambda_{ci}, \dots, \lambda_{cn}),$$

$$\lambda_{ci} = \frac{1.275}{E^{0.9} L^{0.8} F_i^{0.1}} \quad (3)$$

式中  $F_i$  为第  $i$  个潜在接触点的接触力;  $E$  和  $L$  分别为弹性模量和齿宽。

轮齿承载接触分析迭代方程为<sup>[13]</sup>:

$$\begin{bmatrix} -(\lambda_c + \lambda_b) & \mathbf{I}_{n \times 1} \\ \mathbf{I}_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ \delta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ F_s \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $F_n$  为法向接触力向量,即齿面的载荷分配信息;  $\delta_s$  为静态传递误差;  $F_s = T/r_{b1}$ , 表示静态啮合力,其中  $T$  和  $r_{b1}$  分别为输入扭矩和主动轮基圆半径;  $\epsilon$  为齿廓偏差向量,该向量中应当包含轮齿分离距离<sup>[13]</sup>、轮齿修形量和齿距累积误差量,  $\mathbf{I}$  为所有元素均为 1 的向量,下标表示向量的维度。

求解式(4)所示的非线性方程,获得齿面载荷分配力  $F_n$  和静态传递误差  $\delta_s$ 。齿轮副的啮合刚度的表达式为:

$$k = \frac{F_s}{\delta_s - e} \quad (5)$$

式中  $e$  表示空载传递误差。

### 1.2 考虑齿距误差的齿轮转子系统动力学模型

输入轴和输出轴之间通过啮合单元来模拟齿轮副啮合关系,如图 3 所示。考虑弯曲、扭转和轴向自由度,建立齿轮啮合单元,其广义坐标为:

$$\mathbf{x}_m = [x_p, y_p, z_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}, \theta_{zp}, x_g, y_g, z_g, \theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_{zg}] \quad (6)$$

利用投影向量  $V_m$  将齿轮位移投影到啮合线方向<sup>[14]</sup>:

$$V_m = \begin{bmatrix} -\sin \psi \cos \beta_b & \cos \psi \cos \beta_b & \sin \beta_b \\ r_{b1} \sin \psi \sin \beta_b & -r_{b1} \cos \psi \sin \beta_b & r_{b1} \cos \beta_b \\ \sin \psi \cos \beta_b & -\cos \psi \cos \beta_b & -\sin \beta_b \\ r_{b2} \sin \psi \sin \beta_b & -r_{b2} \cos \psi \sin \beta_b & r_{b2} \cos \beta_b \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中  $\psi$  表示啮合平面与  $y$  轴的夹角(如图 3 所示);  $r_{b2}$  表示从动轮基圆半径。齿轮啮合单元的单元刚度矩阵为<sup>[15]</sup>:

$$K_m(t) = k(t) V_m^T V_m \quad (8)$$

采用 Timoshenko 梁单元模拟轴的柔性,传动轴两端的轴承支撑采用线性弹簧来模拟。组集啮合单元、梁单元和轴承单元,形成整体刚度矩阵。齿轮转子的整体动力学方程为<sup>[16]</sup>:

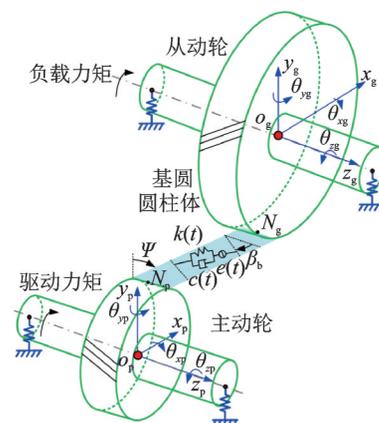


图 3 齿轮转子动力学模型

Fig. 3 Rotor dynamic model of gears

$$M\ddot{X} + (C + G)\dot{X} + KX = F \quad (9)$$

式中  $M, C, G$  和  $K$  分别表示质量矩阵、阻尼矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵;  $F$  为外载荷向量;  $X$  为位移列阵。本模型中的阻尼采用比例阻尼形式。

动态啮合力可以表示为:

$$F_d = k(\delta - e) = k(V_m x_m - e) \quad (10)$$

式中  $\delta$  为动态传递误差。

对于传统的齿轮转子动力学分析, 振动响应的变化周期一般为啮合周期。但是由于齿距累积误差的存在, 应取一个追逐齿周期进行动力学分析:

$$T_{ht} = \frac{1}{f_{ht}} = \text{lcm}(z_1, z_2) \cdot T_m = \frac{z_1 z_2}{N_{ap}} \cdot T_m \quad (11)$$

式中  $T_m$  为齿轮的啮合周期;  $\text{lcm}$  函数表示取两个数的最小公倍数;  $N_{ap}$  为组合状态系数, 其值为两个齿轮齿数的最大公约数;  $z_1$  和  $z_2$  分别为主动轮和从动轮的齿数;  $f_{ht}$  为追逐齿频率, 它表示主动轮和从动轮上两个特定轮齿相遇一次的频率:

$$f_{ht} = \frac{f_m N_{ap}}{z_1 z_2} \quad (12)$$

式中  $f_m$  为啮合频率。由追逐齿频率的定义可知, 当两个齿轮齿数的最小公倍数较小, 乃至齿轮齿数互质时, 追逐齿频率很低。除此之外, 由齿间啮合不均匀性还能衍生出组合状态频率:

$$f_{ap} = \frac{f_m}{N_{ap}} \quad (13)$$

### 1.3 基于 Archard 磨损理论的磨损预测模型

利用 Archard 磨损模型计算单次磨损造成的磨损深度为<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \Delta h_p = 2k_w \bar{\sigma}_H a_H |1 - v_g/v_p| \\ \Delta h_g = 2k_w \bar{\sigma}_H a_H |1 - v_p/v_g| \end{cases} \quad (14)$$

式中  $v_p$  和  $v_g$  分别为主动轮和从动轮上啮合点的滑动速度;  $a_H$  为赫兹接触区域半宽:

$$a_H = \sqrt{\frac{8F_d \cdot lsr_s \rho_e}{L\pi E_e}} \quad (15)$$

式中  $lsr_s$  为 LTCA 方法得到的静态载荷分配系数;  $\rho_e$  和  $E_e$  分别为齿轮副的等效曲率半径和等效弹性模量。

$\bar{\sigma}_H$  为赫兹接触区域内的平均应力:

$$\bar{\sigma}_H = \frac{3F_d \cdot lsr_s}{2\pi L a_H} \quad (16)$$

$k_w$  为考虑不同润滑状态下的磨损系数<sup>[10]</sup>:

$$k_w = \begin{cases} k_{w0}, \lambda < 0.5 \text{ (边界润滑)} \\ 2k_{w0}(4 - \lambda)/7, 0.5 \leq \lambda \leq 4 \text{ (混合润滑)} \\ 0, \lambda > 4 \text{ (弹流润滑)} \end{cases} \quad (17)$$

式中  $\lambda$  为膜厚比:

$$\lambda = h_{\min}/R_{\text{rms}} \quad (18)$$

式中  $R_{\text{rms}}$  为齿轮综合表面粗糙度;  $h_{\min}$  为最小油膜厚度<sup>[10]</sup>:

$$h_{\min} = 3.63U^{0.68}G^{0.49}W^{-0.073}\rho_e \quad (19)$$

式中  $W, G$  和  $U$  分别为无量纲载荷参数、材料参数和速度参数。

$k_{w0}$  为边界润滑状态下的磨损系数<sup>[17]</sup>:

$$k_{w0} = \frac{2.428 \times 10^{31} W^{1.219} G^{-7.377} S^{1.589}}{HE_e} \quad (20)$$

式中  $S$  为无量纲粗糙度参数;  $H$  为齿面洛氏硬度。

为了考虑动力学和磨损之间的耦合关系, 需要运用迭代的思路进行动态磨损仿真。为了提升计算效率, 不需要对每个磨损周期进行载荷分配和动力学模型的求解, 而是在累积磨损深度大于磨损更新阈值  $\epsilon_w$  (本文取  $2 \mu\text{m}$ ) 后才更新齿廓。利用这一方法, 可将全生命周期磨损过程划分成若干个阶段, 每个阶段内认为载荷分配和稳态振动响应是不变的。具体迭代流程如图 4 所示。

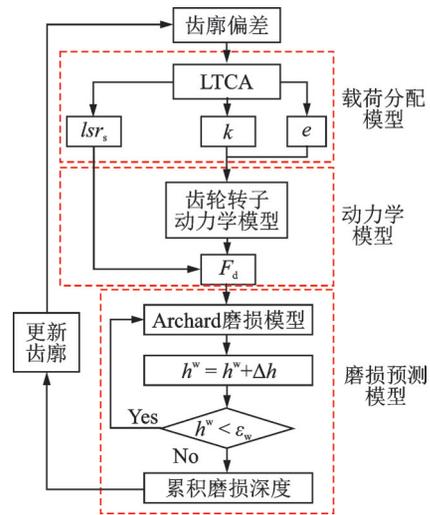


图 4 本文模型流程图

Fig. 4 Flow chart of the proposed model

## 2 模型验证

利用文献[18]中的含齿距累积误差的斜齿轮副动态传递误差实验结果验证本文模型的有效性。为了方便与文献中的实验结果对比, 采用与文献中的实验一致的齿廓偏差参数, 所包含的齿廓偏差形式有: 齿廓修形、齿向修形、齿距累积误差和几何偏心。齿轮副参数、齿廓偏差参数、轴段参数和轴承刚度参数详见文献[18]。

本文模型和实测的动态传递误差频谱对比如图 5 所示。从图 5 中可以看出, 由齿距累积误差所带来的转频分量非常明显, 在啮合频率附近呈现出了非

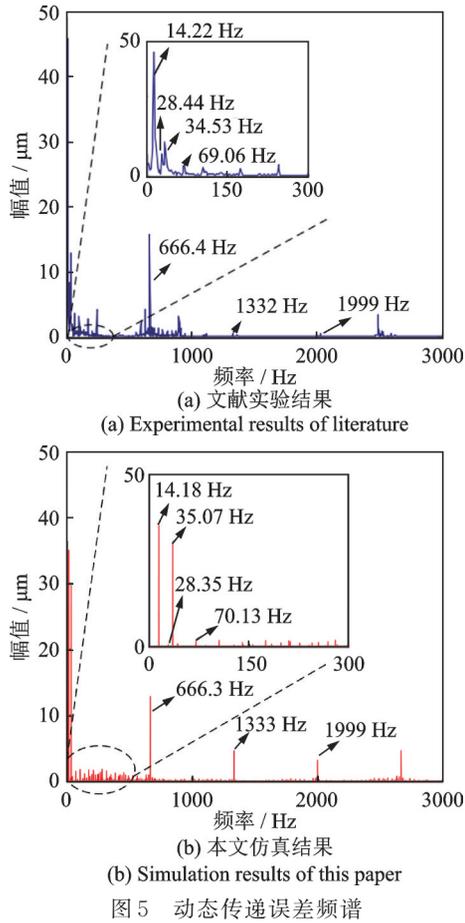


Fig. 5 Frequency spectrum of the dynamic transmission error

常明显的边频带。本文模型与文献中的实验所得的频谱特征非常相似,说明了本文仿真模型的有效性。

### 3 结果分析与讨论

#### 3.1 啮合特性分析

采用表 1 所示的参数进行动态磨损仿真。主动轴和从动轴的直径分别为 60 mm 和 100 mm。轴的长度为 300 mm。轴承刚度如表 2 所示,忽略轴承阻尼。

主动轮和从动轮的齿距累积误差采用文献[19]中的实测结果,如图 6 所示。

表 1 齿轮副主要参数<sup>[19]</sup>

Tab. 1 Main parameters of the gear pair<sup>[19]</sup>

参数	主动轮/ 从动轮	参数	主动轮/ 从动轮
齿数	28/56	齿宽/mm	40
弹性模量/GPa	210	压力角/(°)	20
泊松比	0.3	扭矩/(N·m)	500
内孔半径/mm	30/50	转速/(r·min <sup>-1</sup> )	2865
法向模数/mm	4	齿顶高系数	1
螺旋角/(°)	0	变位系数	0

表 2 轴承刚度

Tab. 2 Bearing stiffness

参数	数值
$k_{xx}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$1.7 \times 10^8$
$k_{yy}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$1.7 \times 10^8$
$k_{zz}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$7.6 \times 10^7$
$k_{dxx}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	$1 \times 10^6$
$k_{dyy}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	$1 \times 10^6$

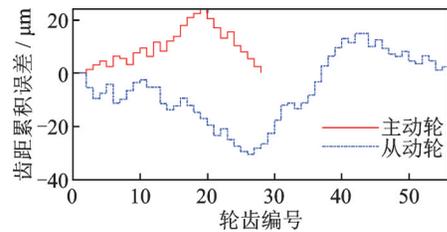


图 6 齿距累积误差

Fig. 6 Cumulative pitch errors

如图 7 所示为不同运转次数下的主动轮齿宽中间面的累积磨损深度。节点位置由于其相对滑移速度为零,因此磨损量为零。在齿根和齿顶部位有较大的磨损量。随着运转次数的增大,由于齿根和齿顶部位发生严重磨损,该部位的接触应力减小,磨损速率放缓。

不同情况下的时变啮合刚度如图 8 所示。对于无齿距累积误差的齿轮副,其每个啮合周期内的啮

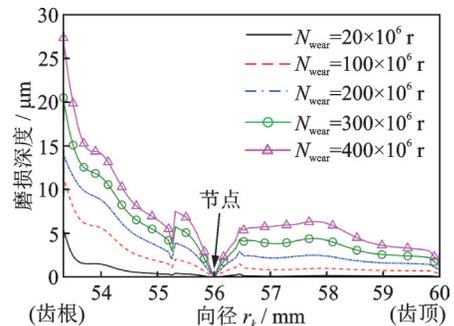


图 7 不同运转次数下的齿面磨损分布

Fig. 7 Wear distribution under different running times

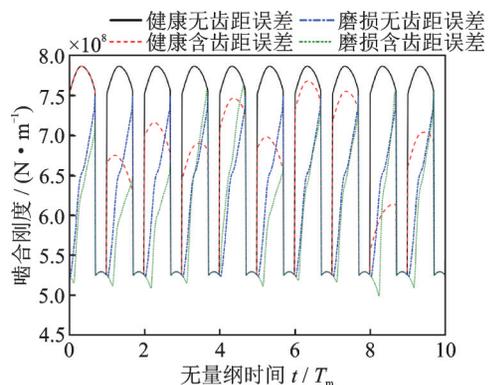


图 8 时变啮合刚度

Fig. 8 Time-varying mesh stiffness

合刚度是相同的。齿距累积误差的引入会造成每个啮合周期内的啮合刚度不同,在追逐齿周期内呈现整体波动趋势。并且齿距误差只影响双齿区的啮合刚度,单齿区的啮合刚度与齿距累积误差无关。在经历  $400 \times 10^6$  次运转之后,单双齿啮合区之间的刚度变得平缓,并且双齿区的长度发生了缩减,即齿轮副的重合度降低了。

### 3.2 振动特性分析

图 9 为运转  $400 \times 10^6$  次后的动态传递误差频谱图。如果不考虑由齿距累积误差所引发的啮合不均匀性,磨损齿轮的频谱中仅含有啮合频率成分。考虑齿距累积误差所得到的磨损齿轮频谱包含了更为丰富的频率成分。在低频段可以观察到明显的追逐齿频率和组合状态频率等成分,在啮合频率及其谐波附近也有边带频调制现象。由于本例中齿数的特殊性,其追逐齿频率  $f_m$  等于从动轴旋转频率  $f_{s2}$ ,组合状态频率  $f_{sp}$  等于主动轴旋转频率  $f_{s1}$ 。

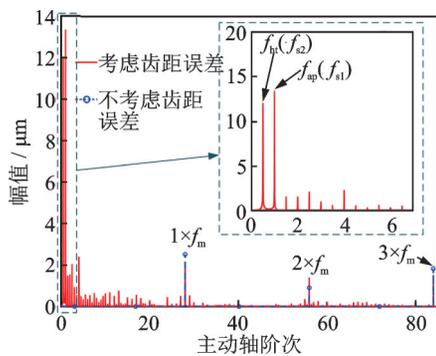


图 9 磨损齿轮动态传递误差阶次谱

Fig. 9 Order spectrum of the dynamic transmission error of the worn gear

不同磨损退化阶段的动载系数如图 10 所示,动载系数定义为稳态振动周期内最大动态啮合力与静态啮合力的比值。在早期磨损阶段(磨合阶段),磨损可以起到改善啮合平稳性的作用,其主要原因是轻微磨损可以缓解单双齿交替过程中的轮齿干涉,

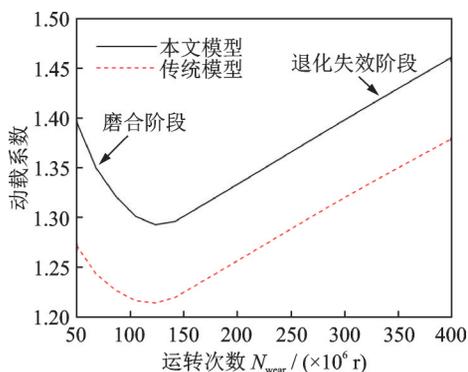


图 10 不同运转次数下的动载系数

Fig. 10 Dynamic factors under different running times

起到磨合与“被动修形”的作用。随着运转次数的增加,由磨损导致的啮合间隙(空载传递误差)越来越大,齿轮系统呈现出明显的性能退化趋势,振动量直线上升。尽管本文模型和传统模型(不考虑齿距误差)都能预测这一性能退化过程,但传统模型会低估 10% 左右的动载系数。

### 3.3 磨损不均匀性分析

传统的磨损仿真分析建立在齿与齿之间载荷分配均匀的基础上,因此所得到的各个齿上的磨损量相同。但是现实中,由于齿距累积误差的存在,各个轮齿表面的磨损形貌往往是不同的。本文模型在考虑了齿距累积误差之后,能有效地模拟齿间载荷不均匀导致的磨损不均匀性。本文模型所得到的磨损分布如图 11 所示,云图的颜色表示各个轮齿上的齿根磨损深度。

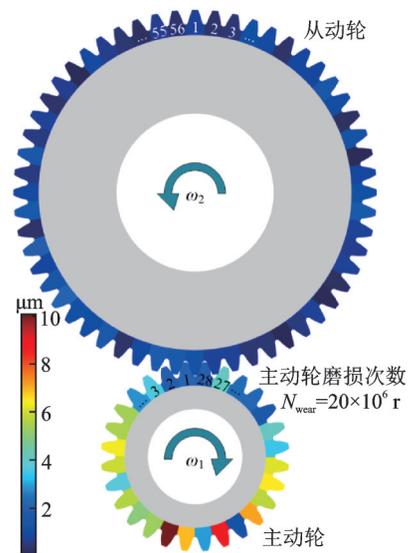


图 11 不同齿上的磨损量

Fig. 11 Wear depth of different gear teeth

由于齿距累积误差的存在,齿与齿之间的磨损量差距较大。主动轮的磨损量普遍大于从动轮磨损量,这是由于在一个大周期内,主动轮参与啮合的次数比从动轮多。定义磨损不均匀性系数为各齿磨损量的标准差与平均值之比:

$$c_{\text{wear}} = \frac{\text{std}(h_{\text{root}})}{\bar{h}_{\text{root}}} \quad (21)$$

式中  $h_{\text{root}}$  为各轮齿齿根部位磨损量组成的向量。

在不同磨损阶段的齿根磨损深度和磨损不均匀性系数如图 12 所示。传统模型所得到的齿根磨损深度仅在磨损初期与本文模型接近,随着磨损退化过程的进行,本文模型与传统模型的差异越来越大。两种模型之间的差异与齿间磨损不均匀性密切相关。本文模型所预测的磨损不均匀性系数与动载系

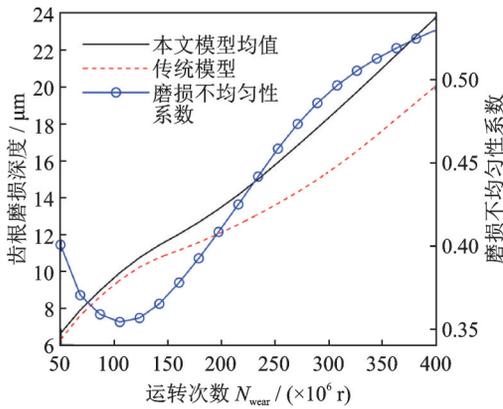


图 12 不同运转次数下的齿根磨损深度和磨损不均匀性系数  
Fig. 12 Wear depth of the tooth root and non-uniformity factors under different running times

数的变化趋势类似。早期磨损有助于缓解齿距误差带来的齿间载荷分配不均,但剧烈的磨损会恶化均载特性与接触状态,导致振动加剧乃至失效。

为了研究不同齿数组合下的磨损分布特性,分别对表 3 中给出的五组齿数组合进行磨损均匀性评估。定义追逐齿系数为:

$$c_{ht} = \frac{N_{ap}}{\max(z_1, z_2)} \quad (22)$$

表 3 不同齿数组合

Tab. 3 Different designs of the tooth number					
齿数组合	$z_1, z_2$	组合状态系数	组合状态频率/Hz	追逐齿系数	追逐齿频率/Hz
A	27, 56	1	1289.25	0.018	0.85
B	26, 56	2	620.75	0.036	1.71
C	24, 56	8	143.25	0.143	6.82
D	28, 56	28	47.75	0.5	23.88
E	28, 28	28	47.75	1	47.75

图 13 为主动轮磨损均匀性系数随追逐齿系数的变化规律。从图 13 中可以看出,随着追逐齿系数的增大,磨损不均匀性系数增大,即齿与齿之间的磨

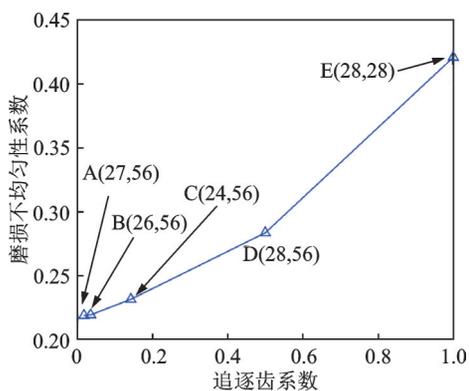


图 13 追逐齿系数与磨损不均匀性的关系  
Fig. 13 Relationship between the wear non-uniformity and hunting tooth factor

损量差异增大。对于齿轮副 A,两齿轮齿数互质,其磨损不均匀性系数最小。这是因为齿数互质时,主动轮和从动轮上两个特定轮齿相遇一次的周期(追逐齿周期)最长。在追逐齿周期内,主动轮轮齿会与每个从动轮轮齿啮合一遍。随着啮合过程的进行,齿与齿之间的磨损逐渐趋于均匀。两齿轮齿数互质的设计被称为追逐齿设计。相比于原设计(齿轮副 D),追逐齿设计(齿轮副 A)可以使磨损不均匀系数降低约 30%。对于齿轮副 E,主动轮的轮齿会永远与从动轮的某个轮齿啮合,这自然会引发某些特定轮齿的剧烈磨损。在齿轮的设计环节,应当充分考虑追逐齿问题以获得更加均匀的磨损形式,降低齿轮局部失效的发生概率。

不同齿距累积误差下的动载系数如图 14 所示。(图 6 中的齿距累积误差定义为 100%)。对于不同的齿距误差情况,追逐齿设计均能有效地减小振动。当齿轮加工精度较高时(见图 14 中的 20% 齿距累积误差),追逐齿设计与原设计在振动响应上的差距较小。由于传动比和结构尺寸等因素的限制,工程中并非所有齿轮均能满足追逐齿设计的要求。当齿轮的齿距累积误差较小时,可适当放宽追逐齿设计这一要求。

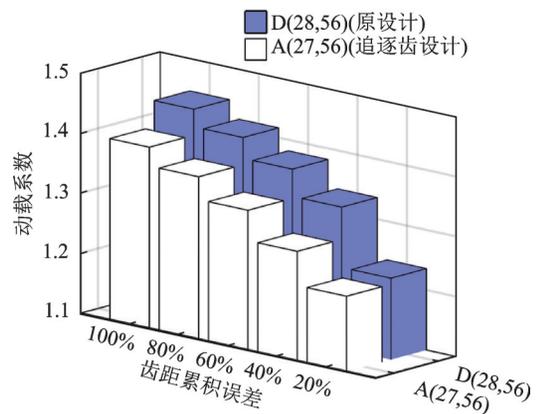


图 14 不同齿距累积误差下的动载系数  
Fig. 14 Dynamic factors under different cumulative pitch errors

## 4 结 论

基于轮齿承载接触分析方法、齿轮转子动力学模型和 Archard 磨损模型,提出了一种考虑齿距累积误差的齿轮动态磨损预测模型。通过将仿真频谱与文献实验进行对比验证了模型的有效性。基于上述模型,分析了齿距累积误差对响应特性和磨损分布的影响,主要结论如下:

- (1) 齿距累积误差会给啮合刚度、传递误差以

及振动响应引入轴旋转频率、追逐齿频率和组合状态频率等丰富的频率成分。而传统的动力学模型所得频谱中一般只含有啮合频率成分。

(2) 本文模型可以评估由于齿距累积误差所导致的齿间磨损不均匀性,改进了传统磨损模型中各轮齿磨损量相等这一理想化假设。轻微磨损有助于缓解齿间载荷分配不均,但剧烈的磨损会恶化均载特性,导致振动加剧。

(3) 本文动态磨损模型可以建立追逐齿系数与磨损不均匀性系数之间的映射关系。采用追逐齿设计可以使磨损不均匀系数降低约 30%。当齿距累积误差较小时,可适当放宽追逐齿设计这一要求。

### 参考文献:

- [1] 邵毅敏,王新龙,刘静,等.基于边缘接触时变刚度的轮齿表面剥落动力学模型与响应特征[J].振动与冲击,2014,33(15):8-14.  
Shao Yimin, Wang Xinlong, Liu Jing, et al. Time-varying stiffness model and dynamic response characteristics of gears with tooth surface spalling and edge contact[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(15): 8-14.
- [2] 周长江,雷玉英,汪红兵,等.准静态与动态载荷下斜齿轮齿面粘着磨损计算[J].机械工程学报,2018,54(23):10-22.  
Zhou Changjiang, Lei Yuying, Wang Hongbing, et al. Adhesive wear models for helical gears under quasi-static and dynamic loads[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(23): 10-22.
- [3] Mączak J. Local meshing plane analysis as a source of information about the gear quality[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 38(1): 154-164.
- [4] 常乐浩,刘更,吴立言.齿轮综合啮合误差计算方法及对系统振动的影响[J].机械工程学报,2015,51(1):123-130.  
Chang Lehao, Liu Geng, Wu Liyan. Determination of composite meshing errors and its influence on the vibration of gear system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(1): 123-130.
- [5] 王奇斌,张义民.考虑齿距偏差的直齿轮转子系统振动特性分析[J].机械工程学报,2016,52(13):131-140.  
Wang Qibin, Zhang Yimin. Vibration characteristics analysis of a spur gear rotor system with the pitch deviation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(13): 131-140.
- [6] Yuan B, Chang S, Liu G, et al. Quasi-static and dynamic behaviors of helical gear system with manufacturing errors[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(2): 106-114.
- [7] 袁冰,常山,刘更,等.考虑齿距累积误差的人字齿轮系统动态特性分析[J].振动与冲击,2020,39(3):120-126.  
Yuan Bing, Chang Shan, Liu Geng, et al. Dynamic characteristics of a double helical gear system considering accumulation pitch error[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(3): 120-126.
- [8] 张俊,卞世元,鲁庆,等.准静态工况下渐开线直齿轮齿面磨损建模与分析[J].机械工程学报,2017,53(5):136-145.  
Zhang Jun, Bian Shiyuan, Lu Qing, et al. Quasi-static-model-based wear analysis of spur gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(5): 136-145.
- [9] Shen Z X, Qiao B J, Yang L H, et al. Evaluating the influence of tooth surface wear on TVMS of planetary gear set[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 136: 206-223.
- [10] Ding H L, Kahraman A. Interactions between nonlinear spur gear dynamics and surface wear[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 307(3-5): 662-679.
- [11] Feng K, Smith W A, Peng Z X. Use of an improved vibration-based updating methodology for gear wear prediction[J]. Engineering Failure Analysis, 2021, 120: 105066.
- [12] Huangfu Y F, Zhao Z F, Ma H, et al. Effects of tooth modifications on the dynamic characteristics of thin-rimmed gears under surface wear[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 150: 103870.
- [13] 赵百顺,李娜,马辉,等.混合修形斜齿轮转子系统振动特性分析[J].振动工程学报,2021,34(4):704-711.  
Zhao Baishun, Li Na, Ma Hui, et al. Vibration characteristics of the helical gear rotor system considering mixed modification[J]. Journal of Vibration Engineering, 2021, 34(4): 704-711.
- [14] Chang L H, Cao X P, He Z X, et al. Load-related dynamic behaviors of a helical gear pair with tooth flank errors[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(4): 1473-1487.
- [15] 许华超,秦大同,刘长钊,等.考虑结构柔性的多级齿轮箱变速过程动态特性研究[J].振动工程学报,2021,34(1):99-107.  
Xu Huachao, Qin Datong, Liu Changzhao, et al. Dynamic characteristics of the multi-stage gearbox considering structural flexibility during the variable speed process[J]. Journal of Vibration Engineering, 2021, 34(1): 99-107.
- [16] 魏静,王刚强,秦大同,等.考虑修形的斜齿轮系统非线性激励与动力学特性研究[J].振动工程学报,2018,31(4):561-572.  
Wei Jing, Wang Gangqiang, Qin Datong, et al. Nonlin-

- ear excitation and dynamic characteristics of helical gear system with considering modification[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(4): 561-572.
- [17] Janakiraman V, Li S, Kahraman A. An investigation of the impacts of contact parameters on wear coefficient [J]. *Journal of Tribology*, 2014, 136(3): 031602.
- [18] Guo F, Fang Z D. Experimental and theoretical study of gear dynamical transmission characteristic considering measured manufacturing errors[J]. *Shock and Vibration*, 2018: 9645453.
- [19] Velex P, Maatar M. A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 191(5): 629-660.

## Dynamic wear analysis of cylindrical gears with cumulative pitch errors

HUANGFU Yi-fan<sup>1</sup>, DONG Xing-jian<sup>1</sup>, PENG Zhi-ke<sup>1</sup>, LIU Bing<sup>2</sup>, LONG Xin-hua<sup>1</sup>

(1.State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2.Shanghai Aerospace Control Technology Institute, Shanghai 201109, China)

**Abstract:** Cumulative pitch error is a common form of manufacturing error in gear transmission systems. Considering the cumulative pitch errors, a load distribution model is established based on the loaded tooth contact analysis method. The mesh stiffness and non-loaded transmission error obtained from the load distribution model are imported into the dynamic model of the geared rotor system to acquire the vibration responses. Based on the dynamic load distribution and Archard's wear theory, a wear prediction model of gear pairs is established. In order to verify the proposed model, the simulated results are compared with the experimental results in a published literature. On the basis of the proposed model, the effects of the cumulative pitch errors on meshing characteristics, response characteristics and wear distribution are discussed. It is found that cumulative pitch errors will lead to the non-uniform load distribution and wear distribution among gear teeth, introducing the shaft frequency, hunting tooth frequency and assembly phase frequency into the vibration responses. Mild wear is beneficial to relieve the non-uniform wear among gear teeth. However, the severe wear will deteriorate the contact state, leading to violent vibration. The wear non-uniformity coefficient can be reduced by 30% after adopting the hunting tooth design. The proposed model can provide theoretical guidance for the gear wear mechanism and the design of gear parameters.

**Key words:** gear dynamics; cumulative pitch errors; vibration characteristics; wear; hunting tooth

作者简介: 皇甫一樊(1994—),男,博士研究生。E-mail:Huangfu\_Yifan@sjtu.edu.cn。

通讯作者: 董兴建(1977—),男,博士,副教授,博士生导师。电话:(021)34206813; E-mail:donxij@sjtu.edu.cn。