

# 利用冗余扩展余弦字典的复杂动载荷识别研究

何文博, 许步锋, 冯振宇, 石张昊, 解江, 王伟

(中国民航大学安全科学与工程学院民航航空器适航审定技术重点实验室, 天津 300300)

**摘要:** 针对真实测量噪声影响下复杂动载荷识别精度低的问题, 提出了一种基于冗余扩展余弦字典的 L1 范数正则化载荷识别方法。根据系统响应与外部动载荷的卷积关系, 建立用于载荷识别的离散系统控制方程; 选择与动载荷相适应的离散余弦基函数进行时延扩展, 构造了扩展余弦字典与 Db10 小波字典相级联的冗余扩展字典, 对复杂载荷进行稀疏表示; 使用 L1 范数正则化方法求解稀疏表示系数, 基于改进 L 曲线准则获取最优正则化参数, 通过在 GARTEUR 飞机模型上试验得到的响应数据, 实现不同噪声水平下对拍频载荷与连续冲击载荷时间历程的识别。试验研究结果表明: 本文提出的冗余扩展余弦字典对拍频载荷与连续冲击载荷的表示稀疏性高, 基于冗余扩展余弦字典的 L1 范数正则化载荷识别方法的识别精度高、抗噪性能好。

**关键词:** 载荷识别; 冗余字典; L1 范数; 正则化方法; 稀疏表示

**中图分类号:** O327; TB123 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)03-0512-10

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.03.016

## 引言

在飞行过程中, 飞机结构通常会承受各种动载荷, 如发动机不平衡振动载荷, 襟缝翼连接套筒松动时的冲击载荷等。由于飞机的运行工况复杂, 各种激励载荷存在叠加现象, 形成拍频载荷或者连续冲击载荷等复杂动载荷形式。为防止这些复杂动载荷对机体结构造成损伤, 有必要对动载荷进行识别分析, 并确定产生复杂动载荷的故障原因。在实际工程中, 由于载荷位置与形式的特殊性, 往往无法直接通过力传感器测量载荷, 因此, 动载荷的间接识别方法具有重要的工程价值。

载荷识别作为结构动力学的第二类反问题, 通过在易于接近的结构上测量得到响应数据, 结合已知的结构模型信息, 进行频域上的直接求逆或者时域上的反卷积来间接计算动载荷。然而, 载荷识别受传递函数病态性和响应测量噪声的影响, 容易产生不适定问题, 即解的不唯一、不稳定或不存在<sup>[1]</sup>。为了解决不适定问题, 各种正则化方法如 Tikhonov 正则化、截断奇异值分解 (TSVD) 等<sup>[2]</sup> 被广泛用于载荷识别。Miao 等<sup>[3]</sup> 利用 Green 核函数建立载荷识别方程, 通过悬臂梁的数值仿真和试验证明 TSVD 正则化方法求解正弦载荷和三角载荷的准确性。Wang 等<sup>[4]</sup> 通过提出不同的正则化算子构建了新的

正则化方法, 对随机结构的动载荷识别进行研究, 与传统的 Tikhonov 正则化方法相比识别精度明显提高。缪炳荣等<sup>[5]</sup> 用多种典型正则化方法与参数选取准则的组合进行载荷识别, 有效提高识别精度, 扩大工程实际应用。但是 Tikhonov 等经典正则化方法也存在自身局限性, 一方面, 这些方法不适用于对时域上稀疏的冲击载荷的求解; 另一方面, 这些方法容易受噪声影响, 抗噪性较差。

近年来, 稀疏表示技术在信号处理、图像识别等领域繁荣发展, 受此启发, 稀疏正则化也被引入动载荷识别领域。稀疏正则化易于得到稀疏解, 因此稀疏正则化首先应用于冲击载荷的识别。乔百杰等<sup>[6]</sup> 使用 L1 范数正则化方法实现单源、多源冲击载荷的识别, 并证明该识别方法具有显著的抗噪能力。Rezayat 等<sup>[7]</sup> 提出混合 L1 和 L2 范数的正则化载荷识别方法, 使用分组快速迭代收缩阈值算法 (G-FISTA), 在频域上识别出了冲击载荷。在实际工程中, 动载荷大多数情况下并不具有稀疏性, 为了提高稀疏正则化方法的适用性, 将稀疏正则化方法与基函数展开法结合起来, 构造载荷字典, 将载荷求解问题转换为载荷的稀疏表示问题。Qiao 等<sup>[8]</sup> 使用 Dirac 字典和小波字典识别冲击载荷, 使用余弦字典识别简谐载荷, 通过 SpaRSA 算法求解稀疏正则化问题, 验证了上述方法的有效性。严刚等<sup>[9]</sup> 采用高斯核函数构造字典表示冲击载荷, 使用贝叶斯压缩

收稿日期: 2022-06-17; 修订日期: 2022-09-18

基金项目: 中央高校基本科研业务费项目中国民航大学专项资助(3122019163)。

感知方法求解稀疏正则化重构问题,通过复合材料夹层结构的实验验证了上述方法的有效性。Pan等<sup>[10]</sup>提出用三角函数与矩形波函数构造冗余级联字典识别移动载荷,证明了冗余字典的优势。常见的冗余字典是直接两个或多个正交完备字典级联而成。付晓梅等<sup>[11]</sup>提出了一种冗余字典的构造方法,通过对完备字典的扩展、延时与混叠变换,提高了冗余字典的稀疏性能和重构性能。

国内外学者将稀疏表示技术应用于载荷识别领域并取得了很好的效果,但大多是通过正交完备字典对单一载荷形式的识别,较少对复杂载荷识别。为了能更好地稀疏表示复杂载荷,本文通过构造冗余扩展余弦字典,结合L1范数稀疏正则化方法来提高复杂载荷在不同噪声水平下的识别精度。通过对拍频载荷与连续冲击载荷的试验研究,说明基于冗

$$\begin{bmatrix} y(\Delta t) \\ y(2\Delta t) \\ \vdots \\ y((n-1)\Delta t) \\ y(n\Delta t) \end{bmatrix} = \Delta t \begin{bmatrix} h(\Delta t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h(2\Delta t) & h(\Delta t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h((n-1)\Delta t) & h((n-2)\Delta t) & \cdots & h(\Delta t) & 0 \\ h(n\Delta t) & h((n-1)\Delta t) & \cdots & h(2\Delta t) & h(\Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ \vdots \\ f((n-1)\Delta t) \\ f(n\Delta t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中  $\Delta t$  为时间间隔;  $n$  为采样长度。

将式(2)简化为矩阵-向量形式为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{y}$  为系统响应向量;  $\mathbf{H}$  为传递函数矩阵;  $\mathbf{f}$  为待识别的载荷向量<sup>[12]</sup>。

实际测量过程中噪声无法避免,因此含有测量噪声的控制方程为:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{w} \quad (4)$$

式中  $\mathbf{w}$  表示测量噪声;  $\tilde{\mathbf{y}}$  表示带有噪声的系统响应向量。

## 2 冗余扩展余弦字典构造

稀疏表示技术通过构造一组由已知基函数组成的基空间,并假设任意一维信号都可由少量基函数的线性组合来稀疏表示,那么所有基函数构成的基矩阵  $\mathbf{D} = \{d_1 d_2 \cdots d_N\}$  称为字典,每个基函数  $d_i$  称为字典原子<sup>[13]</sup>。复杂载荷可以通过字典表示为:

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{x}$  为复杂载荷  $\mathbf{f}$  在字典  $\mathbf{D}$  下的稀疏表示向量。

字典原子形态与动载荷形式的适应程度直接决定了动载荷在字典下的稀疏性,进一步决定了动载荷的识别精度。目前,多种基函数构成的解析字典已被用于载荷识别,常见的有DCT字典<sup>[14]</sup>和Db10离散小波字典<sup>[15]</sup>。

余扩展余弦字典的L1范数正则化载荷识别方法的有效性与抗噪性。

## 1 离散系统控制方程

对于一个单输入、单输出的线弹性系统,当初始位移与速度均为0时,外部激励与系统响应在时间上的卷积关系为:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (1)$$

式中  $y(t)$  表示系统响应;  $h(t)$  表示脉冲响应函数;  $f(t)$  表示系统受到的外部载荷;  $t$  为时间;  $\tau$  为时延变量,满足  $0 \leq \tau \leq t$ 。

为方便计算,将式(1)离散化,得到:

$$\Phi(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} \phi(n) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2N} k\right), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (6)$$

式中  $N$  为字典阶数;  $\alpha(k)$  为比例因子;  $\phi(n)$  表示原始信号;  $k$  为离散点数。

随着采样个数的增加,字典阶数增加,字典原子的频率增加,当载荷频率与字典原子频率相差过大时,高频的字典原子不仅会降低计算效率,而且容易受噪声影响导致过拟合,因此有必要对离散余弦基函数进行选择与截断。

Db10小波字典是另一种比较常用的解析字典,由离散小波变换得到:

$$\psi_{l,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^l}} \psi\left(\frac{t-nba^l}{a^l}\right) \quad (7)$$

式中  $\psi$  为小波基函数;  $a$  为尺度参数,控制小波基函数的伸缩变换,以适应不同频率成分,一般取为2;  $b$  为平移参数,通过平移变换定位时间,一般取为1;  $l$  和  $n$  分别为控制小波尺度参数和平移参数的整数。Db10小波字典具有紧支撑性,可以保留信号的时间特性,多用于表示冲击载荷。

针对本文中具有多种形式分量的复杂载荷,单一字典的表示不够稀疏,容易造成过拟合。因此,为

为了更好地稀疏表示复杂载荷,本文对低阶 DCT 字典中的原子进行扩展、延时,增加 DCT 字典的时间特性,再将其与 Db10 小波字典相级联,构造冗余扩展余弦字典。

首先,根据离散余弦变换公式(6)构造  $r$  阶离散余弦基矩阵,如下式所示:

$$D_r = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_r]_{N \times r} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2N} \cdot 2\right) \cdots \\ \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2N} \cdot r\right) \end{bmatrix}_{N \times r} \quad (8)$$

其中包含  $r$  个列向量,  $1 < r < N$ , 每个列向量对应一个字典原子。

然后,将每个字典原子向后扩展成  $m$  个相同的列向量,并在每个字典原子中加入滞后因子  $\frac{(i-1)\pi}{m}$ , 其中  $i = 1, \dots, m$ , 且  $N = r \times m$ , 使其变换为  $N$  阶的扩展余弦变换(Extend Cosine Transform, ECT)矩阵:

$$D_{ECT} = [\varphi_{11} \ \varphi_{12} \ \cdots \ \varphi_{1m} \ \varphi_{21} \ \cdots \ \varphi_{2m} \ \cdots \ \varphi_{r1} \ \cdots \ \varphi_{rm}]_{N \times N} \quad (9)$$

式中字典原子  $\varphi_{sj} = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2N} s + \frac{(j-1)\pi}{m}\right)$ ,

其中,  $1 \leq s \leq r$ ,  $1 \leq j \leq m$ ;  $D_{ECT}$  即为扩展余弦字典。

最后,为了更好地稀疏表示复杂载荷的冲击部分,利用冗余字典的优势,将设计的 ECT 字典和 Db10 小波字典相级联,形成冗余扩展余弦(Redundant Extended Cosine Transform, RECT)字典  $D_{RECT} = [D_{ECT} \ D_{Db10}]$ 。本文将基于 RECT 字典进行载荷识别。

### 3 基于冗余字典的载荷识别模型

#### 3.1 L1 范数正则化

根据上述构造的字典进行载荷识别,将式(5)代入控制方程式(4)中,得到:

$$\tilde{\mathbf{y}} = H D \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (10)$$

即将复杂载荷求解问题转换为稀疏表示向量的求解问题。对于大规模系统,传递函数矩阵  $H$  的条件数很大,所以对式(10)进行直接求逆或者用最小二乘法求解稀疏表示向量  $\mathbf{x}$  时,即使很小的噪声也会对结果造成很大的影响,导致问题不适定,因此

需要使用正则化策略解决不适定问题。

Tikhonov 正则化方法是获得稳定解最常用的正则化方法,通过最小化残差范数与解范数的加权和得到稳定解:

$$\mathbf{x}_{Tikh} = \arg \min_x \left\{ \left\| \tilde{\mathbf{y}} - H D \mathbf{x} \right\|_2^2 + \lambda \left\| \mathbf{x} \right\|_2^2 \right\} \quad (11)$$

Tikhonov 正则化的解范数为 L2 范数,其正则化解通常是平滑且非稀疏的,不适用于稀疏向量的求解。L0 范数表示向量中非零元素的个数,L0 范数正则化是将向量  $\mathbf{x}$  的稀疏性作为限制条件的优化问题,是获得稀疏结果的最直观方法,但该问题是一个非凸函数求极值的问题,直接求解比较困难,因此将 L0 范数松弛到 L1 范数,如下式所示:

$$\mathbf{x}_{L1} = \arg \min_x \left\{ \left\| \tilde{\mathbf{y}} - H D \mathbf{x} \right\|_2^2 + \lambda \left\| \mathbf{x} \right\|_1 \right\} \quad (12)$$

L1 范数正则化目标函数是凸的但不可微,因此没有显式解,一些约束优化算法可以用于 L1 范数正则化的求解,如内点法(I-PM)<sup>[16]</sup>、迭代收缩阈值法(ISTA)<sup>[17]</sup>、SpaRSA 算法<sup>[8]</sup>等。本文采用截断牛顿内点法,其特点是对参数不敏感,求解思路是先将非约束不光滑问题转换为约束光滑问题,再利用内点法获得一个新的非约束光滑问题,最后进行 L1 范数正则化的求解,得到稀疏表示向量  $\mathbf{x}$ 。再将稀疏向量与字典代入式(5),即可得到载荷  $\mathbf{f}$ 。

#### 3.2 最优正则化参数选择

Tikhonov 正则化和稀疏 L1 范数正则化都是基于罚函数的正则化方法,通过正则化参数  $\lambda$  调节残差项与正则化项之间的取舍:如果  $\lambda$  太大,响应信号的一些重要特征被忽视,导致识别结果不准确;如果  $\lambda$  太小,正则化水平会降低,产生冗余误差和不必要的计算<sup>[18]</sup>,所以最优正则化参数的选择对于求解精度至关重要。对于 Tikhonov 正则化,常用的正则化参数选取方法有 L 曲线准则和广义交叉检验(GCV)准则,但是对于稀疏正则化方法,由于解的稀疏性,直接使用 L 曲线准则和广义交叉检验(GCV)准则效果较差,不容易找到拐点或者最小值点,如图 1 所示。本文采用改进 L 曲线准则<sup>[19]</sup>,以  $\left( \left\| \tilde{\mathbf{y}} - H D \mathbf{x} \right\|_2^2, T \left\| \mathbf{x} \right\|_1 \right)$  为坐标绘制曲线,其中  $T$  为稀疏表示向量  $\mathbf{x}$  中非零元素的个数,当  $\left\| \tilde{\mathbf{y}} - H D \mathbf{x} \right\|_2^2$  与  $T \left\| \mathbf{x} \right\|_1$  同时取得最小值时,曲线出现拐点,对应的  $\lambda$  即为最优正则化参数。图 2 为连续冲击载荷识别时参数选择的改进 L 曲线。

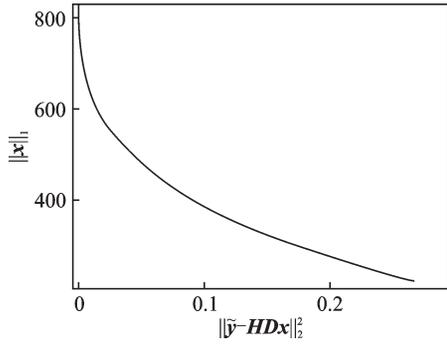


图 1 L 曲线  
Fig. 1 L curve

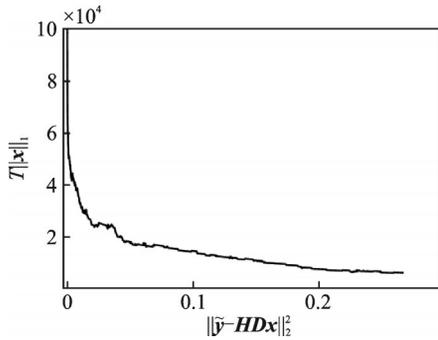


图 2 改进 L 曲线  
Fig. 2 Improved L curve

### 4 试验研究

将 GARTEUR 飞机模型作为试验对象,验证所提出的基于 RECT 字典的载荷识别方法的有效性。GARTEUR 模型是由法国国家航空航天研究院设计的标准飞机结构动力学模型,具有高柔度、低频密频的特点,常用于评估模态测试技术和测试方法的有效性<sup>[20]</sup>。整个模型由 6 根矩形截面梁组成,不同部位之间采用螺栓连接,机身长 1.5 m,翼展 2 m,模型材料为 2024-T3 铝合金,材料参数分别为:弹性模量 73 GPa、密度 2780 kg/m<sup>3</sup>、泊松比 0.33。模型以软绳悬挂在试验台架上,模拟自由边界条件,如图 3 所示。

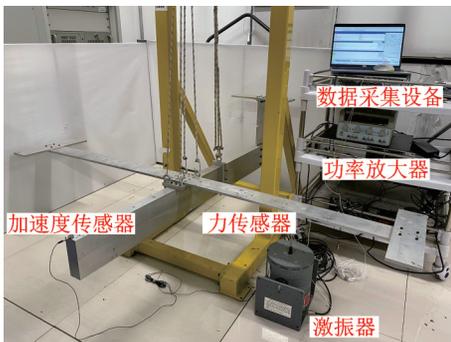


图 3 GARTEUR 模型与试验设备  
Fig. 3 GARTEUR model and experimental setup

为了模拟实际飞行中的复杂载荷工况,本文将讨论两种典型复杂载荷形式,分别是拍频载荷与连续冲击载荷,载荷作用位置均为左侧机翼中部,加速度响应测量位置为机头。GARTEUR 模型简化示意图、响应测量位置与激励位置如图 4 所示。

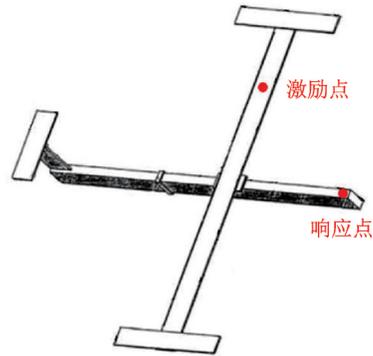


图 4 激励点与响应点的位置  
Fig. 4 Location of excitation point and response point

载荷识别过程分为三个步骤,第一步是获取传递函数矩阵  $H$ ,先测量激励点和响应点之间的频响函数  $H(\omega)$ ,再通过逆傅里叶变换将频响函数转换为脉冲响应函数  $h(t)$ ,最后离散  $h(t)$  获得传递函数矩阵  $H$ ;第二步是测量工况响应数据,并对响应数据进行频谱分析,构建冗余扩展字典;第三步是基于改进 L 曲线准则,确定正则化参数,进行载荷识别。载荷识别流程如图 5 所示。

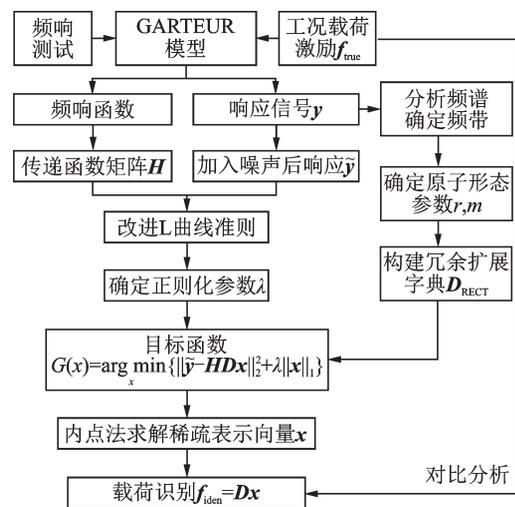


图 5 基于 RECT 字典的载荷识别流程图  
Fig. 5 Flow chart of load identification based on RECT dictionary

LMS Test. Lab 是集数据采集与试验分析为一体的振动噪声试验系统,在本次试验研究中,使用 LMS Test. Lab 信号采集处理软件生成载荷形式,经功率放大器与激振器作用在 GARTEUR 模型上,加速度传感器测量响应数据,用于载荷识别,激振器

力传感器测量载荷数据,用于识别结果对比,由 LMS SCADAS III 数据采集系统同步采样,采样频率为 400 Hz,采样时长为 1.28 s,数据长度为 512。为验证冗余扩展字典的优势,本文将 RECT 字典与 DCT 字典、Db10 小波字典、稀疏正则化方法以及经典 Tikhonov 正则化方法进行对比,讨论噪声环境下基于字典的稀疏正则化的抗噪性。如图 6 所示,在试验测量得到的响应数据中,以响应信号标准差水平为基准,添加不同水平的白噪声,模拟受噪声污染的系统响应:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + l_{\text{level}} \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \times \text{rand} \quad (13)$$

式中  $\mathbf{y}$  表示直接测量的加速度响应; $\bar{y}$  表示  $\mathbf{y}$  的平均值; $y_i$  表示离散点的加速度响应值; $\tilde{\mathbf{y}}$  表示加噪声后的加速度响应; $l_{\text{level}}$  表示噪声等级,取 0~1; $\text{rand}$  表示标准正态分布向量。

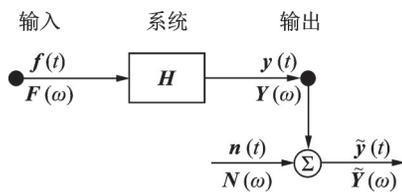


图 6 输入-输出噪声模型

Fig. 6 Input-output noise model

同样地,输出噪声对频响函数的识别精度也会产生影响,因此在试验过程中,需要选择适当的频响函数估算形式,以达到最佳估计。本文选择频响函数的估算方法为 H1 估计,其估算形式为:

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fy}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (14)$$

式中  $G_{fy}$  为响应  $\mathbf{y}(t)$  与激励  $\mathbf{f}(t)$  的互功率谱; $G_{ff}$  为激励  $\mathbf{f}(t)$  的自功率谱。

在响应  $\mathbf{y}(t)$  中加入噪声  $\mathbf{n}(t)$ ,并假设噪声与激励和响应无关时,实测受噪声污染的响应信号  $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{n}(t)$  的傅里叶频谱为:

$$\tilde{Y}(\omega) = Y(\omega) + N(\omega) \quad (15)$$

响应受噪声污染时频响函数的估算形式为:

$$H_1(\omega) = \frac{G_{\tilde{f}\tilde{y}}(\omega)}{G_{\tilde{f}\tilde{f}}(\omega)} = \frac{\frac{1}{T} E[F^*(\omega)\tilde{Y}(\omega)]}{G_{\tilde{f}\tilde{f}}(\omega)} = \frac{\frac{1}{T} E[F^*(\omega)Y(\omega)] + \frac{1}{T} E[F^*(\omega)N(\omega)]}{G_{\tilde{f}\tilde{f}}(\omega)} = \frac{G_{fy}(\omega) + G_{fn}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (16)$$

式中  $F^*(\omega)$  表示频域载荷; $G_{fn}(\omega)$  表示载荷与噪

声的互功率谱。

由于噪声  $\mathbf{n}(t)$  与激励  $\mathbf{f}(t)$  和响应  $\mathbf{y}(t)$  无关,所以多次平均时  $G_{fn}(\omega) = 0$ ,则:

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fy}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} = H(\omega) \quad (17)$$

可见,只有当响应受到噪声污染时,不断增加平均次数得到的频响函数估算式  $H_1(\omega)$  才是实际频响函数  $H(\omega)$  的真估计<sup>[21]</sup>。因此,在使用 Test.Lab 软件试验测量频响函数时,设置频响函数估算方法为 H1 估计,设置平均测量次数为 4 次,得到的频响函数是实际频响函数的真估计,不受响应信号中的噪声干扰。

使用相对误差 RE 和峰值误差 PRE 表示载荷识别结果的精度,使用相对稀疏度 RS 表示稀疏正则化结果的稀疏性,分别表示为:

$$RE = \frac{\|f_{\text{exact}} - f_{\text{identified}}\|_2}{\|f_{\text{exact}}\|_2} \times 100\% \quad (18)$$

$$PRE = \frac{|\max(f_{\text{exact}}) - \max(f_{\text{identified}})|}{|\max(f_{\text{exact}})|} \times 100\% \quad (19)$$

$$RS = \frac{n_{\text{zeros}}}{N} \times 100\% \quad (20)$$

式中  $f_{\text{exact}}$  表示实际测量的载荷向量; $f_{\text{identified}}$  表示识别的载荷向量; $\max(\cdot)$  表示载荷峰值; $n_{\text{zeros}}$  表示稀疏表示向量  $x$  中零的个数。本文中的连续冲击载荷有多个冲击峰,因此峰值误差 PRE 为多个峰值误差的平均值。

#### 4.1 拍频载荷识别

两个相近频率的简谐载荷会耦合成拍频载荷,其时间历程如下式所示:

$$f_1 = 30[\sin(54\pi t) + \sin(60\pi t)], \quad 0 \leq t \leq 1.28 \text{ s} \quad (21)$$

使用 Tikhonov 正则化方法、DCT 字典方法、Db10 小波字典方法和 RECT 字典方法识别拍频载荷,设置离散余弦基矩阵阶数  $r = 64$ ,滞后因子  $m = 8$ 。其中 Tikhonov 正则化方法的正则化参数选取准则为 GCV 准则,基于字典的稀疏正则化方法的正则化参数选取准则为改进 L 曲线准则。使用测量响应数据直接进行载荷识别,结果如图 7 所示。4 种方法识别出的拍频载荷时间历程都比较平滑,没有明显振荡,与真实载荷的吻合度较高,这是因为实验室环境带来的测量噪声处于比较低的水平,所以 4 种方法的识别效果都比较好。

为进一步研究所提方法的抗噪性,在测量响应数据中加入响应幅值 40% 的白噪声,如图 8 所示。

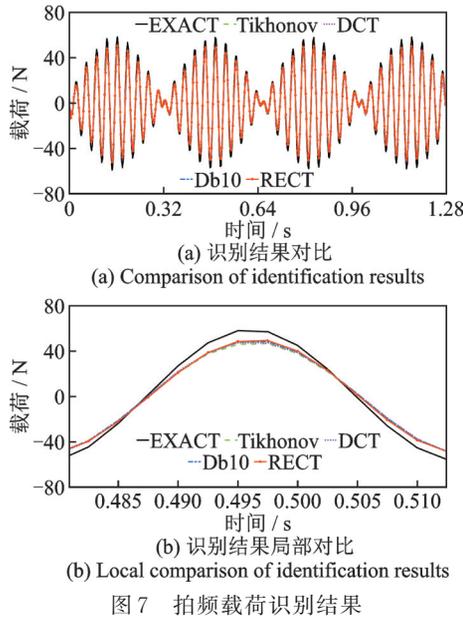


Fig. 7 Identification results of beat frequency load

Tikhonov 正则化方法的识别结果明显变差,波形振荡明显,这是由于 Tikhonov 方法对误差项与载荷项的加权和进行最小值优化时,将整个时间区间上的噪声都计算在内,导致识别效果变差;基于 3 种字典的稀疏正则化方法通过字典提取主要特征,减小噪声影响。所以识别载荷与真实载荷的波形更加吻合,其中本文提出的 RECT 字典方法的整体识别效果最好。

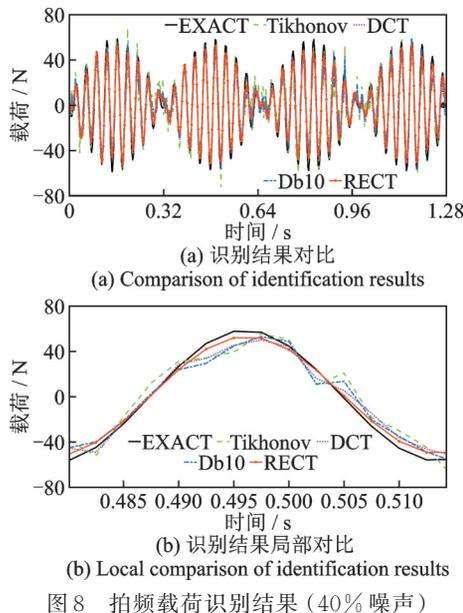


Fig. 8 Identification results of beat frequency load with 40% noise

图 9 中比较了 4 种识别方法在不同噪声水平下拍频载荷识别的整体相对误差结果。可以看出,随着噪声水平的增加,4 种方法识别结果的整体相对误差都在增大,但 Tikhonov 正则化方法的误差增幅

最大,从 0% 噪声水平的 16.6% 误差,增加到 100% 噪声水平的 65.6% 误差,而基于 3 种字典的稀疏正则化方法的识别误差均小于 Tikhonov 正则化方法,说明基于字典的稀疏正则化方法的抗噪性优于 Tikhonov 正则化方法。对于 3 种字典来说,在 [0%, 100%] 噪声水平区间上, DCT 字典的识别误差从 15.99% 增加到 35.63%, Db10 小波字典的识别误差从 15.59% 增加到 56.29%,这是因为 DCT 字典的字典原子是不同频率的余弦信号,可以很好地覆盖拍频载荷中的谐波频率,而 Db10 小波字典的字典原子是由不连续的母小波经平移、伸缩后形成的一系列信号,对于连续的拍频载荷的稀疏表示不够充分,所以 DCT 字典的识别效果优于 Db10 小波字典; RECT 字典通过对 DCT 字典的选择与扩展,以及与 Db10 小波字典的级联,发挥冗余字典的优势,使得整体误差的增幅最小,从 14.53% 增加到 22.84%,在 100% 噪声水平时误差仅为 Tikhonov 正则化方法识别误差的三分之一。

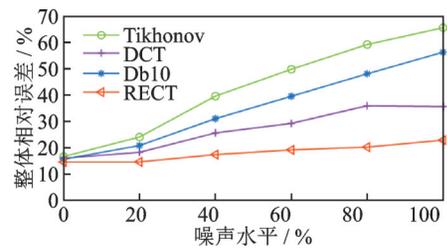


图 9 拍频载荷识别整体相对误差

Fig. 9 The overall relative error of beat frequency load identification

相对稀疏度  $RS$  用来表征字典的匹配性,稀疏度越高,稀疏表示向量中零的个数越多,表明字典与载荷的匹配性越好,如图 10 所示。从图 10 中可以看出, RECT 字典的稀疏度在任何噪声水平下都大于 90%,高于 DCT 字典与 Db10 小波字典,而且载荷识别结果的误差最小,说明了本文所提出的 RECT 字典在载荷识别方面的优势。图 11 中进一步对比了 40% 噪声水平下 DCT 字典、Db10 小波字典以及 RECT 字典的稀疏表示系数。可以看出, DCT 字典的余弦波字典原子可以表示出拍频载荷的主要频率,但同时高阶字典原子也对高频噪声进行了表示; Db10 小波字典的字典原子不连续,需要用多阶字典原子共同表示连续载荷,所以稀疏性最差;而 RECT 字典通过对 DCT 字典原子进行选择与扩展,避免了高阶字典原子的过拟合,提高了稀疏性,同时通过冗余 Db10 小波字典进行修饰,降低了识别误差。

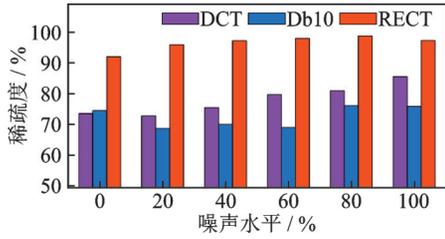


图10 相对稀疏度

Fig. 10 Relative sparsity

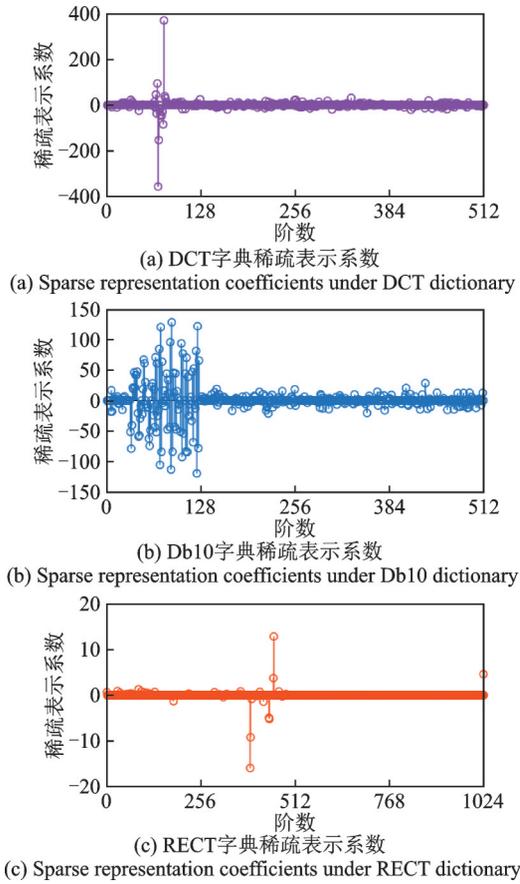


图11 拍频载荷稀疏表示系数(40%噪声)

Fig. 11 Sparse representation coefficients of beat frequency load with 40% noise

#### 4.2 连续冲击载荷识别

连续冲击载荷是另一种比较复杂的飞行载荷,本文设置的连续冲击载荷不仅包括多个局部的冲击部分,还包含整个时间历程上的谐波部分,时间历程如下式所示:

$$f_2 = 10 \left[ \sin(26\pi t) + \sin(60\pi t) \right] + 40 \left[ e^{-3000\pi(t-0.175)^2} + e^{-3000\pi(t-0.4045)^2} + e^{-3000\pi(t-0.64)^2} + e^{-3000\pi(t-0.9425)^2} + e^{-3000\pi(t-1.175)^2} \right], \quad 0 \leq t \leq 1.28 \text{ s} \quad (22)$$

同样地,使用 Tikhonov 正则化方法、DCT 字典方法、Db10 小波字典方法和 RECT 字典方法识别连续冲击载荷,设置离散余弦基矩阵阶数  $r=64$ ,滞后因子  $m=8$ 。连续冲击载荷的识别结果与实际测量

结果对比如图 12 与 13 所示。

图 12 中对比了 Tikhonov 正则化方法、DCT 字典方法、Db10 小波字典方法和 RECT 字典方法对连续冲击载荷的识别结果。可以看出,在实验室环境的测量噪声水平下,4 种方法的识别效果都很好,识别载荷的时间历程吻合度高,各个冲击峰值时刻与实际一致。

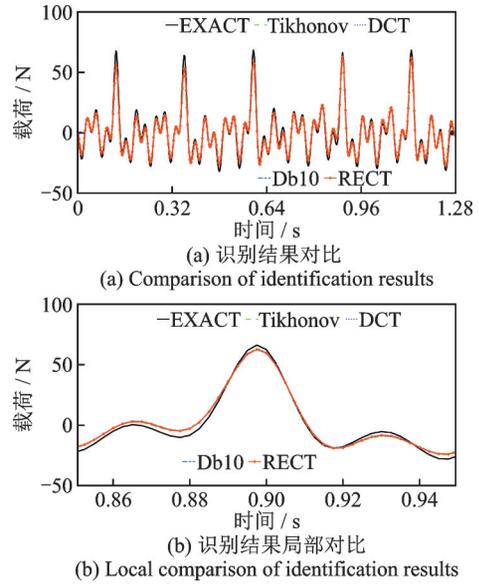


图12 连续冲击载荷识别结果

Fig. 12 Identification results of repetitive impact load

在响应数据中加入 40% 噪声时,连续冲击载荷的识别结果如图 13 所示。Tikhonov 正则化方法受噪声影响较大,识别载荷的波形与真实载荷相比差异较大,振荡较明显;而基于字典的稀疏正则化方法识别出的载荷波形相对平滑,相比于 DCT 字典或者 Db10 小波字典单独表示连续冲击载荷的谐波部分和冲击部分,本文提出的 RECT 字典方法识别出的载荷更加接近真实载荷。

连续冲击载荷不仅包含冲击部分,还包含谐波部分,因此使用整体相对误差  $RE$  和峰值误差  $PRE$  一起评估载荷识别方法的准确性。图 14 和 15 对比了 4 种识别方法在不同噪声水平下连续冲击载荷识别结果的精度。可以看出,在  $[0\%, 100\%]$  噪声水平区间上,RECT 字典识别方法的整体相对误差和峰值相对误差均小于 Tikhonov 正则化方法、DCT 字典识别方法以及 Db10 小波字典识别方法。结合图 13,在 40% 噪声水平时,RECT 字典识别方法的整体相对误差和峰值相对误差分别为 26.46% 和 14.48%。从图 14 和 15 的对比中可以看出,DCT 字典识别方法的整体相对误差小于 Db10 小波字典识别方法,而 Db10 小波字典识别方法的峰值相对误差小于 DCT 字典识别方法,表明 DCT 字典对于谐波

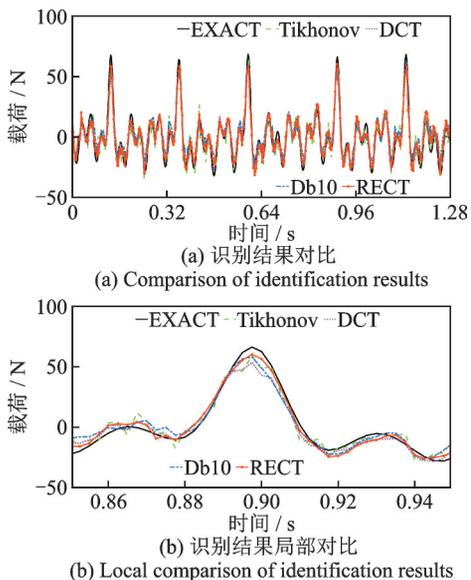


图 13 连续冲击载荷识别结果 (40% 噪声)  
Fig. 13 Identification results of repetitive impact load with 40% noise

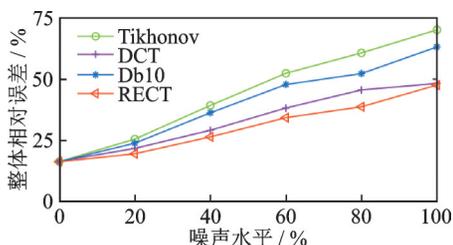


图 14 连续冲击载荷识别整体相对误差  
Fig. 14 The overall relative error of repetitive impact load identification

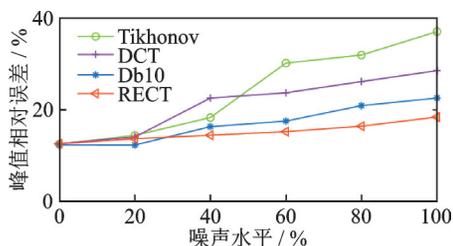


图 15 连续冲击载荷识别峰值相对误差  
Fig. 15 Peak relative error of repetitive impact load identification

信号的稀疏表示有优势,Db10小波字典对于冲击信号的稀疏表示有优势,所以冗余扩展后的RECT字典的对于连续冲击载荷的稀疏表示更好,在不同噪声水平下识别结果的整体相对误差和峰值相对误差都是最小的。

图 16 中对比了不同噪声水平下的 3 种字典的稀疏表示向量的稀疏度。可以看出,RECT字典的稀疏度在任何噪声水平下都高于 DCT 字典与 Db10 小波字典,说明冗余扩展后的 RECT 字典与连续冲击载荷匹配性更好。图 17 中展示了 40% 噪声水平下

连续冲击载荷在 DCT 字典、Db10 小波字典以及 RECT 字典下的稀疏表示系数。可以看出,RECT 字典发挥冗余字典的优势,使用不同形式的字典原子匹配连续冲击载荷的不同分量形式,既提高了稀疏性,又降低了识别误差。

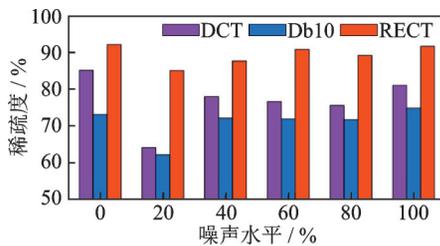


图 16 相对稀疏度

Fig. 16 Relative sparsity

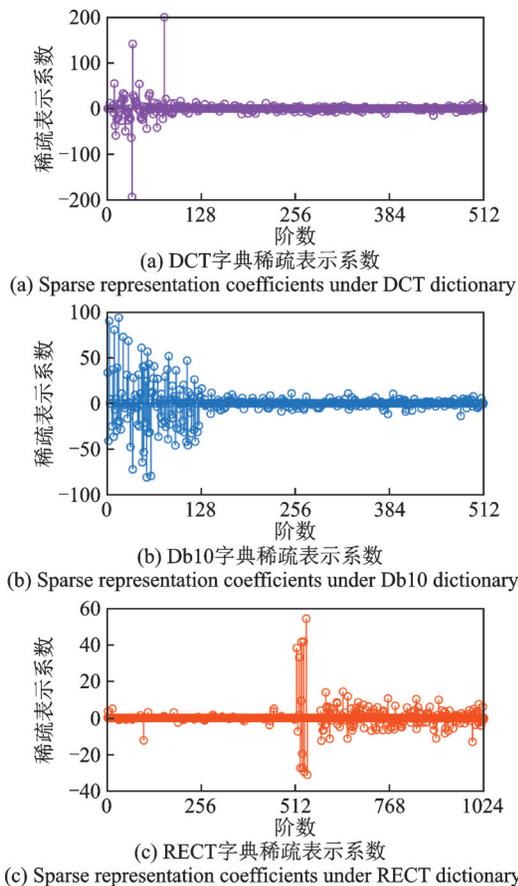


图 17 连续冲击载荷稀疏表示系数 (40% 噪声)

Fig. 17 Sparse representation coefficients of repetitive impact load with 40% noise

### 5 结 论

本文针对噪声影响下传统正则化载荷识别方法对复杂载荷识别精度低的问题,提出了冗余扩展余弦字典的构造方法,建立了基于冗余字典的复杂动载荷识别模型。冗余扩展余弦字典由 ECT 字典与 Db10 小波字典级联构成,用于表示复杂载荷的主要

特征。使用冗余字典与稀疏表示,将高噪声水平下的复杂载荷求解问题转换为稀疏表示向量的求解问题,L1范数正则化用于稀疏表示向量的目标函数的构建,截断牛顿内点法用于稀疏正则化的求解,改进L曲线准则用于稀疏正则化参数的选择。本文通过对拍频载荷和连续冲击载荷两种复杂载荷识别的试验研究,得出以下结论:

(1)针对测量数据中较高水平的噪声影响,经典Tikhonov正则化方法具有自身的局限性,对噪声敏感,而本文提出的基于RECT字典的载荷识别方法通过特征提取降低噪声影响,具有更好的稳定性与抗噪性。

(2)相比传统的DCT字典与Db10小波字典,基于离散余弦基函数的扩展字典和Db10小波字典级联构造的RECT字典对复杂载荷的匹配度更好,稀疏性更高,载荷识别精度也更好。

#### 参考文献:

- [1] Hansen P C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion[M]. Philadelphia: SIAM, 2005.
- [2] Liu Ruixue, Dobriban Edgar, Hou Zhichao, et al. Dynamic load identification for mechanical systems: a review[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2022, 29(2): 831-836.
- [3] Miao B, Zhou F, Jiang C, et al. A comparative study of regularization method in structure load identification[J]. Shock and Vibration, 2018: 9204865.
- [4] Wang L, Liu J, Xie Y, et al. A new regularization method for the dynamic load identification of stochastic structures[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2018, 76(4): 741-759.
- [5] 缪炳荣,周凤,陈翔宇,等.利用核函数和不同正则化方法的结构载荷识别混合技术研究[J].振动工程学报, 2018, 31(4): 553-560.  
Miao Bingrong, Zhou Feng, Chen Xiangyu, et al. Research of the structure load identification hybrid technology using kernel function and different regularization method[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(4): 553-560.
- [6] 乔百杰,陈雪峰,刘金鑫,等.机械结构冲击载荷稀疏识别方法研究[J].机械工程学报, 2019, 55(3): 81-89.  
Qiao Baijie, Chen Xuefeng, Liu Jinxin, et al. Sparse identification of impact force acting on mechanical structures[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(3): 81-89.
- [7] Rezayat A, Nassiri V, De Pauw B, et al. Identification of dynamic forces using group-sparsity in frequency domain[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70-71: 756-768.
- [8] Qiao B J, Zhang X W, Wang C X, et al. Sparse regularization for force identification using dictionaries[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 368: 71-86.
- [9] 严刚,孙浩.基于贝叶斯压缩感知的复合材料结构冲击载荷识别研究[J].振动工程学报, 2018, 31(3): 483-489.  
Yan Gang, Sun Hao. Identification of impact force for composite structure using Bayesian compressive sensing[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(3): 483-489.
- [10] Pan C D, Yu L, Liu H L, et al. Moving force identification based on redundant concatenated dictionary and weighted L1-norm regularization[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 98: 32-49.
- [11] 付晓梅,陈莉,邢娜.基于非正交傅里叶基的冗余字典设计[J].天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2017, 50(12): 1249-1254.  
Fu Xiaomei, Chen Li, Xing Na. Redundant dictionary design based on non-orthogonal Fourier base[J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2017, 50(12): 1249-1254.
- [12] 常晓通,闫云聚,刘臻,等.基于Green函数和正则化的动态载荷识别方法[J].振动、测试与诊断, 2014, 34(1): 124-129.  
Chang Xiaotong, Yan Yunju, Liu Liu, et al. Applications of regularization method in dynamic load identification[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2014, 34(1): 124-129.
- [13] 董隽硕,吴玲达,郝红星.稀疏表示技术与应用综述[J].计算机系统应用, 2021, 30(7): 13-21.  
Dong Junshuo, Wu Lingda, Hao Hongxing. Survey on sparse representation techniques and applications[J]. Computer Systems & Applications, 2021, 30(7): 13-21.
- [14] Qiao B J, Chen X F, Luo X J, et al. A novel method for force identification based on the discrete cosine transform[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2015, 137(5): 051012.
- [15] 谢成俊.小波分析理论及工程应用[M].2版.长春:东北师范大学出版社, 2015.  
Xie Chengjun. Wavelet Analysis Theory and Engineering Applications [M]. 2nd ed. Changchun: Northeast Normal University Press, 2015.
- [16] Qiao Baijie, Zhang Xingwu, Gao Jiawei, et al. Sparse deconvolution for the large-scale ill-posed inverse problem of impact force reconstruction[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 83: 93-115.
- [17] Qiao Baijie, Zhang Xingwu, Gao Jiawei, et al. Impact

- force sparse reconstruction from highly incomplete and inaccurate measurements[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 376: 72-94.
- [18] 张梓航,贺文宇,任伟新.基于双稀疏字典的动态荷载识别方法[C].第29届全国结构工程学术会议论文集(第II册),武汉:工程力学,2020:338-342.  
Zhang Zihang, He Wenyu, Ren Weixin. Dynamic load identification based of sparse dictionary[C]. *Proceedings of the 29th National Conference on Structural Engineering (NO. II)*, Wuhan: Engineering Mechanics, 2020: 338-342.
- [19] 吴炜明,王延新.基于L曲线方法的Lasso正则化参数选择[J].西南师范大学学报(自然科学版),2022,47(1):36-42.  
Wu Weiming, Wang Yanxin. Regularization parameter selection of lasso based on L-curve[J]. *Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)*, 2022, 47(1): 36-42.
- [20] 冯振宇,郝晓帆,杨青青,等.GARTEUR飞机模型的模态试验与模型修正技术[J].科学技术与工程,2019,19(25):105-111.  
Feng Zhenyu, Hao Xiaofan, Yang Qingqing, et al. Modal test and dynamic model updating for GARTEUR aircraft model[J]. *Science Technology and Engineering*, 2019, 19(25): 105-111.
- [21] 曹树谦.振动结构模态分析—理论、实验与应用[M].天津:天津大学出版社,2018.  
Cao Shuqian. *Modal Analysis of Vibration Structures: Theory, Experiment and Application*[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2018.

## Identification of complex dynamic load using redundant extended cosine transform dictionary

HE Wen-bo, XU Bu-feng, FENG Zhen-yu, SHI Zhang-hao, XIE Jiang, WANG Wei

(Key Laboratory of Civil Aviation Aircraft Airworthiness Certification Technology, College of Safety Science and Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

**Abstract:** Considering the low accuracy problem of complex dynamic load identification under the effect of real measurement noise, an L1 norm regularized load identification method based on redundant extended cosine transform dictionary is proposed. According to the convolutional relationship between the system response and the external load, the discrete system control equation for load identification is established. According to the main characteristics of the vibration response signal, appropriate discrete cosine basis functions are selected and extended, and the extended cosine dictionary and the Db10 wavelet dictionary are used to cascade a redundant extended dictionary to represent the complex load sparsely. By using the L1 norm regularization method to solve the sparse representation vector under the proposed redundant extended cosine transform dictionary, the optimal regularization parameter is obtained by improved L curve criterion, and the identification of beat load and repetitive impact load at different noise levels is realized. The experimental verification results show that the constructed redundant extended cosine transform dictionary has much better performance in sparse representation of beat load and repetitive impact load, and the load identification method based on the redundant extended cosine transform dictionary has great advantages to obtain accurate inversion results and good robustness.

**Key words:** load identification; redundant dictionary; L1 norm; regularization method; sparse representation

**作者简介:** 何文博(1987—),男,硕士,助理研究员。E-mail: wbhe@cauc.edu.cn。

**通讯作者:** 冯振宇(1966—),男,博士,教授,博士生导师。E-mail: fzycauc@163.com。