

复合材料双层球壳与环板耦合结构 振动特性研究

史冬岩¹, 张颖^{1,2}, 何东泽¹

(1. 哈尔滨工程大学机电工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 黑龙江八一农垦大学工程学院, 黑龙江 大庆 163319)

摘要:以一阶剪切变形理论为基础, 采用谱几何法对不同边界条件下复合材料双层球壳与环板耦合结构振动特性分析模型进行构建, 其中采用人工虚拟弹簧技术模拟耦合结构的边界条件。根据耦合处的连接关系, 通过布置耦合弹簧模拟器对子结构之间的耦合关系进行模拟。应用哈密顿原理对复合材料双层球壳与环板耦合结构的特征方程进行推导, 对耦合结构的固有特性和稳态响应进行求解。将所得结果与有限元结果进行对比, 验证了计算的正确性。分析了几何参数、材料参数对复合材料双层球壳与环板耦合结构振动响应的影响。

关键词: 耦合结构; 振动特性; 复合材料双层球壳; 环板; 谱几何法

中图分类号: O327; TB334 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)02-0258-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.02.008

引言

复合材料因其具有较为良好的力学性能, 已经广泛应用于航空航天、高速列车、海洋运输等工程领域。相应地, 对于复合材料的结构构型逐渐复杂, 应用范围逐渐从单一壳体转化为耦合壳体结构, 使其能够适用于多种工程结构, 如发动机部件、载人航球舱等, 其中水下航行体双壳艇体艏部可简化为双层球壳结构, 内外壳之间由环形肋板连接。同时, 由于该种复合材料耦合结构的工作环境较为恶劣, 伴随着多种外界激励, 对结构工作稳定性以及安全性具有较为严重的影响。因此, 有必要建立不同边界条件下复合材料耦合结构的振动特性分析模型, 分析不同参数的影响情况。

目前, 众多学者对不同边界条件下球壳结构振动特性的研究逐渐深入, 具有较多的科研成果。Qu 等^[1]采用改进的变分原理和多段划分技术建立了复合材料层合柱、锥、球壳振动分析的统一预测模型, 预报了层合回转中厚壳在各种经典和非经典边界条件组合下的自由、稳态和瞬态振动。Su 等^[2]基于一阶剪切变形壳理论, 提出了具有一般边界约束的任意功能梯度球壳振动分析的统一解。Bryan^[3]提出了一种解析推导薄球壳运动微分方程的新方法, 利用勒让德多项式获得控制微分方程的解析解, 研究

了简支和固支条件下半球薄壳自由振动。Xie 等^[4]提出了一种半解析方法, 将球壳划分成多个窄条, 通过组合相邻条带的所有连续性条件和边界条件建立了相应的控制方程, 同时采用幂级数展开来表示结构的位移函数, 研究了具有弹性边界条件和厚度不连续性的开口薄球壳轴对称和非对称振动。Du 等^[5]将 Flügge 薄壳理论与能量法相结合, 提出了一种研究不同边界约束下球壳振动特性的广义方法。Mantari 等^[6]提出了一种基于高阶剪切变形理论的动力学模型, 采用有限元法研究正交铺设层合球壳和圆柱壳的自由振动和弯曲性能。Guo 等^[7]应用数值谱-切比雪夫方法求解了复合材料层合锥壳、圆柱壳和球壳在各种边界条件下的耦合结构自由振动的强解。Chen 等^[8]利用 Dirac-delta 函数推导了弹性双层薄球壳的振动和声辐射的半解析解, 获得了水下双球壳振动和声辐射半解析强解, 数值结果表明对于任意频率范围的激励, 该解法具有较好的计算效率和精度。Sayyad 等^[9]利用广义高阶壳理论, 得到了复合材料层合球壳和夹层球壳静力弯曲和自由振动分析的高阶闭式解, 但该模型局限于简支边界条件。基于一阶剪切变形理论, Kim 等^[10]采用 Haar 小波离散化方法, 提出了研究了变厚度复合材料层合球壳的自由振动特性。Xie 等^[11]基于积分正交多项式的谱配置法提出了一种轴对称层合材料圆锥-圆柱-球壳-环形板耦合壳结构自由振动分析模型。

收稿日期: 2022-05-17; 修订日期: 2022-06-19

基金项目: 黑龙江省自然科学基金面上项目(E2016024)。

Pang 等^[12]基于多段划分策略和一阶剪切变形理论建立了分析模型,位移函数由沿轴向的雅可比多项式和沿周向的傅里叶级数组成,为了获得连续性条件并满足任意边界条件,采用 Rayleigh-Ritz 方法求解了复合材料圆柱-球壳耦合壳体的自由振动问题。

可以看出,目前对于球壳结构振动特性分析模型的建立主要是集中于单层壳体结构,对于双层壳体耦合结构振动特性分析模型的建立仍存在空缺。同时,复合材料的良好力学特性,相比于各向同性材料具有更为广泛的应用空间。因此,建立不同边界条件下复合材料双层球壳和环板耦合结构振动特性分析模型具有良好的理论价值和工程意义,能够为复合材料结构在水下潜艇以及航空发动机等领域的应用提供一定的理论参考。

本文采用谱几何法,建立不同边界条件下复合材料双层球壳与环板耦合结构振动特性的数学模型。采用人工虚拟弹簧技术模拟耦合结构的边界条件以及各个子结构之间的耦合关系。基于哈密顿原理,对复合材料双层球壳与环板耦合结构的特征方程进行推导,并对得到的结果进行验证。开展了相关参数化研究工作,探讨了不同参数对复合材料双层球壳与环板耦合结构振动响应的影响情况。

1 模型的建立

图 1 为正交坐标系 (α, β, z) 的示意图。其中, L_α 和 L_β 分别表示结构沿 α 和 β 方向上的长度; R_α 和 R_β 分别表示结构沿 α 和 β 方向上的曲率半径。

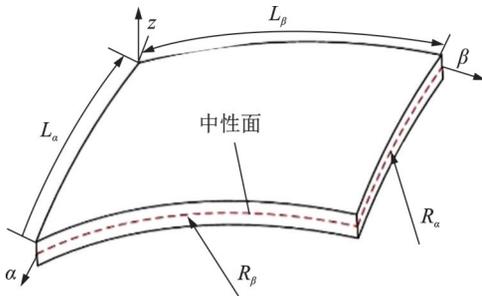


图 1 正交坐标系示意图

Fig. 1 Diagram of orthogonal coordinate system

对于本文所建立的双层球壳与环板耦合结构,采用所建立的正交坐标系,对不同的长度参数和曲率半径和用 A 和 B 表示的拉梅常数进行设置,即可对球壳和环板子结构的运动关系进行表述。具体参数设置为:

- 圆环板: $\alpha = r, \beta = \theta, R_\alpha = \infty, R_\beta = \infty, A = 1, B = r;$
- 球壳: $\alpha = \varphi, \beta = \theta, R_\alpha = R_\beta = R, A = R, B = R \sin \varphi.$

本文所建立的复合材料双层球壳与环板耦合结

构模型如图 2 所示。其中外部球壳和内部球壳的半径分别定义为 R_1 和 R_0 ;球壳顶端与底端的夹角定义为 φ_0 和 φ_1 ;环板位置定义为 φ_2 ;定义外球壳和内球壳的厚度为 H_1 和 H_2 ,环板的厚度定义为 h 。为了模拟壳体处于不同边界条件的情况,采用虚拟弹簧技术用以模拟任意边界条件下复合材料壳体结构的边界情况。所布置的边界弹簧模拟器由线性弹簧 $\{K^u, K^v, K^w\}_{\alpha=0, L_\alpha}$ 和扭转弹簧 $\{K^\alpha, K^\beta\}_{\alpha=0, L_\alpha}$ 相结合的形式构成。

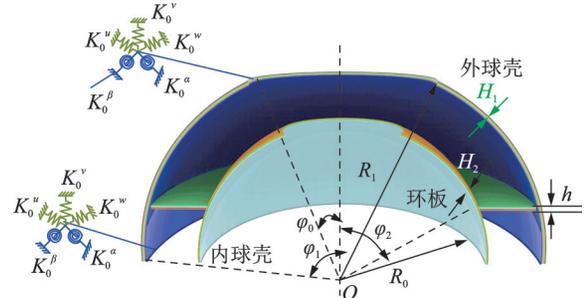


图 2 双层球壳与环板耦合结构模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the coupled structure model of double-layer spherical shell and annular plate

2 结构运动关系和应力-应变关系

基于一阶剪切变形理论,壳体上任意一点的位移变量 $U(\alpha, \beta, z, t), V(\alpha, \beta, z, t)$ 和 $W(\alpha, \beta, z, t)$ 表示为^[13]:

$$\begin{cases} U(\alpha, \beta, z, t) = u_0(\alpha, \beta, t) + z\psi_\alpha(\alpha, \beta, t) \\ V(\alpha, \beta, z, t) = v_0(\alpha, \beta, t) + z\psi_\beta(\alpha, \beta, t) \\ W(\alpha, \beta, z, t) = w_0(\alpha, \beta, t) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $u_0(\alpha, \beta, t), v_0(\alpha, \beta, t)$ 和 $w_0(\alpha, \beta, t)$ 分别为 α, β, z 方向上的位移变量; $\psi_\alpha(\alpha, \beta, t)$ 和 $\psi_\beta(\alpha, \beta, t)$ 分别为关于 β 轴和 α 轴的旋转变量; t 表示时间变量。

同时,可以得到复合锥壳结构第 k 层的应变表达式为:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \epsilon_\alpha \\ \epsilon_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_\alpha^0 \\ \epsilon_\beta^0 \\ \gamma_{\alpha\beta}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_\alpha \\ \chi_\beta \\ \chi_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{\alpha z} \\ \gamma_{\beta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial \alpha \\ \partial w_0 / \partial \beta \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

式中 $Z_k < z < Z_{k+1}$,其中 Z_k 和 Z_{k+1} 表示层合板敷设层数; $\epsilon = \{\epsilon_\alpha^0, \epsilon_\beta^0, \gamma_{\alpha\beta}^0\}^T$ 表示正应变和剪应变; $\chi = \{\chi_\alpha, \chi_\beta, \chi_{\alpha\beta}\}^T$ 表示弯曲和扭转曲率变化; $\gamma = \{\gamma_{\alpha z}, \gamma_{\beta z}\}^T$ 表示横向剪应变,具体形式为^[14]:

$$\begin{cases} \epsilon_\alpha^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v_0}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_\alpha} \\ \epsilon_\beta^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_\beta} \\ \gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u_0}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \chi_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\psi_\beta}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ \chi_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \beta} + \frac{\psi_\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\psi_\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\psi_\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \gamma_{\alpha z} = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \psi_\alpha \\ \gamma_{\beta z} = \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \psi_\beta \end{cases} \quad (5)$$

根据胡克定律,复合材料壳体的应力可以表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\beta z} \\ \tau_{\alpha z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^k & \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{16}^k & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{22}^k & \overline{Q}_{26}^k & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{16}^k & \overline{Q}_{26}^k & \overline{Q}_{66}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{44}^k & \overline{Q}_{45}^k \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{45}^k & \overline{Q}_{55}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} \\ \gamma_{\beta z} \\ \gamma_{\alpha z} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中 $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\}^T$ 为正应力; $\{\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\beta z}, \tau_{\alpha z}\}^T$ 为剪应力; $\overline{Q}_{ij}^k (i, j=1, 2, 4, 5, 6)$ 表示层合板的刚度系数,由材料的弹性刚度系数 $Q_{ij}^k (i, j=1, 2, 4, 5, 6)$ 表示,对于正交各向异性材料中的第 k 层而言,具体表达式为^[1]:

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, & Q_{12}^k &= \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = Q_{21}^k, \\ Q_{22}^k &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, & Q_{44}^k &= G_{23}, & Q_{55}^k &= G_{13}, & Q_{66}^k &= G_{12} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 E_1 和 E_2 表示弹性模量; μ_{12} 表示泊松比; G_{12} , G_{13} 和 G_{23} 表示剪切模量。根据应力-应变关系,复合材料壳体的本构方程为:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$Q = A'\gamma \quad (9)$$

式中 $N = \{N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}\}^T$ 为法向力和剪切力; $M = \{M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}\}^T$ 为弯矩和扭转力矩; $Q = \{Q_\beta, Q_\alpha\}^T$ 为横向剪切力; A 和 A' 为拉伸刚度系数矩阵, B 为拉伸-弯曲耦合刚度系数矩阵, D 为弯曲刚度系数矩阵,具体表示为:

$$A = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^k & \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{16}^k \\ \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{22}^k & \overline{Q}_{26}^k \\ \overline{Q}_{16}^k & \overline{Q}_{26}^k & \overline{Q}_{66}^k \end{bmatrix} (Z_{k+1} - Z_k) \quad (10)$$

$$A' = K_c \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44}^k & \overline{Q}_{45}^k \\ \overline{Q}_{45}^k & \overline{Q}_{55}^k \end{bmatrix} (Z_{k+1} - Z_k) \quad (11)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^k & \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{16}^k \\ \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{22}^k & \overline{Q}_{26}^k \\ \overline{Q}_{16}^k & \overline{Q}_{26}^k & \overline{Q}_{66}^k \end{bmatrix} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) \quad (12)$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^k & \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{16}^k \\ \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{22}^k & \overline{Q}_{26}^k \\ \overline{Q}_{16}^k & \overline{Q}_{26}^k & \overline{Q}_{66}^k \end{bmatrix} (Z_{k+1}^3 - Z_k^3) \quad (13)$$

式中 K_c 为剪切修正系数, N 表示材料层数。

3 能量表达式及耦合连接关系

通过对复合材料壳体的应变表达式以及本构关系式的推导,接下来将对复合材料壳体的能量表达式进行求解。其中,壳体的应变势能 U_V 可以表示为:

$$U_V = \frac{1}{2} \int_S \{N^T \varepsilon + M^T \chi + Q^T \gamma\} dS \quad (14)$$

式中 S 表示壳结构中中性面积。

将式(3)~(5),式(8)和(9)代入式(14)中,即可得到复合材料层合壳体结构的应变势能 U_V 表达式。相应地,壳体结构的动能 T 可以表示为:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iint \left\{ I_0 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad 2I_1 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi_\beta}{\partial t} \right) \right] + \\ &\quad \left. I_2 \left[\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\beta}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (15)$$

式中 I_0, I_1 和 I_2 为惯性矩,具体表示为:

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \rho^k \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (16)$$

式中 ρ^k 表示材料质量密度。

由于采用虚拟弹簧技术模拟边界条件,则复合材料壳体结构的边界弹性势能 U_p 可以表示为^[15]:

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \iint \left\{ \left[K_0^u u_0^2 + K_0^v v_0^2 + K_0^w w_0^2 + K_0^\alpha \psi_x^2 + K_0^\beta \psi_\theta^2 \right] \Big|_{\alpha=0} + \right. \\ &\quad \left. \left[K_{L\alpha}^u u_0^2 + K_{L\alpha}^v v_0^2 + K_{L\alpha}^w w_0^2 + K_{L\alpha}^\alpha \psi_x^2 + K_{L\alpha}^\beta \psi_\theta^2 \right] \Big|_{\alpha=L\alpha} \right\} B d\beta \end{aligned} \quad (17)$$

令 $\alpha = x, \beta = \theta, R_\alpha = \infty, R_\beta = x \tan \alpha_0, \alpha_0 = \pi/2$, 根据式(14), (15) 和 (17), 则可以得到圆环板结构应变势能 U_{Vs} 、动能 T_s 以及外力功 U_{Ps} 的表达式。相似地, 令 $\alpha = \varphi, \beta = \theta, R_\alpha = R, R_\beta = R$, 可以得到球壳结构应变势能 U_{Vs} 、动能 T_s 以及外力功 U_{Ps} 的表达式。

以外部球壳和圆环板连接处的关系为例, 上角

标“a”和“s”分别表示对应圆环板结构和球壳结构,耦合结构连接处的连接关系可以表示为:

$$\begin{cases} w_0^a = w_0^s \sin \varphi_0 - u_0^s \cos \varphi_0 \\ v_0^a = v_0^s \\ u_0^a = w_0^s \cos \varphi_0 + u_0^s \sin \varphi_0 \\ \psi_r^a = \psi_r^s \\ \psi_\theta^a = \psi_\theta^s \end{cases} \quad (18)$$

与边界虚拟弹簧类似,采用耦合弹簧模拟器表述球壳与环板之间的耦合连接条件。耦合弹簧由线性弹簧 $\{k_u, k_v, k_w\}$ 和扭转弹簧 $\{k_\alpha, k_\beta\}$ 组合而成,则由耦合弹簧模拟器转化的弹性势能 V_{s-a} 可以表示为:

$$\begin{aligned} V_{s-a} = & \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{L_\alpha} \left\{ k_u (w_0^a - w_0^s \sin \varphi_0 + u_0^s \cos \varphi_0)^2 + \right. \\ & k_v (v_0^a - v_0^s)^2 + k_w (u_0^a - w_0^s \cos \varphi_0 - u_0^s \sin \varphi_0)^2 + \\ & \left. k_\alpha (\psi_r^a - \psi_r^s)^2 + k_\beta (\psi_\theta^a - \psi_\theta^s)^2 \right\} B d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (19)$$

假设复合材料双层圆柱壳结构系统中只在内、外壳上受到径向点力的作用,外力对系统所做的功为:

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} F_0 \delta(x - x_F) \delta(\theta - \theta_F) w_c^2(x, \theta) R_p d\theta dx \quad (20)$$

式中 δ 为狄拉克函数, F_0 为激励力幅值,外力作用位置的坐标为 (x_F, θ_F) 。

4 位移容许函数

谱几何法是基于传统傅里叶级数法所提出的一种数值求解方法,隶属于改进傅里叶级数法的一种。采用统一三角函数表示辅助函数,相比于传统的改进傅里叶级数法,位移表达式更加简明,并且在运算过程中效率较高^[16-18]。对于复合材料球壳和圆环板结构,将位移容许函数在 β 方向采用正弦级数展开,在 α 方向上根据谱几何法展开,具体可以表示为:

$$u_0^{a,s}(\alpha, \beta, t) = [\Theta_u(\alpha, \beta), \Theta_u^f(\alpha, \beta)] A_u e^{j\omega t} \quad (21)$$

$$v_0^{a,s}(\alpha, \beta, t) = [\Theta_v(\alpha, \beta), \Theta_v^f(\alpha, \beta)] A_v e^{j\omega t} \quad (22)$$

$$w_0^{a,s}(\alpha, \beta, t) = [\Theta_w(\alpha, \beta), \Theta_w^f(\alpha, \beta)] A_w e^{j\omega t} \quad (23)$$

$$\psi_\theta^{a,s}(\alpha, \beta, t) = [\Theta_\theta(\alpha, \beta), \Theta_\theta^f(\alpha, \beta)] A_\theta e^{j\omega t} \quad (24)$$

$$\psi_r^{a,s}(\alpha, \beta, t) = [\Theta_r(\alpha, \beta), \Theta_r^f(\alpha, \beta)] A_\beta e^{j\omega t} \quad (25)$$

式中 Θ_q 和 Θ_q^f ($q=u, v, w, \alpha, \beta$) 分别表示壳体结构的位移函数和边界补充多项式; A_q 为位移容许函数的待展开求解系数。采用克罗内克积的形式将上述向量进行表述,表示为:

$$\Theta_q = [\cos \lambda_0 \alpha, \cos \lambda_1 \alpha, \dots, \cos \lambda_m \alpha, \dots, \cos \lambda_{M-2} \alpha, \cos \lambda_{M-1} \alpha, \cos \lambda_M \alpha] \otimes [\cos 0\beta, \cos 1\beta, \sin 1\beta, \dots, \cos N\beta, \sin N\beta] \quad (26)$$

$$\Theta_q^f = [\sin \lambda_{-2} \alpha, \sin \lambda_{-1} \alpha] \otimes [\cos 0\beta, \cos 1\beta, \sin 1\beta, \dots, \cos N\beta, \sin N\beta] \quad (27)$$

式中 M 和 N 分别表示 α 和 β 方向上的级数截断数; $\lambda_m = m\pi/L_\alpha, \lambda_n = n\pi/L_\beta$;

根据复合材料球壳和圆环板的应变势能、动能以及外力功的表达式,结合耦合连接处的弹性势能 V_{s-a} ,可以得到复合材料双层球壳与环板耦合结构的能量泛函 L 的表达式,具体表示为:

$$\begin{aligned} L = & [T_s|_{\beta} + T_s|_{\beta} + T_a] - [U_{ps}|_{\beta} + U_{ps}|_{\beta}] - \\ & [U_{vs}|_{\beta} + U_{vs}|_{\beta} + U_{va}] - V_{s-a} + W_{ex} \end{aligned} \quad (28)$$

将式(21)~(25)代入式(28)中,结合Rayleigh-Ritz法,可以得到复合材料双层球壳与环板耦合结构振动分析数学模型,表示为:

$$(K - \omega^2 M)H = F \quad (29)$$

式中 K, M 和 F 分别表示耦合结构的刚度矩阵、质量矩阵和外载荷向量; H 表示级数展开系数向量。当分析耦合结构的固有特性时,将式(29)中的外载荷向量 F 设置为零,求解特征值即可得到耦合结构的固有频率。相应地,根据外部载荷的施加位置和方向,对外载荷向量进行设置,进而求解向量 H 并对响应点处的振动响应进行计算。

5 数值计算与特性研究

5.1 结果验证

本文采用谱几何法,结合边界虚拟弹簧技术,建立了不同边界条件下复合材料双层球壳与环板耦合结构振动特性分析模型。本小节将会对所建立的分析模型的正确性进行验证,采用有限元法对不同边界条件下耦合结构的固有频率和稳态响应进行计算,通过对比来验证本文分析模型正确性。根据文献[16]中对回转类复合材料结构的分析研究,后文的计算分析中,选取截断数 $M=N=16$,并且设置耦合弹簧模拟器中的弹簧刚度均为 1×10^{14} N/m。

表1为固支-固支和自由-固支边界条件下耦合结构固有频率的对比情况。其中,几何参数设置为: $R_1=1$ m, $R_0=0.5$ m, $\varphi_0=0, \varphi_1=\pi/2, \varphi_2=\pi/3, h=50$ mm, $H_1=H_2=40$ mm; 材料参数设置为: $E_1=E_2=206$ GPa, $\mu_{12}=0.3, G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.6E_2/[2/$

$(1+\mu_{12})]$, $\mu_{12}=0.3$, $\rho=1500 \text{ kg/m}^3$ 。分别对两种边界条件下前 10 阶固有频率进行计算,并对谱几何法 (SGM) 和有限元法 (FEM) 得到的结果进行对比。其中,最大误差为 -1.54% ,出现在自由-固支边界条件下的第一阶固有频率,其余各阶频率对比情况良好,可验证所建立分析模型对于固有频率计算的正确性。

表 1 固支-固支和自由-固支边界条件下双层球壳与环板耦合结构固有频率对比情况 (单位:Hz)

Tab. 1 Comparison of natural frequencies of double-layer spherical shell and annular plate coupled structure under different boundary conditions (Unit: Hz)

阶数	固支-固支			自由-固支		
	FEM	SGM	误差/%	FEM	SGM	误差/%
1	504.7	504.7429	-0.01	130.87	132.88	-1.54
2	504.7	504.7429	-0.01	201.71	204.19	-1.23
3	693.05	694.1374	-0.16	201.71	204.19	-1.23
4	735.29	742.2428	-0.95	430.49	432.18	-0.39
5	735.29	742.2428	-0.95	430.49	432.18	-0.39

对所建立的分析模型振动响应的计算正确性进行验证。选取自由-固支边界条件,其余材料参数和几何参数设置与上一算例相同。假设外载荷施加点位于外球壳 $(3/4\pi, 0)$,由于响应点的选择要体现结构特性,同时尽可能地接近振源以保持振动响应的敏感性,减少信号能量在界面上的丢失。因此,分别在球壳和外球壳设置响应点 1 和响应点 2,位置为 $(3/4\pi, 0)$ 和 $(3/4\pi, \pi/2)$ 。采用有限元法对 400~900 Hz 范围内的法向位移响应进行计算,并与本文方法得到的结果进行对比。同时,为了分析有限元分析过程之中的网格收敛性,对不同有限元网格尺寸下的振动响应曲线进行对比,进而验证网格收敛性对本文的影响。对于本文所建立的有限元分析模型,采用自由四面体网格进行划分,并且分别对网格尺寸为 $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$, $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ 以及 $30 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ 三种情况下的振动响应曲线进行计算并绘制对比曲线,如图 3 所示。可以发现,当网格尺寸由 $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ 变化到 $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ 时,两种情况对应的振动响应曲线高度吻合,说明所建立的有限元分析数值模型的计算结果收敛。

进一步可以看出,由本文方法建立的分析模型得到的振动响应曲线与有限元法对比,得到的曲线波形相似并且吻合程度较高。因此,可以证明所建立的复合材料双层球壳与环板耦合结构振动特性分析模型的正确性。接下来,将开展相关参数化分析研究,探讨不同参数对耦合结构振动响应的影响情况。

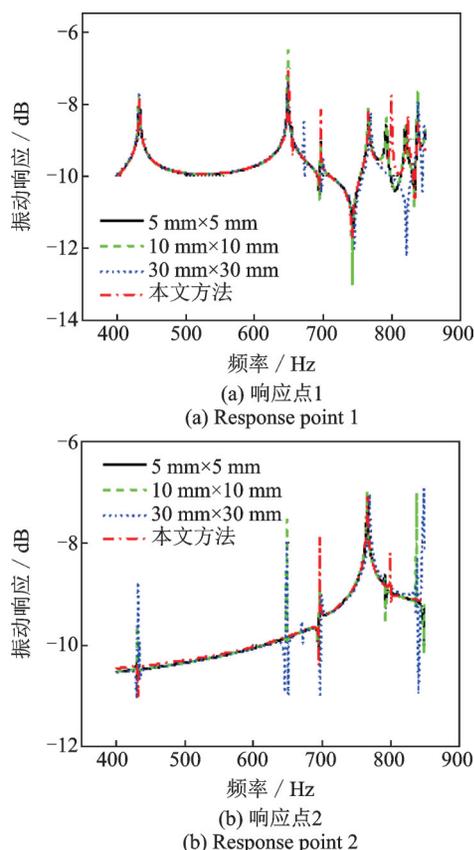


图 3 不同响应点处振动响应对比情况

Fig. 3 Comparison of vibration responses at different response points

通过实验验证该方法的正确性,采用 DH5922D 动态信号测试系统进行测试分析,通过 DHMA 动态信号采集分析系统对各通道所测信号进行数据处理,获得结构在频率范围内的加速度响应曲线。实验试件模型如图 4 所示,实验原理及测试系统如图 5 所示。在双层球壳两侧加工有 2 个吊装孔,通过弹性绳将球壳吊装在台架上,从而实现了试验件的自由约束边界条件设置。将双层球壳内的表面标记 $4 \times 12 + 1$ 计 49 个测点,在内层球壳 19 号测点 $(22.5^\circ, 90^\circ)$ 处布置加速度计,开展了 FF 边界条件下的双层球壳模态测试实验。

图 6 给出了双层球壳与环板耦合结构三个阶次的模态振型和频率。通过对比本文理论预测结果、有限元仿真结果和实验测试结果,以及模态振型对比可以发现,实验测得的频率值与理论预测结果接近,实验所绘制模态图形与理论预测振型图基本保持一致,再次验证了本文所建理论模型的正确性。

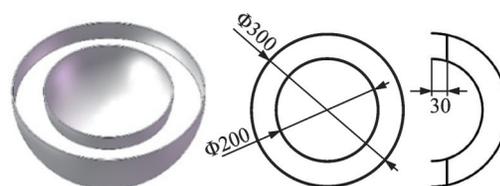


图 4 实验试件模型 (单位: mm)

Fig. 4 Model diagram of experimental specimen (Unit: mm)

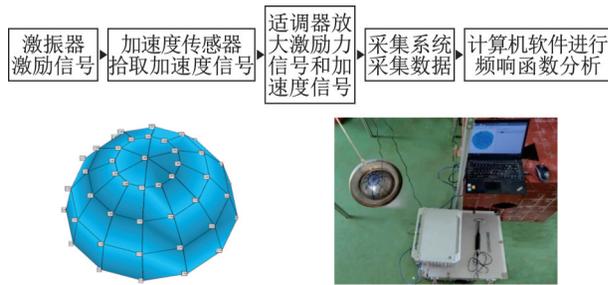


图 5 模态测试系统

Fig. 5 Test system in modal experiment

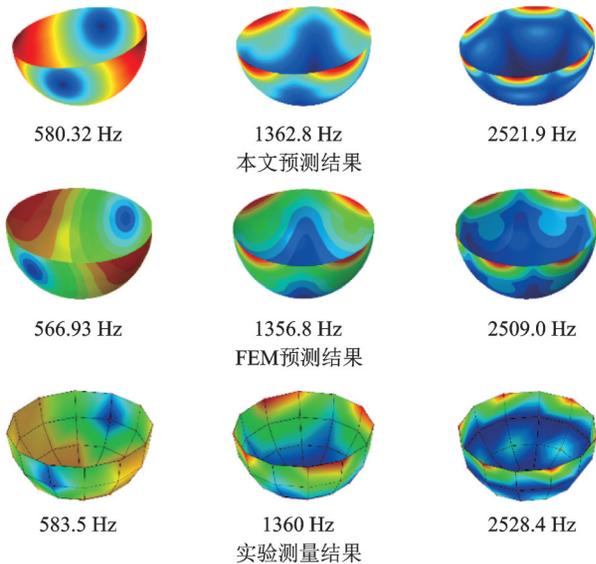
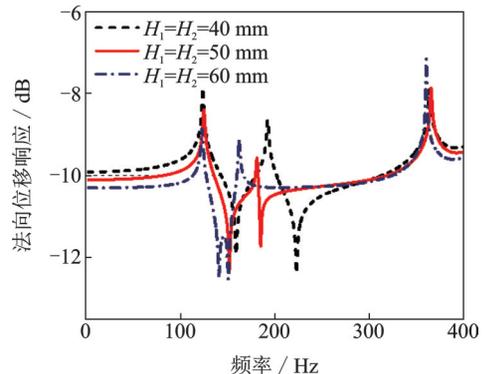


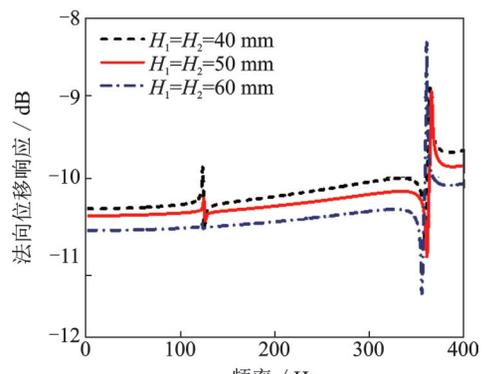
图 6 双层球壳与环板耦合结构模态振型预测与测量结果对比
Fig. 6 Comparison of modal prediction and measurement results of coupled structure of double-layer spherical shell and annular plate

5.2 几何参数的影响

首先研究几何参数对复合材料双层球壳与环板耦合结构振动响应的影响情况。其中,边界条件为自由-固支;几何参数设置为: $R_1=1\text{ m}$, $R_0=0.5\text{ m}$, $\varphi_0=0$, $\varphi_1=\pi/2$, $\varphi_2=\pi/3$, $h=50\text{ mm}$;材料参数设置为: $E_2=10\text{ GPa}$, $E_1/E_2=15$, $\mu_{12}=0.25$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\rho=1500\text{ kg/m}^3$, 铺设方案为 $[-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$;外载荷与响应点的位置与图 4 算例相同,外载荷施加点位于外球壳 $(3/4\pi, 0)$, 分别在内球壳和外球壳设置响应点 1 和响应点 2, 位置为 $(3/4\pi, 0)$ 和 $(3/4\pi, \pi/2)$ 。图 7 为不同球壳厚度下,耦合结构在不同响应点处法向位移的振动响应曲线对比情况。其中,分别设置 $H_1=H_2=40, 50$ 和 60 mm 。通过比较可以看出,随着球壳厚度的变化,响应点 1 和响应点 2 处的法向位移响应曲线波形相似,偏移程度较小。同时,在初始频率范围内,响应点 1 和响应点 2 处的法向位移响应出现明显变化,响应幅值随着球壳厚度的增大逐渐减小。



(a) 响应点 1
(a) Response point 1



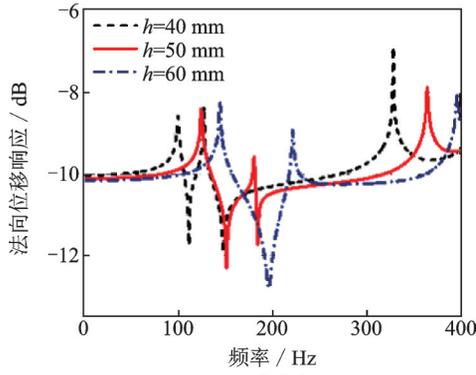
(b) 响应点 2
(b) Response point 2

图 7 不同球壳厚度 H_1, H_2 下的位移响应曲线对比情况

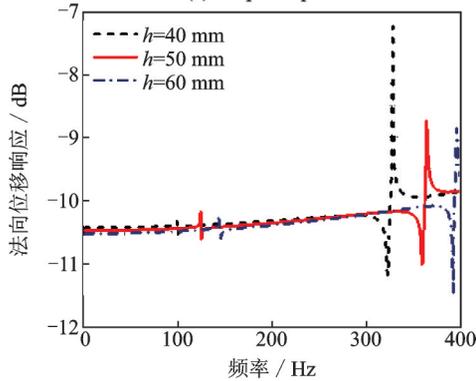
Fig. 7 Comparison of displacement response curves under different spherical shell thicknesses H_1, H_2

接下来,对圆环板厚度 h 对耦合结构振动响应的影响情况进行分析研究。其中,外球壳和内球壳厚度设置为 $H_1=H_2=50\text{ mm}$,圆环板厚度设置为 $40, 50$ 和 60 mm ,其余几何参数、边界条件以及响应点设置等与图 7 相同。如图 8 所示,当圆环板厚度从 40 mm 增加到 60 mm 时,不同响应点处的法向位移响应曲线发生明显的变化,波形相似但是逐渐向高频方向移动。进一步比较可以看出,与球壳厚度的影响不同,随着圆环板厚度的增大,响应点 1 和响应点 2 处的位移响应幅值变化幅度较小,基本可以忽略不计。

最后,探讨球壳半径比 R_1/R_2 对球壳与环板耦合结构振动响应的影响情况。对球壳半径比分别为 $1.8, 2.0$ 和 2.2 情况下响应点 1 和响应点 2 处的法向位移响应进行计算并绘制曲线,如图 9 所示。其中,保持内部球壳半径 $R_2=0.5\text{ m}$,球壳和圆环板的厚度设置为 50 mm 。通过比较可以看出,法向位移响应曲线随着球壳半径比的增大出现明显偏移,逐渐向低频方向移动。同时,位移响应幅值随着球壳半径比的增加出现明显的增大现象。

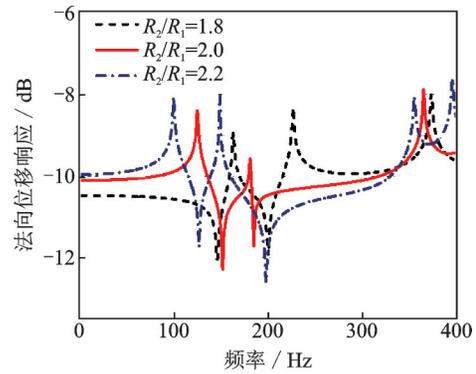


(a) 响应点1
(a) Response point 1

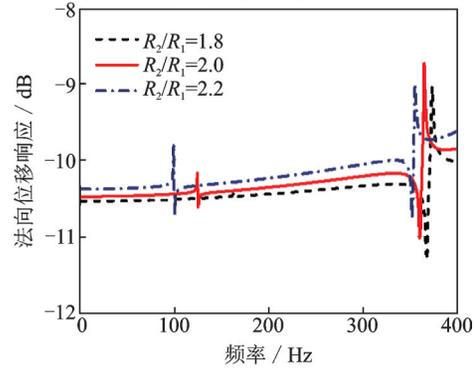


(b) 响应点2
(b) Response point 2

图8 不同圆环板厚度 h 下的位移响应曲线对比情况
Fig. 8 Comparison of displacement response curves under different annular plate thicknesses h



(a) 响应点1
(a) Response point 1

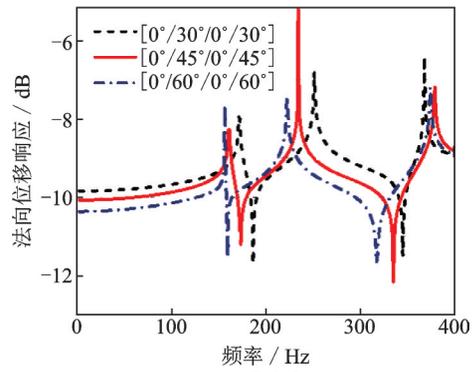


(b) 响应点2
(b) Response point 2

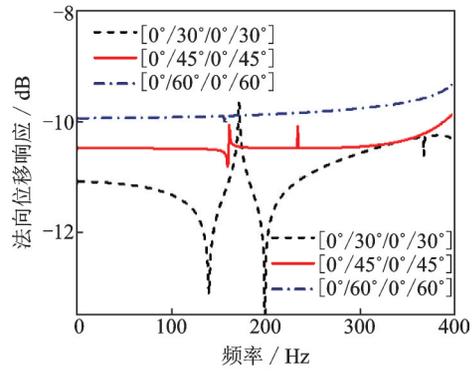
图9 不同球壳半径比 R_2/R_1 下的位移响应曲线对比情况
Fig. 9 Comparison of displacement response curves under different spherical shell radius ratios R_2/R_1

5.3 材料参数的影响

在前文中,分析了几何参数对复合材料双层球壳以及环板耦合结构振动响应的影响情况,本小节将分析纤维角度、材料层数以及刚度比值的影响情况。图10为不同纤维角度下复合材料双层球壳与环板耦合结构位移响应曲线的影响情况。其中,纤维角度 θ 分别设置为 $30^\circ, 45^\circ$ 和 60° ,铺设方案为 $[0^\circ/\theta/0^\circ/\theta]$,外球壳和内球壳厚度设置为 $H_1=H_2=50\text{ mm}$,其余参数以及响应点位置等与图7算例中相同。可以看出,在不同响应点处,随着纤维角度的增大,法向位移响应曲线出现明显的便宜,逐渐向高频方向移动。同时,法向位移响应的幅值出现明显的变化,但是在响应点1和响应点2处的变化规律相反。



(a) 响应点1
(a) Response point 1



(b) 响应点2
(b) Response point 2

图10 不同纤维角度 θ 下的位移响应曲线对比情况
Fig. 10 Comparison of displacement response curves under different fiber angle θ

图11为不同材料层数 N 下耦合结构法向位移响应曲线的对比情况。其中,铺设方案设置为 $[-45^\circ/45^\circ]_N$,其余材料参数以及几何参数等设置与上一算例相同。通过响应点1和响应点2处响应曲线的对比可以看出,随着材料层数增大,初始频率范围内的法向位移幅值并未发生明显的改变。响应点2处的波形并未发生明显的改变,响应点1处的波形变化较为明显,但是共振峰值位置基本保持不变。

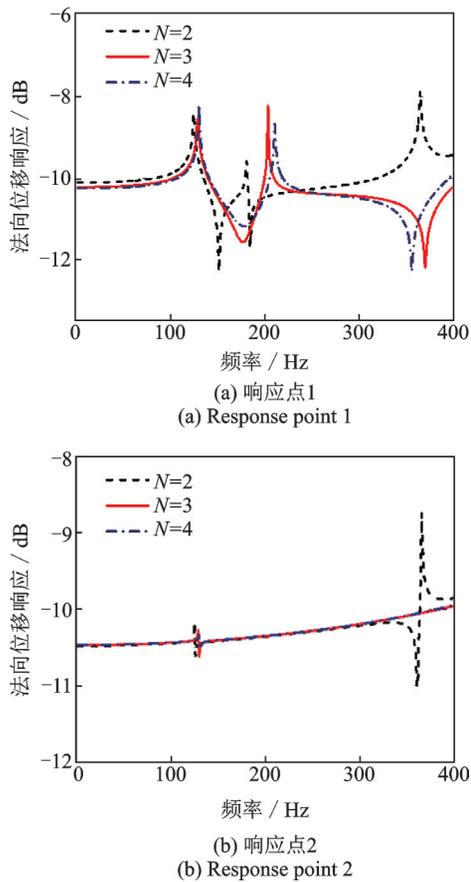


图 11 不同材料层数 N 下的位移响应曲线对比情况
Fig. 11 Comparison of displacement response curves under different material layer number N

接下来,分析刚度比值 E_1/E_2 对耦合结构振动响应的影响情况。对不同刚度比值下,响应点 1 和响应点 2 处的法向位移响应进行计算并绘制曲线,如图 12 所示。其中,铺设方案设置为 $[-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$,其余参数设置与上一算例相同。可以看出,不同刚度比值对应的法向位移响应曲线波形相似,并且随着刚度比值的逐渐增大,响应曲线逐渐向高频方向移动。同时,响应点 1 处的法向位移响应幅值并未发生明显的变化,但响应点 2 处位移响应幅值随着刚度比值的增大逐渐增大。

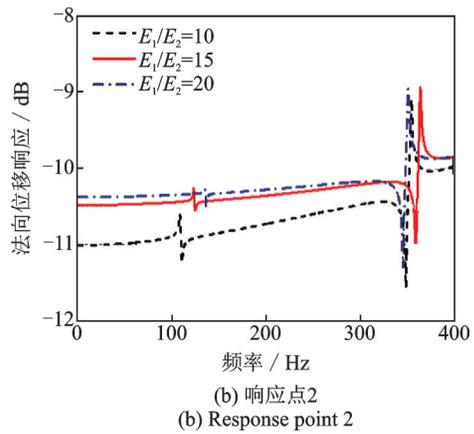
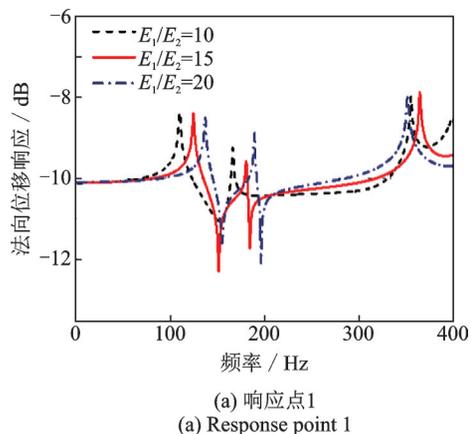


图 12 不同刚度比值 E_1/E_2 下的位移响应曲线对比情况
Fig. 12 Comparison of displacement response curves under different stiffness ratio E_1/E_2

6 结 论

本文采用谱几何法对复合材料双层球壳与环板耦合结构振动特性分析模型进行构建,结合人工虚拟弹簧技术对耦合结构的边界条件进行模拟。同时,通过设置耦合弹簧模拟器处理子结构之间的连续性条件。根据哈密顿原理,对结构的控制方程进行推导,进而获得复合材料双层球壳与环板耦合结构振动特性的分析模型。通过与有限元结果进行对比,验证了本文方法的正确性。以此为基础,开展了相关参数化研究工作,分析了几何参数、材料参数以及环板位置的影响情况。主要得到的结论如下:

- (1) 球壳厚度和球壳半径比能够导致振动响应发生明显变化,但是二者的影响规律相反;环板厚度的增大导致振动响应曲线向高频偏移,但是对响应幅值未产生明显的影响;
- (2) 材料层数和刚度比的增大均会导致振动响应曲线向高频方向移动,刚度比值的增大对相应幅值的影响可以忽略不计;纤维角度的增大导致响应幅值明显改变,但是对于内外球壳的影响效果不同。
- (3) 本文预测的振动响应规律可为双层球壳的振动噪声控制提供理论和数据支持。

参考文献:

[1] Qu Y, Long X, Wu S, et al. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia[J]. Composite Structures, 2013, 98: 169-191.
[2] Su Z, Jin G Y, Shi S X, et al. A unified accurate solution for vibration analysis of arbitrary functionally graded spherical shell segments with general end restraints [J]. Composite Structures, 2014, 111: 271-284.

- [3] Bryan A. Free vibration of thin spherical shells[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2017, 139(6): 061020.
- [4] Xie K, Chen M X, Li Z H. A semi-analytical method for vibration analysis of thin spherical shells with elastic boundary conditions [J]. Journal of Vibroengineering, 2017, 19(4): 2312-2330.
- [5] Du Y, Sun L P, Li S, et al. Vibration analysis of truncated spherical shells under various edge constraints[J]. Thin-Walled Structures, 2020, 147: 106544.
- [6] Mantari J L, Soares C G. Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory [J]. Composite Structures, 2012, 94(8): 2640-2656.
- [7] Guo C C, Liu T, Bin Q, et al. Free vibration analysis of coupled structures of laminated composite conical, cylindrical and spherical shells based on the spectral-Techebychev technique[J]. Composite Structures, 2022, 281: 114965.
- [8] Chen J M, Huang Y Y, Chen Y B. Vibration and acoustic radiation from submerged spherical double-shell [J]. China Ocean Engineering, 2003, 17(3): 341-354.
- [9] Sayyad A S, Ghugal Y M. Static and free vibration analysis of laminated composite and sandwich spherical shells using a generalized higher-order shell theory [J]. Composite Structures, 2019, 219: 129-146.
- [10] Kim K, Kumchol R, Kwak S, et al. Free vibration analysis of laminated composite spherical shell with variable thickness and different boundary conditions [J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2022, 10: 689-714.
- [11] Xie X, Zheng H, Jin G. Integrated orthogonal polynomials based spectral collocation method for vibration analysis of coupled laminated shell structures [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 98: 132-143.
- [12] Pang F Z, Li H C, Chen H L, et al. Free vibration analysis of combined composite laminated cylindrical and spherical shells with arbitrary boundary conditions [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2021, 28(2): 182-199.
- [13] Qatu M S. Vibration of Laminated Shells and Plates [M]. Academic Press, 2004.
- [14] Reddy J N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis [M]. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [15] Jin G Y, Ye T G, Jia X Z, et al. A general Fourier solution for the vibration analysis of composite laminated structure elements of revolution with general elastic restraints [J]. Composite Structures, 2014, 109: 150-168.
- [16] Chen Y H, Jin G, Liu Z G. Vibrational energy flow analysis of coupled cylindrical shell-plate structure with general boundary and coupling conditions [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2015, 229(10): 1727-1744.
- [17] Shi S X, Jin G Y, Liu Z G. Vibro-acoustic behaviors of an elastically restrained double-panel structure with an acoustic cavity of arbitrary boundary impedance [J]. Applied Acoustics, 2014, 76: 431-444.
- [18] Shi X J, Zuo P, Zhong R, et al. Thermal vibration analysis of functionally graded conical-cylindrical coupled shell based on spectro-geometric method [J]. Thin-Walled Structures, 2022, 175: 109138.

Vibration characteristics analysis of composite double-layer spherical shell and annular plate coupled structure

SHI Dong-yan¹, ZHANG Ying^{1,2}, HE Dong-ze¹

(1.College of Mechanical and Electrical Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;

2.College of Engineering, Heilongjiang Bayi Agricultural University, Daqing 163319, China)

Abstract: In this paper, the analytical model of the vibration characteristics for the composite double-layer spherical shell and annular plate coupled structure under different boundary conditions is constructed using the spectral geometry method based on the first-order shear deformation theory, and the boundary conditions of the coupled structure are simulated by the artificial virtual spring technique. The coupling relationship between the sub-structures is simulated by arranging the coupling spring simulator according to the connection relationship. The Hamiltonian principle is applied to derive the characteristic equations of the composite double-layer spherical shell and annular plate coupled structure, and the inherent characteristics and steady-state response of the coupled structure are solved. The results obtained are compared with the results of finite element method to verify the correctness of the calculations. The effects of geometric parameters, material parameters on the vibration response of the composite double-layer spherical shell and annular plate coupled structure are analyzed.

Key words: coupled structure; vibration characteristics; composite double-layer spherical shell; annular plate; spectral geometry method

作者简介: 史冬岩(1965—),女,博士,教授,博士生导师。E-mail: shidongyan@hrbeu.edu.cn。