

# 考虑齿廓修形的行星齿轮传动系统 动力学特性研究

莫 帅<sup>1,4</sup>, 刘志鹏<sup>2</sup>, 罗炳睿<sup>2</sup>, 岑国建<sup>3</sup>, 徐家科<sup>3</sup>

(1. 广西大学机械工程学院, 广西 南宁 530004; 2. 天津工业大学机械工程学院, 天津 300387; 3. 宁波中大力德智能传动股份有限公司, 浙江 宁波 315301; 4. 华中科技大学数字制造装备与技术国家重点实验室, 湖北 武汉 430074)

**摘要:** 基于对行星齿轮传动系统高传动效率和低噪音等要求, 以行星齿轮传动系统为研究对象, 采用集中参数法建立了考虑偏心误差和安装误差的斜齿行星齿轮传动系统的弯-扭-轴耦合动力学模型, 利用四阶 Runge-Kutta 法求解动力学方程得到行星齿轮的动态啮合力、动态传动误差和动载系数等动态特性, 并以此为评价指标展开行星齿轮的修形研究。建立了齿廓修形后的齿面方程和考虑齿面修形的动力学方程, 研究不同修形量的行星齿轮传动系统动态特性变化。研究表明, 随着修形量的增大, 行星齿轮的动态啮合力、动态传动误差和动载系数都有不同程度的降低, 降到最低值后又开始增大, 最终确定齿轮的合理修形量。经过整机性能测试发现合理修形下的行星减速器振动噪声降低、传动性能提升, 为行星齿轮传动系统的减振降噪、传动效率提升设计提供了理论支撑。

**关键词:** 行星齿轮传动系统; 齿轮修形; 动态啮合力; 动态传动误差

**中图分类号:** TH132.424 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)02-0191-09

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.02.001

## 引 言

行星齿轮传动系统因承载能力高、运转平稳而广泛应用于航空航天、汽车船舶、精密机器人等对传动稳定性和传动效率要求较高的智能装备领域。行星齿轮在传动过程中往往会产生振动噪声, 引起传动精度降低等问题, 使行星齿轮传动系统的性能下降, 可通过对齿轮齿面微观修形来改善啮合性能<sup>[1]</sup>。影响齿轮传动系统动态特性的主要因素为动态传动误差, 降低动态传动误差的大小和波动可以减小齿轮系统的振动和噪声。此外降低齿面动态啮合力和动载系数可改善齿轮受力情况、避免齿轮过早失效, 提升齿轮使用寿命。

齿轮系统动力学是研究齿轮传动过程中产生动态激励的基础。相关学者对一般的圆柱直齿轮副和行星齿轮传动系统的动力学进行了研究。MO 等<sup>[2-5]</sup>建立了人字齿轮、面齿轮和行星齿轮的静力学和动力学模型, 研究了传动系统的载荷分配均匀性机理。杨通强等<sup>[6]</sup>建立了考虑误差和时变刚度的斜齿行星齿轮系统的平移-扭转耦合动力学模型。在齿轮修

形方面, Bahk 等<sup>[7]</sup>通过摄动分析研究了齿廓修形对行星齿轮动态响应的影响。魏静等<sup>[8]</sup>建立了考虑齿轮修形后刚度与误差的非线性动力学模型, 分析了不同修形参数对啮合刚度和动态特性的影响。陈洪月等<sup>[9]</sup>建立了齿廓修形前后的传动误差数学模型, 采用多种数值分析方法分析了修形参数对传动误差的影响。CHEN 等<sup>[10-11]</sup>提出了考虑齿轮修形、承载变形和安装偏差的时变啮合刚度和传动误差的计算方法。

目前的文献多是针对单一齿轮副或是直齿轮展开修形研究, 针对斜齿行星齿轮修形的动力学特性研究还较少。因此, 本文构建了斜齿行星齿轮的弯-扭-轴耦合动力学模型, 采用四阶 Runge-Kutta 法求解分析行星齿轮传动系统的动态特性。基于此, 将齿廓修形耦合到动力学方程中, 分析齿廓修形对动态啮合力、动态传动误差和动载系数的影响。

## 1 行星齿轮传动系统动力学建模

### 1.1 行星齿轮传动系统结构设计

以智能装备用某型号精密行星减速器为研究对

**收稿日期:** 2022-05-13; **修订日期:** 2022-06-19

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(52265004); 中国科协青年人才托举工程资助项目(2018QNRC001); 直升机传动技术国防科技重点实验室开放基金资助项目(HTL-0-21G07); 数字制造装备与技术国家重点实验室开放基金资助项目(DMETKF2021017); 江苏省泰州市双创计划资助项目。

象,建立三维数字化样机,研究该系统的输出级行星轮系,其结构如图 1 所示。该传动系统以太阳轮输入、行星架输出,输入扭矩为 18 N·m,输入转速为 3000 r/min,太阳轮-行星轮、行星轮-内齿圈的平均啮合刚度  $K_m$  分别为  $5 \times 10^9$  N/m,  $8 \times 10^9$  N/m,行星架的质量为 0.621 kg,转动惯量为  $0.047 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 。其他设计参数如表 1 所示。

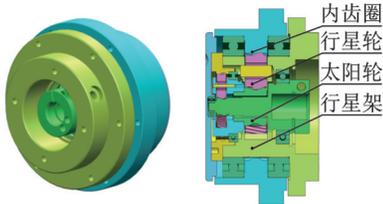


图 1 行星减速器结构图

Fig. 1 Structure diagram of planetary speed reducer

表 1 行星齿轮传动系统设计参数

Tab. 1 Design parameters of planetary gear transmission system

参数	太阳轮	行星轮	内齿圈
齿数	30	30	90
模数/mm	0.85	0.85	0.85
压力角/(°)	20	20	20
螺旋角/(°)	12	12	12
齿宽/mm	17	16	18
质量/kg	0.048	0.048	0.752
转动惯量/(kg·m <sup>2</sup> )	5.86	5.86	0.002

采用集中参数法构建如图 2 所示的行星齿轮传动系统弯-扭-轴耦合动力学模型,  $x_j, y_j, z_j$  为平移位移,  $u_{zj}$  为扭转位移 ( $j=s, r, c, pi$ ), 其中,  $s, r, c$  和  $pi$  ( $i=1, 2, 3$ ) 分别代表太阳轮、内齿圈、行星架和行星轮。

斜齿行星齿轮的动力学方程可以表示为:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \quad (1)$$

式中  $M$  为质量矩阵;  $C$  为阻尼矩阵;  $K$  为刚度矩

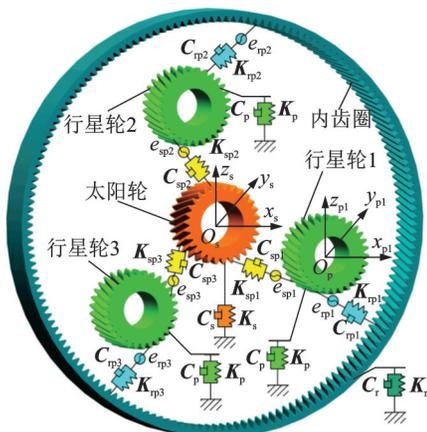


图 2 行星齿轮传动系统动力学模型

Fig. 2 Dynamic model of planetary gear transmission system

阵;  $x = [x_s \ y_s \ z_s \ u_{zs} \ x_{pi} \ y_{pi} \ z_{pi} \ u_{zpi} \ x_r \ y_r \ z_r \ u_{zr} \ x_c \ y_c \ z_c \ u_{zc}]^T$  为广义坐标矩阵, 其中,  $u_{zs}, u_{zpi}, u_{zr}$  和  $u_{zc}$  分别为太阳轮绕  $z$  轴、第  $j$  个行星轮、内齿圈和行星架的扭转线位移;  $F$  为外载荷矩阵。

### 1.2 斜齿轮副时变啮合刚度

根据 Maatar 等<sup>[12]</sup> 提出的齿轮副接触线长度理论计算斜齿轮的时变啮合刚度为:

$$K(t) = K_m L(\tau) \quad (2)$$

式中  $K_m$  为平均啮合刚度;  $L(\tau)$  为总接触线长度;  $\tau = t/T_m$ , 其中,  $t$  为时间,  $T_m$  为啮合周期。

$L(\tau)$  计算如下:

$$\left\{ \begin{aligned} L_{spi}(\tau) &= \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(2\pi k\tau - \gamma_{sp}) + B_k \sin(2\pi k\tau - \gamma_{sp})] \right\} L_{mspi} \\ L_{rpi}(\tau) &= \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(2\pi k\tau - \gamma_{rp}) + B_k \sin(2\pi k\tau - \gamma_{rp})] \right\} L_{mrpi} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

式中  $\gamma_{sp} = z_s \varphi_n / (2\pi)$  和  $\gamma_{rp} = z_r \varphi_n / (2\pi)$  分别为齿轮外啮合副和内啮合副的初相位, 其中,  $\varphi_n = 2\pi(n-1)/N$  为第  $n$  个行星轮的位置角,  $N$  为行星轮个数;  $k$  为傅里叶级数。

$A_k, B_k$  和  $L_m$  分别计算如下:

$$\left\{ \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2\epsilon_a \epsilon_\beta \pi^2 k^2} \{ \cos(2\pi k \epsilon_\beta) + \cos(2\pi k \epsilon_a) - \cos[2\pi k(\epsilon_a + \epsilon_\beta)] - 1 \} \\ B_k &= \frac{1}{2\epsilon_a \epsilon_\beta \pi^2 k^2} \{ \sin(2\pi k \epsilon_\beta) + \sin(2\pi k \epsilon_a) - \sin[2\pi k(\epsilon_a + \epsilon_\beta)] \} \\ L_m &= \frac{b \epsilon_a}{\cos \beta_b} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

式中  $\epsilon_\beta$  为齿轮副轴向重合度;  $\epsilon_a$  为齿轮副端面重合度;  $\beta_b$  为齿轮基圆螺旋角;  $b$  为齿宽。

### 1.3 传动系统啮合线等效位移

将各构件的平移和扭转位移向啮合线方向投影, 得到各构件的等效位移如图 3 所示。

外啮合、内啮合的等效位移分别为:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{spi} &= [(x_s - x_{pi}) \sin \psi_{spi} + (y_s - y_{pi}) \cos \psi_{spi} + r_s \theta_{zs} + r_{pi} \theta_{zpi}] \cos \beta_b + (-z_s + z_{pi}) \sin \beta_b + e_{spi} \\ \delta_{rpi} &= [(-x_r + x_{pi}) \sin \psi_{rpi} + (y_r - y_{pi}) \cos \psi_{rpi} + r_r \theta_{zr} - r_{pi} \theta_{zpi}] \cos \beta_b + (z_r - z_{pi}) \sin \beta_b + e_{rpi} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

式中  $\psi_{spi} = \varphi_{sp} - \alpha_{pi}$  和  $\psi_{rpi} = \varphi_{rp} - \alpha_{pi}$  分别为太阳轮-行星轮和行星轮-内齿圈的啮合角,其中,  $\varphi_{sp}$  和  $\varphi_{rp}$  分别为两者的位置角,  $\alpha_{pi}$  为行星轮端面压力角;  $\theta_{zs}$ ,  $\theta_{zi}$  和  $\theta_{zpi}$  分别为太阳轮、内齿圈和第  $j$  个行星轮的扭转角度;  $e_{spi}$ ,  $e_{rpi}$  分别为外啮合、内啮合偏心误差和安装误差引起的综合偏差;  $r_s$  为太阳轮分度圆半径;  $r_i$  为内齿圈分度圆半径。

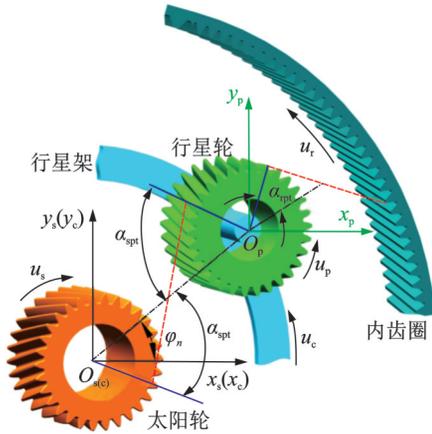


图3 行星轮系各构件几何关系示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the geometric relationship of the components of the planetary gear train

#### 1.4 行星齿轮传动系统动力学方程

太阳轮平衡方程为:

$$\begin{cases} m_s(\ddot{x}_s - 2\omega_c \dot{y}_s - \omega_c^2 x_s) + \sum_{i=1}^N (F_{spi} + D_{spi}) \sin \psi_{spi} \cos \beta + K_s x_s + C_s \dot{x}_s = 0 \\ m_s(\ddot{y}_s + 2\omega_c \dot{x}_s - \omega_c^2 y_s) + \sum_{i=1}^N (F_{spi} + D_{spi}) \cos \psi_{spi} \cos \beta + K_s y_s + C_s \dot{y}_s = 0 \\ m_s \ddot{z}_s - \sum_{i=1}^N (F_{spi} + D_{spi}) \sin \beta + K_{sz} z_s + C_{sz} \dot{z}_s = 0 \\ I_{sz} \ddot{\theta}_{zs} + \sum_{i=1}^N (F_{spi} + D_{spi}) r_s \cos \beta + K_{su} u_s + C_{su} \dot{u}_s = T_s \end{cases} \quad (6)$$

式中  $m_s$  和  $I_{sz}$  分别为太阳轮的质量和转动惯量;  $\omega_c$  为行星架加速度;  $K_s$ ,  $K_{sz}$  和  $K_{su}$  分别为径向支撑刚度、轴向支撑刚度和扭转刚度,  $C_s$ ,  $C_{sz}$  和  $C_{su}$  为对应的阻尼;  $F_{spi} = K_{sp} \cdot \delta_{spi}$  为外啮合啮合力,  $D_{spi} = C_{sp} \cdot \dot{\delta}_{spi}$  为其阻尼力, 其中,  $K_{sp}$  为啮合刚度,  $C_{sp}$  为啮合阻尼;  $\ddot{\theta}_{zs}$  为太阳轮的扭转位移;  $T_s$  为太阳轮上的输入扭矩;  $\beta$  为螺旋角。

内齿圈平衡方程为:

$$\begin{cases} m_i(\ddot{x}_r - 2\omega_c \dot{y}_r - \omega_c^2 x_r) - \sum_{i=1}^N (F_{rpi} + D_{rpi}) \sin \psi_{rpi} \cos \beta + K_r x_r + C_r \dot{x}_r = 0 \\ m_i(\ddot{y}_r + 2\omega_c \dot{x}_r - \omega_c^2 y_r) + \sum_{i=1}^N (F_{rpi} + D_{rpi}) \cos \psi_{rpi} \cos \beta + K_r y_r + C_r \dot{y}_r = 0 \\ m_i \ddot{z}_r - \sum_{i=1}^N (F_{rpi} + D_{rpi}) \sin \beta + K_{rz} z_r + C_{rz} \dot{z}_r = 0 \\ I_{rz} \ddot{\theta}_z + \sum_{i=1}^N (F_{rpi} + D_{rpi}) r_i \cos \beta + K_{ru} u_r + C_{ru} \dot{u}_r = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中  $m_i$  和  $I_{rz}$  分别为内齿圈的质量和转动惯量;  $K_r$ ,  $K_{rz}$  和  $K_{ru}$  分别为径向支撑刚度、轴向支撑刚度和扭转刚度,  $C_r$ ,  $C_{rz}$  和  $C_{ru}$  为对应的阻尼;  $F_{rpi} = K_{rp} \cdot \delta_{rpi}$  为行星轮与内齿圈的啮合力,  $D_{rpi} = C_{rp} \cdot \dot{\delta}_{rpi}$  为其阻尼力, 其中,  $K_{rp}$  为啮合刚度,  $C_{rp}$  为啮合阻尼;  $\ddot{\theta}_z$  为内齿圈的扭转角度。

行星架平衡方程为:

$$\begin{cases} m_c(\ddot{x}_c - 2\omega_c \dot{y}_c - \omega_c^2 x_c) + \sum_{i=1}^N (K_c \delta_{cpi x} + C_c \dot{\delta}_{cpi x}) = 0 \\ m_c(\ddot{y}_c + 2\omega_c \dot{x}_c - \omega_c^2 y_c) + \sum_{i=1}^N (K_c \delta_{cpi y} + C_c \dot{\delta}_{cpi y}) = 0 \\ m_c \ddot{z}_c + K_{cz} (z_c - z_{pi}) + C_{cz} (\dot{z}_c - \dot{z}_{pi}) = 0 \\ I_c \ddot{\theta}_{zc} - r_c \sin \alpha_{pi} \sum_{i=1}^N (K_c \delta_{cpi x} + C_c \dot{\delta}_{cpi x}) + r_c \cos \alpha_{pi} \sum_{i=1}^N (K_c \delta_{cpi y} + C_c \dot{\delta}_{cpi y}) = T_c \end{cases} \quad (8)$$

式中  $m_c$  和  $I_c$  分别为行星架的质量和转动惯量;  $\delta_{cpi x}$  和  $\delta_{cpi y}$  分别为第  $j$  个行星轮啮合线上位移沿  $x$  和  $y$  方向的投影;  $K_c$  和  $K_{cz}$  分别为径向支撑刚度和轴向支撑刚度,  $C_c$  和  $C_{cz}$  为对应阻尼;  $\ddot{\theta}_{zc}$  为行星架的扭转角度;  $T_c$  为行星架上的输出扭矩;  $r_c$  为行星架上滚柱与太阳轮的中心距离。

行星轮平衡方程为:

$$\begin{cases} m_p(\ddot{x}_p - 2\omega_c \dot{y}_p - \omega_c^2 x_p) - (F_{spi} + D_{spi}) \sin \alpha_{sp} \cos \beta + (F_{rpi} + D_{rpi}) \sin \alpha_{rp} \cos \beta + K_{cpi x} \delta_{cpi x} + C_{cpi x} \dot{\delta}_{cpi x} = 0 \\ m_p(\ddot{y}_p + 2\omega_c \dot{x}_p - \omega_c^2 y_p) - (F_{spi} + D_{spi}) \cos \alpha_{sp} \cos \beta - (F_{rpi} + D_{rpi}) \cos \alpha_{rp} \cos \beta + K_{cpi y} \delta_{cpi y} + C_{cpi y} \dot{\delta}_{cpi y} = 0 \\ m_p \ddot{z}_p + (F_{spi} + D_{spi}) \sin \beta - (F_{rpi} + D_{rpi}) \sin \beta + K_{cpi z} (z_c - z_{pi}) + C_{cpi z} (\dot{z}_c - \dot{z}_{pi}) = 0 \\ I_{pz} \ddot{\theta}_{pzi} + (F_{spi} + D_{spi}) r_{pi} \cos \beta - (F_{rpi} + D_{rpi}) r_{pi} \cos \beta = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中  $m_p$  和  $I_{pz}$  分别为行星轮的质量和转动惯量;  $\alpha_{sp}$  和  $\alpha_{rp}$  分别为行星轮与太阳轮和内齿圈公切线垂线与两齿轮中心连线之间的夹角;  $K_{cpi x}$ ,  $K_{cpi y}$  和  $K_{cpi z}$  分

别为径向和轴向支撑刚度,  $C_{cpiz}$ ,  $C_{cpiy}$  和  $C_{cpiz}$  为对应阻尼;  $\ddot{\theta}_{pzi}$  表示第  $j$  个行星轮的扭转角加速度;  $r_{pi}$  为行星轮分度圆半径。

利用四阶 Runge-Kutta 法求解上述方程得到修形前的行星齿轮传动系统动态特性如图 4 所示。其中, 动载系数  $K_v$  是齿轮强度计算中考虑齿轮振动引起的啮合力增大的影响系数, ISO 定义的计算公式为:  $K_v = F/F_0$ ,  $F$  为齿面动态啮合力,  $F_0$  为静态啮合力, 由静力学计算得到。由图 4 可见, 外啮合最大啮

合力达到了 3038 N, 均值为 2332 N, 内啮合最大啮合力达到了 3064 N, 均值为 2488 N; 外啮合动载系数极差为 0.4735, 内啮合动载系数极差为 0.3552, 可见修形前齿轮啮合力较高, 齿面承受较大载荷, 动载系数波动范围较大; 而外啮合动态传动误差最大值为 20.43  $\mu\text{m}$ , 极差为 9.86  $\mu\text{m}$ , 内啮合动态传动误差最大值为 13.75  $\mu\text{m}$ , 极差为 5.68  $\mu\text{m}$ , 可见修形前动态传动误差波动较大, 会引起较大的振动噪声, 因此进行齿面微观修形显得尤为必要。

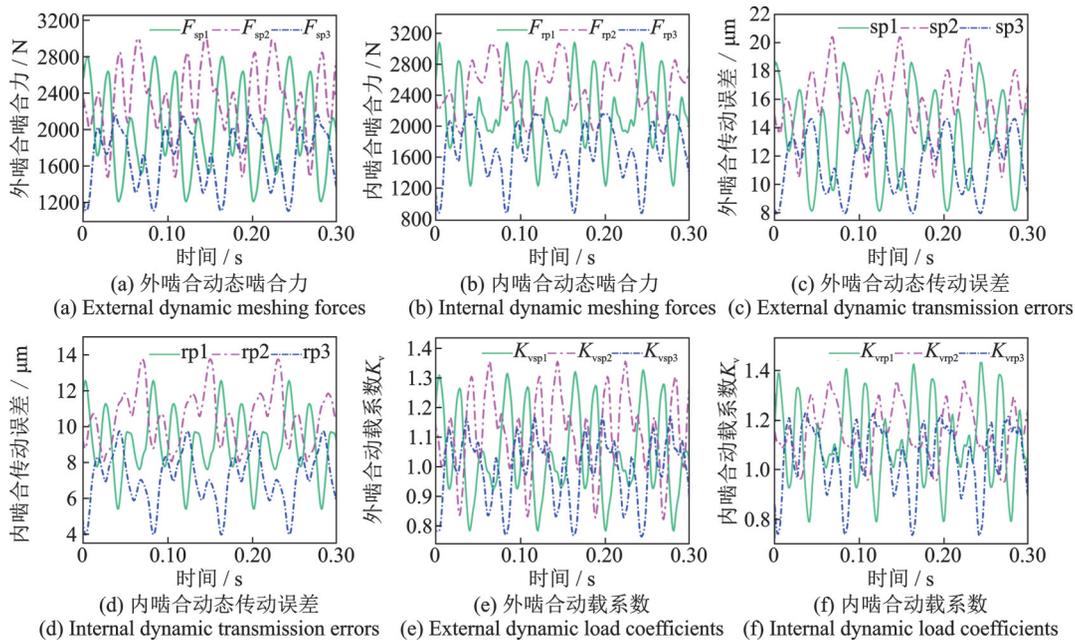


图 4 修形前行星齿轮传动系统动态特性

Fig. 4 Dynamic characteristics of unmodified planetary gear transmission system

## 2 行星齿轮传动系统修形研究

行星齿轮在制造、安装和受载时会产生误差和变形, 导致行星齿轮传动误差和齿面载荷发生变化, 造成齿轮系统的振动和噪声。齿轮微观修形可以改善齿面受载情况, 降低齿轮传动误差的波动, 从而有效抑制行星齿轮传动系统的振动和噪声。

### 2.1 修形齿面方程构建

对行星轮齿顶进行齿廓修形研究, 采用齿轮啮合原理推导修形函数在啮合线上的相对位移, 建立修形前后的齿面模型, 如图 5 所示。图 5 齿廓曲线中实线为修形前的渐开线齿廓, 虚线为修形后的渐开线齿廓,  $C_{amax}$  为最大修形量,  $L_c$  为修形长度,  $M$  和  $M'$  分别为修形前、后渐开线齿廓的起点。建立修形函数<sup>[13-14]</sup>如下:

修形前的齿面方程为:

$$\begin{cases} x_0 = r_b [\sin(u_k + \gamma_s - \theta') - u_k \cos(u_k + \gamma_s - \theta')] \\ y_0 = r_b [\cos(u_k + \gamma_s - \theta') + u_k \sin(u_k + \gamma_s - \theta')] \\ z_0 = r_b \gamma_s / \tan \beta_b \end{cases} \quad (10)$$

式中  $u_k$  为渐开线展角和压力角之和。

齿廓修形后的渐开线齿廓如图 5 的红色虚线所示, 修形齿廓的基圆半径变小, 各点压力角也随即发生变化。

修形后的齿面方程为:

$$\begin{cases} x_1 = r_b' [\sin(u_k + \gamma_s - \theta - \theta') - u_k \cos(u_k + \gamma_s - \theta - \theta')] \\ y_1 = r_b' [\cos(u_k + \gamma_s - \theta - \theta') + u_k \sin(u_k + \gamma_s - \theta - \theta')] \\ z_1 = r_b' \gamma_s / \tan \beta_b \end{cases} \quad (11)$$

式中  $\gamma_s$  为齿轮绕  $z$  轴的转角;  $\theta$  为  $M$  和  $M'$  点向径的夹角;  $\theta'$  为  $M$  点向径与  $y$  轴的夹角。  $\theta$  和  $\theta'$  分别计算

如下:

$$\begin{cases} \theta = \text{inv}\left(\arccos\frac{r'_b}{r_j}\right) - \text{inv}\left(\arccos\frac{r_b}{r_j}\right) \\ \theta' = \arctan\left(\frac{s_a}{2r_a}\right) + \tan\left(\arccos\frac{r'_b}{r_a}\right) - \arccos\frac{r'_b}{r_a} \end{cases} \quad (12)$$

式中  $r_b$  为基圆半径;  $r_a$  为齿顶圆半径;  $s_a$  为齿顶圆齿厚;  $r'_b$  为修形后基圆半径;  $r_j$  为修形起点向径。  $r'_b$  和  $r_j$  分别计算如下:

$$\begin{cases} r'_b = r_b \frac{\cos\alpha'_0}{\cos\alpha_0} \\ r_j = \sqrt{r_b^2 + \left\{ \sqrt{r_a^2 - r_b^2} - [\rho_b(\epsilon_a - 1)] \right\}^2} \end{cases} \quad (13)$$

式中  $\rho_b$  为基节;  $\alpha_0$  和  $\alpha'_0$  分别为修形前和修形后的分度圆压力角。  $\alpha'_0$  计算如下:

$$\begin{cases} \alpha'_0 = \alpha_0 + \frac{C_a}{\left(\sqrt{r_a^2 - r_b^2} - \sqrt{r_j^2 - r_b^2}\right) \tan\alpha_0} \\ C_a = C_{a\max} \frac{x}{L_c} \end{cases} \quad (14)$$

式中  $C_a$  为修形曲线上任一点的修形量;  $x$  为修形曲线上的点到修形起点的距离;  $L_c = (\epsilon_a - 1)\rho_b$  为修形长度, 修形起点为单双齿啮合交点, 即长齿廓修形。

通过上述齿面方程推导出齿轮修形函数为:

$$h = \left( \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right) \sin\alpha_k \quad (15)$$

式中  $\alpha_k$  为压力角;  $x_i, y_i (i=0, 1)$  为齿面坐标。

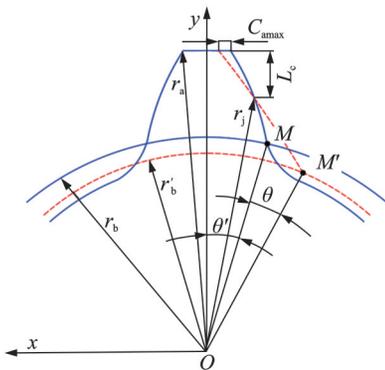


图5 齿廓修形示意图

Fig. 5 Schematic diagram of tooth profile modification

## 2.2 考虑修形的动力学方程

为了考虑齿廓修形对行星齿轮传动系统动态特性的影响,除了式(1)中的外载荷激励  $F$  外,将式(15)修形函数引起的额外激励  $E(x, t)$  引入动力

学方程中。

修形后啮合线上的等效位移为:

$$\begin{cases} \delta'_{spi} = \delta_{spi} - h_{sp} \\ \delta'_{rpi} = \delta_{rpi} - h_{rp} \end{cases} \quad (16)$$

式中  $h_{sp}, h_{rp}$  分别为内、外啮合副上的修形函数。

行星轮修形后的动力学方程为:

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_{pi} - (F_{spi} + D'_{spi}) \sin\alpha_{sp} \cos\beta + \\ (F_{rpi} + D'_{rpi}) \sin\alpha_{rp} \cos\beta + K_{cpix} \delta_{cpix} + C_{cpix} \dot{\delta}_{cpix} = \\ -K_{sp} h_{sp} \sin\alpha_{sp} \cos\beta + K_{rp} h_{rp} \sin\alpha_{rp} \cos\beta \\ m_p \ddot{y}_{pi} - (F_{spi} + D'_{spi}) \cos\alpha_{sp} \cos\beta - \\ (F_{rpi} + D'_{rpi}) \cos\alpha_{rp} \cos\beta + K_{cpiy} \delta_{cpiy} + C_{cpiy} \dot{\delta}_{cpiy} = \\ K_{sp} h_{sp} \cos\alpha_{sp} \cos\beta + K_{rp} h_{rp} \cos\alpha_{rp} \cos\beta \\ m_p \ddot{z}_{pi} + (F_{spi} + D'_{spi}) \sin\beta - (F_{rpi} + D'_{rpi}) \sin\beta + \\ K_{cpiz} (z_c - z_{pi}) + C_{cpiz} (\dot{z}_c - \dot{z}_{pi}) = K_{sp} h_{sp} \sin\beta - \\ K_{rp} h_{rp} \sin\beta \\ I_{pz} \ddot{\theta}_{pi} + (F_{spi} + D'_{spi}) r_{pi} \cos\beta - (F_{rpi} + D'_{rpi}) r_{pi} \cos\beta = \\ -K_{sp} h_{sp} r_{pi} \cos\beta + K_{rp} h_{rp} r_{pi} \cos\beta \end{cases} \quad (17)$$

式中  $D'_{rpi}, D'_{spi}$  分别为修形后内、外啮合齿轮副啮后阻尼力。

修形后的行星轮动力学方程除了由  $\delta_{spi}$  和  $\delta_{rpi}$  变为  $\delta'_{spi}$  和  $\delta'_{rpi}$ , 其余部分没有变化。所以修形后行星轮方程右侧的额外激励可以表示为矩阵形式:

$$\begin{aligned} E_{pi}(x, t) = & \\ & K_{sp} h_{sp} \begin{bmatrix} -\sin\alpha_{sp} \cos\beta & \cos\alpha_{sp} \cos\beta & \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}^T + \\ & K_{rp} h_{rp} \begin{bmatrix} \sin\alpha_{rp} \cos\beta & \cos\alpha_{rp} \cos\beta & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (18)$$

类似地,太阳轮和内齿圈的额外激励为:

$$\begin{cases} E_s(x, t) = \sum_{i=1}^N K_{sp} h_{sp} \cdot \\ \begin{bmatrix} \sin\psi_{sp} \cos\beta & -\cos\psi_{sp} \cos\beta & -\sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}^T \\ E_r(x, t) = \sum_{i=1}^N K_{rp} h_{rp} \cdot \\ \begin{bmatrix} -\sin\psi_{rp} \cos\beta & -\cos\psi_{rp} \cos\beta & \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (19)$$

式中  $\psi_{rp}$  和  $\psi_{sp}$  分别为内、外啮合啮合角。

因此,行星齿轮传动系统的全局额外激励可表示为如下的矩阵形式:

$$E(x, t) = \begin{bmatrix} E_s(x, t) & 0 & E_r(x, t) & E_{pi}(x, t) \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

引入额外激励后公式(1)变为:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F + E(x, t) \quad (21)$$

### 3 计入齿轮修形的传动系统动态特性

#### 3.1 行星齿轮传动系统动态特性

设定不同的行星轮修形量研究其对行星齿轮传动系统动态特性的影响。图6~8给出了不同修形量下的行星齿轮传动系统动态啮合力、动态传动误差和动载系数曲线。

图6(a)和(c)给出了不同修形量下外啮合和内啮合动态啮合力的变化曲线,图6(b)和(d)给出了动态啮合力的均值、最大值和极差变化。可以看到随着修形量的增大,外啮合、内啮合的动态啮合力逐渐减小,当修形量为15 μm时动态啮合力的均值、最大值和极差达到最小,此后当修形量继续增加,动态啮合力的各项参数又开始增大。从表2中可以看到,外啮合动态啮合力最大值由修形前的3038 N减小到2657 N,下降了12.54%,内啮合动态啮合力最大值从3064 N减小到2631 N,下降了14.13%,此后开始增大。

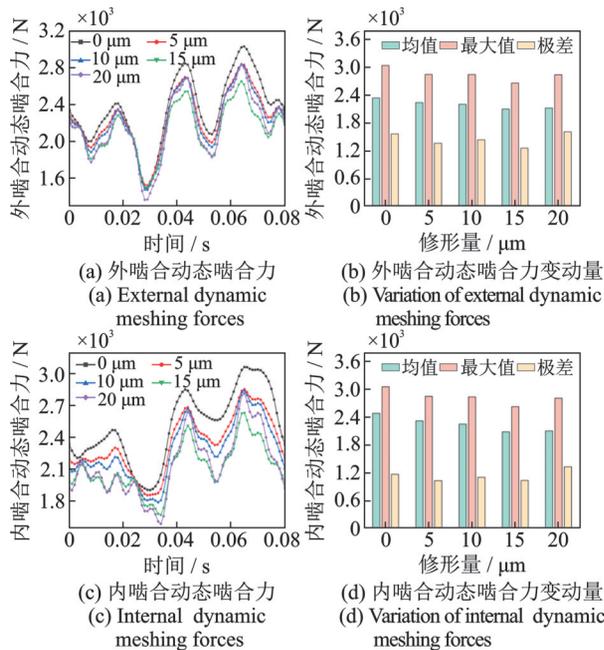


图6 修形量对动态啮合力的影响

Fig. 6 Effects of modification amount on dynamic meshing force

表2 行星齿轮传动系统动态啮合力变化

Tab. 2 Variation of dynamic meshing forces of planetary gear transmission system

	外啮合(s-p) 动态啮合力/N			内啮合(r-p) 动态啮合力/N		
	均值	最大值	极差	均值	最大值	极差
修形前	2332	3038	1550	2488	3064	1163
修形后	2091	2657	1241	2083	2631	1029
下降率	10.33%	12.54%	19.94%	16.28%	14.13%	11.52%

图7(a)和(c)给出了不同修形量下外啮合和内啮合动态传动误差的变化曲线,图7(b)和(d)为其均值、最大值和极差变化。表3为其修形前后的数值变化,可以看到随着修形量的增大,外啮合和内啮合的动态传动误差波动范围趋于平稳,当修形量为15 μm时均值、最大值和极差达到最小,外啮合动态传动误差极差由修形前的9.86 μm减小到7.03 μm,下降了28.70%,内啮合动态传动误差极差由修形前的5.68 μm减小到3.94 μm,下降了30.63%,此后开始增大,内、外啮合的动态传动误差极差下降率较大,表明动态传动误差的波动量下降明显。

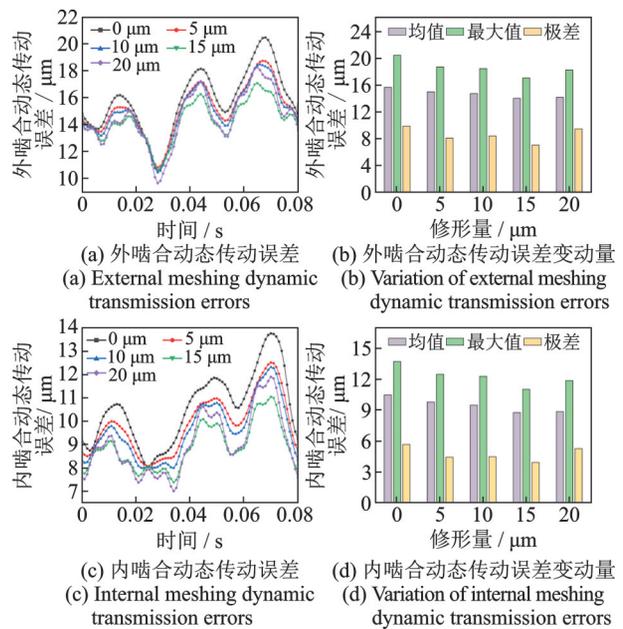


图7 修形量对动态传动误差的影响

Fig. 7 Effects of modification amount on dynamic transmission error

表3 行星齿轮传动系统动态传动误差变化

Tab. 3 Variation of dynamic transmission errors of planetary gear transmission system

	外啮合(s-p) 动态传动误差/μm			内啮合(r-p) 动态传动误差/μm		
	均值	最大值	极差	均值	最大值	极差
修形前	15.64	20.43	9.86	10.5	13.75	5.68
修形后	14	17.05	7.03	8.79	11.05	3.94
下降率	10.49%	16.54%	28.70%	16.29%	19.64%	30.63%

图8(a)和(c)给出了不同修形量下内、外啮合动载系数 $K_v$ 的变化曲线,图8(b)和(d)给出了 $K_v$ 的均值、最大值和极差变化。表4为修形前后 $K_v$ 数值的变化。由图8可见,随着修形量的增大,内、外啮合的 $K_v$ 值逐渐减小,当修形量为15 μm时动载系数的三项变动量达到最小,外啮合 $K_v$ 均值由修形前的0.7123减小到0.6386,下降了10.35%,内啮合 $K_v$ 均

值从 0.7599 减小到 0.6364,下降了 16.25%,此后开始增大。综上所述,当修形量为 15  $\mu\text{m}$  时,行星齿轮传动系统的动态啮合力、动态传动误差、 $K_v$  的最大值、均值和极差都达到最小,经过修形后,齿面载荷减小、动态传动误差波动量降低,有利于减小行星齿轮传动系统的振动噪声,对于增加齿面承载能力,延长齿轮的使用寿命具有重要意义。

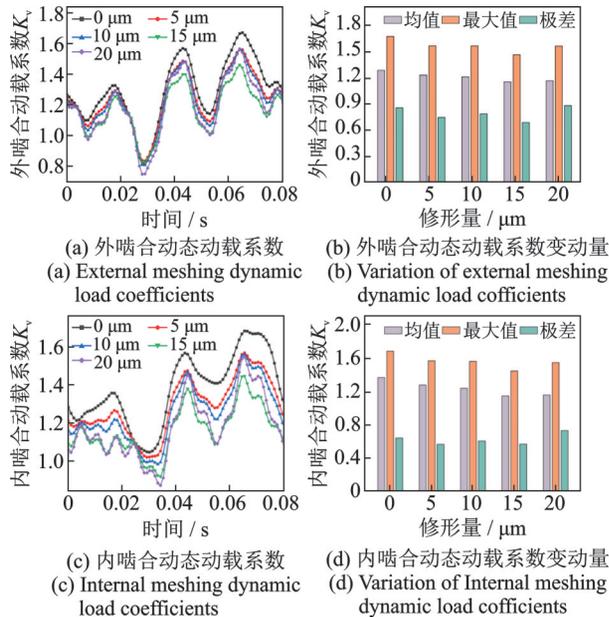


图 8 修形量对动载系数的影响  
Fig. 8 Effects of modification amount on dynamic load coefficient

表 4 行星齿轮传动系统动载系数变化

Tab. 4 Variation of load coefficients of planetary gear transmission system

	外啮合(s-p)动载系数 $K_v$			内啮合(r-p)动载系数 $K_v$		
	均值	最大值	极差	均值	最大值	极差
修形前	0.7123	0.9279	0.4735	0.7599	0.9359	0.3552
修形后	0.6386	0.8116	0.3792	0.6364	0.8037	0.3144
下降率	10.35%	12.53%	19.92%	16.25%	32%	11.49%

### 3.2 行星齿轮传动系统样机性能测试

动态传动误差、动态啮合力、动载系数是衡量行星齿轮传动系统振动噪声的重要参数,通过上述数值理论研究得出了最佳修形量。负载能力和噪声等级是行星齿轮传动系统最严格的出厂检验指标。因此,为了验证修形前后样机的负载能力和噪声水平,对样机行星轮进行齿廓修形,修形量  $C_{\text{max}}=15 \mu\text{m}$ 。加工装配后在同等测试环境下进行负载和噪声测试,样机如图 9(a)所示。

图 9(b)为样机负载测试示意图,将样机安装于负载测试仪,设置电机转速为 3000 r/min,启动电

源,使电机正反转各 90 s,记录每台样机最大负载扭矩如表 5 所示。修形前负载扭矩平均值为 261.54 N·m,修形后为 290.24 N·m,提升了约 10.97%。随后在空载环境下进行噪声测试,将样机放置于噪声测试台上与电机相连,工业噪声分贝仪与样机距离  $L=100 \text{ cm}$ ,如图 9(c)所示。使电机正反转各 8 s,期间无异音、传动平稳,分别记录 5 台样机的噪声值如表 5 所示。修形前最大噪声分贝值为 65 dB,平均值为 63.6 dB,修形后样机最大噪声分贝值为 55 dB,平均值为 54.3 dB,平均值降低了约 14.62%,噪声降低明显。经过齿轮修形优化后,行星齿轮传动系统样机性能得到改善。

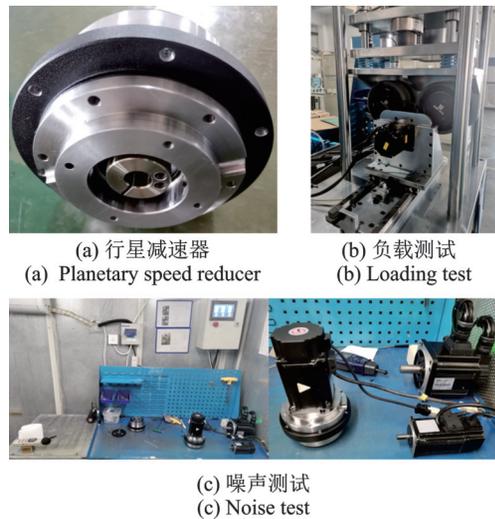


图 9 行星减速器实物及整机测试  
Fig. 9 Physical and whole machine test of planetary speed reducer

表 5 样机性能测试数据

Tab. 5 Test data of prototype performance

测试台数	噪声/dB		负载扭矩/(N·m)	
	修形前	修形后	修形前	修形后
1	62.5	54	264.6	291.1
2	63	54.5	258.7	289.4
3	65	55	263.3	292.3
4	64	53	259.8	287.6
5	63.5	55	261.3	290.8

## 4 结 论

(1) 采用集中参数法建立行星齿轮传动系统考虑偏心误差和安装误差的弯-扭-轴耦合动力学模型,以四阶 Runge-Kutta 法求解方程分析动态啮合力、动态传动误差和动载系数的变化规律。

(2) 建立了行星轮齿廓修形前、后的齿面方程,

推导了齿廓修形函数和修形后的传动误差,将修形函数引起的额外激励引入动力学方程,求解方程得到不同修形量下的动态啮合力、动态传动误差和动载系数,当修形量增加到  $15\ \mu\text{m}$  时行星齿轮传动系统的动态特性达到最小,此后开始增大,表明修形量太大反而使系统动态特性变差。

(3) 确定最佳修形量为  $15\ \mu\text{m}$ ,此时外啮合啮合力最大值下降了  $12.54\%$ ,内啮合啮合力最大值下降了  $14.13\%$ ;外啮合动态传动误差极差下降了  $28.70\%$ ,内啮合动态传动误差极差下降了  $30.63\%$ ;外啮合  $K_v$  均值下降了  $10.35\%$ ,内啮合  $K_v$  均值下降了  $16.25\%$ 。各项指标均有不同程度的降低,经过整机性能测试发现行星齿轮传动系统承载能力得到改善,噪声降低,为高端机械装备行星齿轮传动系统的减振降噪、传动效率提升提供了理论依据和技术支撑。

#### 参考文献:

- [1] 于蓬,章桐,冷毅,等. 电动车减/差速器振动特性分析及改进[J]. 振动与冲击, 2015, 34(7): 85-92.  
YU Peng, ZHANG Tong, LENG Yi, et al. Vibration characteristics analysis and improvement of differential/reducer of electric vehicle[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(7): 85-92.
- [2] MO Shuai, ZHANG Yingxin, SONG Yuling, et al. Nonlinear vibration and primary resonance analysis of nonorthogonal face gear-rotor-bearing system[J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 108(4): 3367-3389.
- [3] MO Shuai, LUO Bingrui, SONG Wenhao, et al. Geometry design and tooth contact analysis of non-orthogonal asymmetric helical face gear drives[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 173: 104831.
- [4] MO Shuai, ZHANG Ting, JIN Guoguang, et al. Analytical investigation on load sharing characteristics of herringbone planetary gear train with flexible support and floating sun gear [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 144: 103670.
- [5] 莫帅,岳宗享,冯志友,等. 面齿轮-行星传动串联系统静力学均载特性研究[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2020, 48(11): 60-66.  
MO Shuai, YUE Zongxiang, FENG Zhiyou, et al. Research on static load sharing characteristics of face gear-planetary transmission compound system[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2020, 48(11): 60-66.
- [6] 杨通强,宋轶民,张策,等. 斜齿行星齿轮系统自由振动特性分析[J]. 机械工程学报, 2005, 41(7): 50-55.  
YANG Tongqiang, SONG Yimin, ZHANG Ce, et al. Property analysis of free vibration of helical planetary gear trains[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(7): 50-55.
- [7] Bahk C J, Parker R G. Analytical investigation of tooth profile modification effects on planetary gear dynamics [J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70: 298-319.
- [8] 魏静,王刚强,秦大同,等. 考虑修形的斜齿轮系统非线性激励与动力学特性研究[J]. 振动工程学报, 2018, 31(4): 561-572.  
WEI Jing, WANG Gangqiang, QIN Datong, et al. Nonlinear excitation and dynamic characteristics of helical gear system with considering modification[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(4): 561-572.
- [9] 陈洪月,朱煜,毛君,等. 齿廓修形对渐开线直齿轮设计传递误差的影响[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2018, 46(3): 91-97.  
CHEN Hongyue, ZHU Yu, MAO Jun, et al. Influence of tooth profile modification on design transmission error of involute spur gear[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2018, 46(3): 91-97.
- [10] CHEN Zaigang, ZHOU Ziwei, ZHAI Wanming, et al. Improved analytical calculation model of spur gear mesh excitations with tooth profile deviations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 149: 103838.
- [11] CHEN Zaigang, SHAO Yimin. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 62: 63-74.
- [12] Maatar M, Velex P. An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: some possible applications in gear dynamics[J]. Journal of Mechanical Design, 1996, 118: 586-589.
- [13] 张俊,陈涛,汪建. 基于最小动态传动误差波动量的斜齿行星轮系齿轮修形研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(19): 77-88.  
ZHANG Jun, CHEN Tao, WANG Jian. Tooth modification of helical planetary gear train based on minimum dynamic transmission error fluctuation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(19): 77-88.
- [14] ZHANG Jun, GUO Fan. Statistical modification analysis of helical planetary gears based on response surface method and Monte Carlo simulation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(6): 1194-1203.

## Dynamic characteristics of planetary gear transmission system with tooth profile modification

MO Shuai<sup>1,4</sup>, LIU Zhi-peng<sup>2</sup>, LUO Bing-ru<sup>2</sup>, CEN Guo-jian<sup>3</sup>, XU Jia-ke<sup>3</sup>

(1.School of Mechanical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China; 2.School of Mechanical Engineering, Tiangong University, Tianjin 300387, China; 3.Ningbo Zhongda Leader Transmission Equipment Co., Ltd., Ningbo 315301, China; 4.State Key Laboratory of Digital Manufacturing Equipment and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** In order to meet the requirements of high transmission efficiency and low noise in the planetary gear transmission system, the bending-torsion-shaft coupling power of helical planetary gear transmission system was established by employing the lumped parameter method, with considerations for eccentricity error and installation error. Using the fourth-order Runge-Kutta method to solve the dynamic equation, the dynamic characteristics of the planetary gear, such as the dynamic meshing force, dynamic transmission error, and dynamic load coefficient, were obtained. Based on this, the planetary gear modification research is carried out, and the tooth profile modification is established. Upon establishing the tooth surface equation and the dynamic equation that takes tooth surface modification into account, an analysis was conducted on the dynamic characteristics corresponding to varying degrees of modification. The research results show that with the increase of the modification amount, the dynamic meshing force, dynamic transmission error and dynamic load coefficient of the planetary gear all decrease to varying degrees, and then increase after reaching the lowest value. Performance testing of the entire machine revealed a reduction in vibration and noise of the planetary reducer, as well as an improvement in transmission performance providing theoretical support for the design of vibration reduction, noise reduction and transmission efficiency improvement of the planetary gear transmission system.

**Key words:** planetary gear transmission system; gear modification; dynamic meshing force; dynamic transmission error

作者简介: 莫 帅(1987—),男,博士,教授,博士生导师。E-mail: moshuai2010@163.com。