第37卷第6期
2024年6月

振 动 工 程 学 报
Journal of Vibration Engineering

Vol. 37 No. 6
Jun. 2024

孪生数据驱动的大型矿井提升机主轴承随机振动系统的设计可靠性分析

曹 爽[1,2], 卢 昊[1,2], 朱真才[1,2], 张义民[3]

(1.中国矿业大学机电工程学院, 江苏 徐州 221008; 2.中国矿业大学江苏省矿山机电装备高校重点实验室, 江苏 徐州 221008; 3.沈阳化工大学机械与动力工程学院, 辽宁 沈阳 110142)

摘要: 设计阶段的大型矿井提升机主轴承随机振动系统的设计可靠性分析因试验样本不足,无法获取振动加速度响应的完备概率信息。提出了概率信息不完备下大型矿井提升机主轴承设计可靠性分析的技术路线:滚动轴承多尺度耦合系统动力学模型-振动加速度概率密度演化-概率密度演化路径随机过程建模-振动功率谱密度的概率分布-基于条件概率的设计可靠度计算。运用已采集的工况数据驱动建立滚动轴承多尺度耦合系统动力学模型,开展了振动加速度概率密度演化研究;基于概率密度演化和Karhunen-Loève展开,提出了滚动轴承振动加速度的非平稳随机过程建模方法,获得了滚动轴承振动加速度随机序列的孪生数据;研究了大型矿井提升机主轴承振动加速度功率谱密度的概率分布,并计算了大型矿井提升机主轴承在服役时间上的设计可靠度指标。

关键词: 随机振动; 设计可靠性分析; 孪生数据; 大型矿井提升机主轴承; 概率信息不完备

中图分类号: O324; TD534 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)06-0915-13

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.06.002

1 概 述

设计阶段的大型矿井提升机主轴承将在低转速、重载荷和强冲击的复杂环境中工作,其运行稳定性受到宏尺度系统动态特性和微尺度材料磨损的共同作用。由轴承内圈冲击激励产生的系统振动会引起外圈滚道与滚动体的局部接触应力变大。外圈滚道在局部高接触应力作用下会因疲劳磨损而导致其表面材料剥落,形成点蚀。同时,外圈滚道的点蚀故障激励会引起滚动轴承较大的振动响应[1]。实际中,滚动轴承的宏尺度系统动态特性和微尺度材料磨损还受到制造水平的影响,进而导致滚动轴承的振动响应遵循某种随机过程[2]。此外,设计阶段的大型矿井提升机主轴承因其价格昂贵和工况复杂,只能开展小样本试验,甚至无法开展试验。虽然随机过程的协方差函数可以从小样本随机序列中统计,但是概率分布无法从小样本随机序列中恢复,特别是四阶矩[3]都随时间变化的概率分布。因此,信息不完备下大型矿井提升机主轴承的设计可靠性分析是一个工程难题。

数字孪生技术[4]提供了很好的解决思路,在状态量无法监测的前提下,可以通过监测环境变量来驱动物理模型,进而获取滚动轴承的振动响应并开展可靠性研究。孪生数据驱动的设计可靠性分析通过综合考虑设计产品的制造水平和复杂工况,把未来服役的设计产品的运行状态全部提前映射出来,并基于孪生的状态数据给出设计可靠度。

图1详细描述了孪生数据驱动的大型矿井提升机主轴承随机振动系统的设计可靠性分析的技术路线。主要包括:第一,分析的对象是设计阶段的主轴承;第二,复杂工况随机分配给每个确定的主轴承;第三,主轴承的运行状态被提前孪生。基于设计院确定的设计参数,建立共性的滚动轴承多尺度系统动力学模型;根据制造商的不完备制造水平信息,模型参数随机化并确定个性的动力学模型,且每个轴承产品的个性动力学模型具备概率属性;考虑到经销商随机发货给不同的煤矿企业,即每个轴承产品的服役工况具有不确定性,采集的工况数据被随机分配给个性的动力学模型;通过工况数据驱动个性的动力学模型,孪生出大量的振动响应,进而建立振动响应的非平稳非高斯随机模型并计算这批轴承的

收稿日期: 2022-08-28; **修订日期:** 2022-10-17

基金项目: 国家重点研发计划项目(2017YFF0210604);江苏省高校优势学科建设工程资助项目(PAPD);国家留学基金项目(CSC202106420056)。

可靠度。

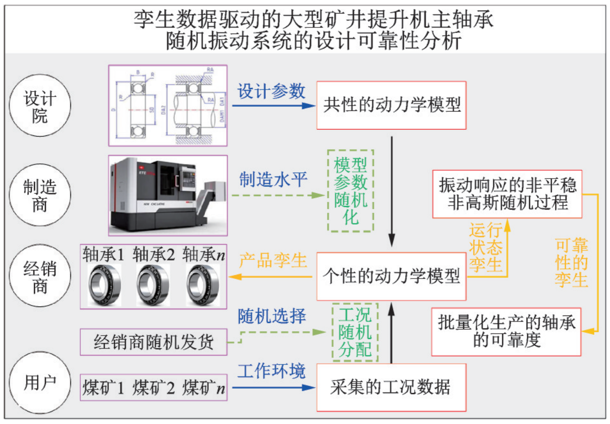


图1 孪生数据驱动的大型矿井提升机主轴承随机振动系统的设计可靠性分析技术路线

Fig. 1 Technical route of twin data-driven design reliability analysis of random vibration system for main bearing of a large mine hoist

以上孪生数据驱动的大型矿井提升机主轴承随机振动系统的设计可靠性分析技术路线涉及概率分配的技术问题，即个性的动力学模型以多少概率出现和工况数据以多少概率分配给个性的动力学模型，在这两个概率的耦合下产生的振动响应也具备某种概率属性。

本文以矿井提升机主轴承为研究对象，建立滚动轴承宏微尺度耦合系统的动力学模型；针对信息不完备的概率空间，提出一种基于线性矩的GF偏差代表点选取策略，并开展滚动轴承振动响应的概率密度演化研究；针对概率密度演化缺失随机序列信息，提出一种基于概率密度演化路径的非平稳随机过程建模方法，进而获取随机振动功率谱密度的概率密度函数；最后计算矿井提升机主轴承的可靠度。

2 主轴承多尺度系统动力学模型

2.1 宏尺度系统动力学方程

如图2所示，矿井提升机主轴承的内圈同时受到X和Y轴方向上的径向力$q_x(t)$和$q_y(t)$。滚动轴承的非线性动力学模型[1]包括内、外圈水平和竖直方向的4个自由度以及单元谐振器竖直方向的1个自由度。其中，m_i，m_o和m_r分别为内圈、外圈和单元谐振器的质量；c_i，c_o和c_r分别为内圈、外圈和单元谐振器的阻尼；k_i，k_o和k_r分别为内圈、外圈和单元谐振器的刚度；f_x和f_y分别为接触力f在X和Y方向的分量。

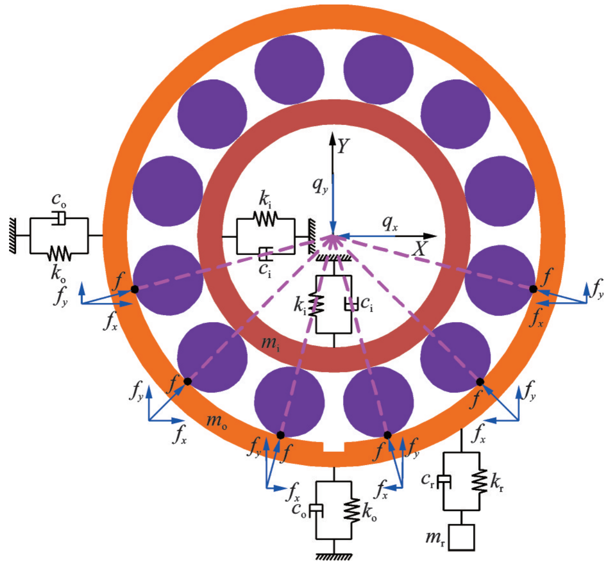


图2 矿井提升机主轴承动力学模型

Fig. 2 Dynamic model of main bearing for a mine hoist

根据牛顿第二定律，滚动轴承的动力学方程为：

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i + c_i\dot{x}_i + k_i x_i + f_x = q_x(t) \\ m_i\ddot{y}_i + c_i\dot{y}_i + k_i y_i + f_y = q_y(t) \\ m_o\ddot{x}_o + c_o\dot{x}_o + k_o x_o - f_x = 0 \\ m_o\ddot{y}_o + (c_o + c_r)\dot{y}_o - c_r\dot{y}_r + (k_o + k_r)y_o - \\ \quad k_r y_r - f_y = 0 \\ m_r\ddot{y}_r + c_r(\dot{y}_r - \dot{y}_o) + k_r(y_r - y_o) + f_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中 x_i和x_o分别为内圈和外圈在X方向的位移；y_i和y_o分别为内圈和外圈在Y方向的位移；y_r为轴承的振动响应。

式(1)还可以写成矩阵的形式，其表达式为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}(t) \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{M}$为质量矩阵；$\boldsymbol{C}$为阻尼矩阵；$\boldsymbol{K}$为刚度矩阵；$\boldsymbol{X}$为位移向量；$\boldsymbol{F}$为接触力向量；$\boldsymbol{Q}(t)$为径向力向量。

设滚动轴承节圆直径为D_p，滚动体直径为D_b，内圈角速度为w，则保持架角速度为：

$$w_c = \left(1 - \frac{D_b}{D_p}\right)\frac{w}{2} \tag{3}$$

ψ_i表示第i个滚动体在时间t的角位置，其公式为：

$$\psi_i = w_c t + \frac{2\pi(i-1)}{n_r} + \psi_0; i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_r \tag{4}$$

式中 n_r为滚动体的数目；ψ_0为滚动体的初始角位置。

滚动轴承受内圈径向载荷的作用，第i个滚动体在角位置ψ_i的总接触变形量为：

$$\delta_i = (x_i - x_o)\cos\psi_i + (y_i - y_o)\sin\psi_i - \varepsilon - \xi_i C_d \tag{5}$$

式中 ε为滚动轴承的径向间隙；C_d为外圈滚道上

点蚀的深度;ξ_i 为判断函数,如下式所示:

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \varphi_d<\varphi_i<\varphi_d+\Delta\varphi_d \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{6}$$

式中　φ_d 为外圈滚道上点蚀所在的位置角,$\Delta\varphi_d$ 为点蚀的角宽度。

根据非线性Hertz接触理论,第 i 个滚动体的接触力为:

$$f_x=k_b\sum_{i=1}^{n_r}\gamma_i\delta_i^{1.5}\cos\varphi_i \tag{7a}$$

$$f_y=k_b\sum_{i=1}^{n_r}\gamma_i\delta_i^{1.5}\sin\varphi_i \tag{7b}$$

式中　k_b 为接触刚度;γ_i 为判断函数,其表达式为:

$$\gamma_i=\begin{cases}1, & \delta_i>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}。$$

2.2　微尺度材料滑动磨损方程

假设外圈滚道的磨损为屈服线性磨损过程,即体积磨损率与法向载荷成正比。由Holm-Archard方程[5]可知:

$$\frac{V}{s}=K\frac{F_N}{H} \tag{8}$$

式中　V 为体积磨损量;s 为滑动距离;K 为无量纲磨损系数;H 为材料硬度;F_N 为法向载荷。

将式(8)的等号两边同时除以表观接触面积 S_A,可得:

$$\frac{h}{s}=K\frac{p}{H} \tag{9}$$

式中　h 为磨损深度;p 为法向接触压力。

如图3所示,滚动体与滚道间的接触面积近似为长方形,其长为 $a=60$ mm,宽为 $b=0.00668\sqrt{\frac{2.04F_N}{an_r}\frac{D_pD_b}{(D_p-D_b)}}$ mm,施加在第 i 个滚动体上的法向载荷为 $F_N=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$,则在第 i 个滚动体处施加在外圈滚道的平均法向接触压力为:

$$p_i=\frac{F_N}{ab} \tag{10}$$

假设 H 为常数,则 K 和 H 可组合为无量纲磨损系数 k,式(9)还可以表达为:

$$\frac{h}{s}=k_v p \tag{11}$$

当滚动轴承旋转一周时,每个滚动体在外圈滚道上点蚀处的滑动距离为 s_1,则外圈滚道上点蚀处的磨损深度为:

$$h=\sum_{i=1}^{n_r}k_v p_i s_1 \tag{12}$$

式中　h 即为式(5)的点蚀深度 C_d。

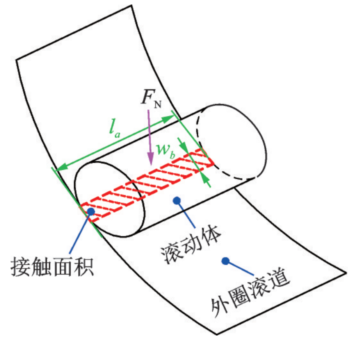


图3　滚动体受力后的接触面积

Fig. 3　Contact area of rolling element subjected to the force

2.3　多尺度耦合系统动力学仿真

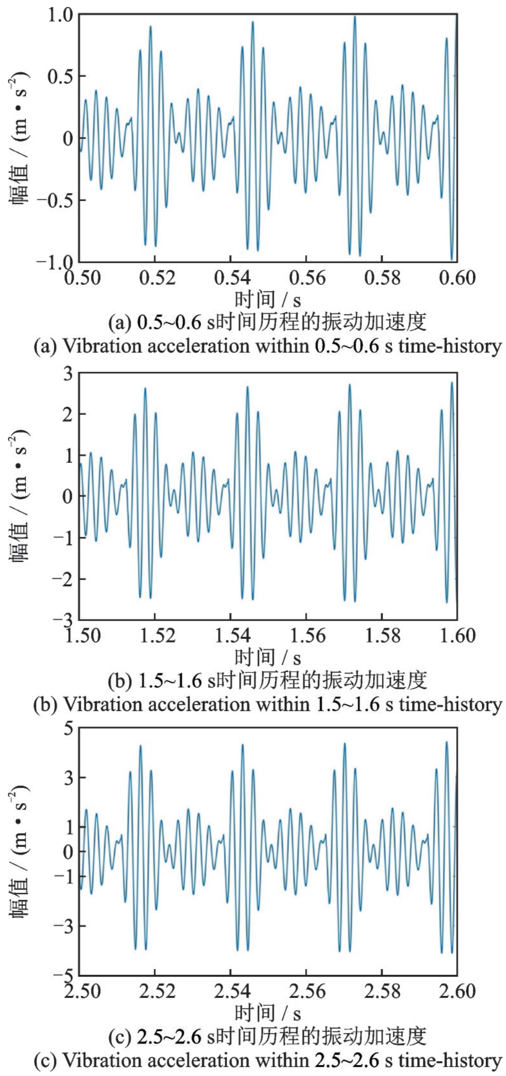
为了获得矿井提升机主轴承宏微尺度耦合系统的振动加速度响应,利用Runge-Kutta法求解式(1)。矿井提升机主轴承多尺度耦合系统动力学模型的主要参数如表1所示,其中,$q_x=0.5Q_{x0}\sin(t)+Q_{x0}$,$q_y=0.5Q_{y0}\cos(t)+Q_{y0}$,$Q_{x0}$ 和 Q_{y0} 分别为 q_x 和 q_y 的均值。

表1　滚动轴承多尺度耦合系统动力学模型主要参数

Tab. 1　Main parameters of dynamic model for multi-scale coupling system of rolling element bearing

参数	数值	单位
m_i,m_o,m_r	8.7,49.5,3.79	kg
c_i,c_o,c_r	1379,2210,9424	Ns/m
k_i,k_o,k_r	$4\times10^4,1.5\times10^7,2\times10^9$	N/m
Q_{x0}	3591.211	N
Q_{y0}	9866.773	N
D_p,D_b	0.718,0.053	m
w	400	r/min
n_r	12	—
φ_0	π/2	rad
ε	10^{-6}	m
k_b	6×10^8	N/m
k_v	4×10^{-18}	mm^2/N
s_1	2×10^{-3}	mm

图4(a)~(c)分别为矿井提升机主轴承多尺度耦合系统的振动加速度时间历程。随着外圈滚道磨损深度的增加,滚动轴承加速度的振幅逐渐增大。在服役时间0.5~0.6 s内,滚动轴承加速度的最大振幅为0.998 m/s²;在服役时间1.5~1.6 s内,滚动轴承加速度的最大振幅为2.769 m/s²;在服役时间2.5~2.6 s内,滚动轴承加速度的最大振幅为4.441 m/s²。



(a) 0.5~0.6 s时间历程的振动加速度

(a) Vibration acceleration within 0.5~0.6 s time-history

(b) 1.5~1.6 s时间历程的振动加速度

(b) Vibration acceleration within 1.5~1.6 s time-history

(c) 2.5~2.6 s时间历程的振动加速度

(c) Vibration acceleration within 2.5~2.6 s time-history

图4 滚动轴承多尺度耦合系统的振动加速度

Fig. 4 Vibration acceleration of multi-scale coupling system of rolling element bearing

3 主轴承随机振动的不确定性量化

3.1 信息不完备下概率空间选点的线性矩法

概率空间 $\mathbf{\Theta}$ 由 d 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 构成，且各分量 X_i 的概率分布未知。实际中，X_i 只有少量样本信息能被知晓。基于有限个($n_s>200$)随机样本，X_i 的前4个线性矩[6-7]分别定义为：

$$\ell_{i,1}=\alpha_0 \tag{13a}$$

$$\ell_{i,2}=2\alpha_1-\alpha_0 \tag{13b}$$

$$\ell_{i,3}=6\alpha_2-6\alpha_1+\alpha_0 \tag{13c}$$

$$\ell_{i,4}=20\alpha_3-30\alpha_2+12\alpha_1-\alpha_0 \tag{13d}$$

式中 $\alpha_r(0\leqslant r\leqslant 3)$为概率权重矩，其表达式为：

$$\alpha_r=\frac{1}{n_s}\sum_{j=1}^{n_s}\frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-r)}{(n_s-1)(n_s-2)\cdots(n_s-r)}x_{i,j} \tag{14}$$

式中 n_s 为 X_i 的样本容量；$x_{i,j}$ 为 X_i 的第 j 个次序统计量。

为了标准化 X_i 的高阶线性矩，它的偏度和峰度用线性矩比来描述，如下式所示：

$$\tau_{i,3}=\frac{\ell_{i,3}}{\ell_{i,2}} \tag{15a}$$

$$\tau_{i,4}=\frac{\ell_{i,4}}{\ell_{i,2}} \tag{15b}$$

式中 $\tau_{i,3}$ 和 $\tau_{i,4}$ 分别为 X_i 的线性偏度和线性峰度。

根据三次正态变换多项式[6]，x_i 可近似为：

$$x_i=S(u_i)=\ell_{i,1}+\ell_{i,2}\sqrt{\pi}\left(a_i+b_iu_i+c_iu_i^2+d_iu_i^3\right) \tag{16}$$

式中 $S(\cdot)$为三次多项式函数；u_i 为标准正态随机变量 U_i 的样本；a_i，b_i，c_i 和 d_i 为多项式系数，其解析表达式见附录A。

按照变量的等概率变换原则，X_i 的累积分布函数表达为：

$$F(x_i)=\Phi(u_i) \tag{17}$$

式中 $F(\cdot)$和 $\Phi(\cdot)$分别为 X_i 和 U_i 的累积分布函数，x_i 和 u_i 的对应关系如式(16)所示。

相较传统的 Pearson 相关系数，Kendall(或 Spearman)秩相关系数能在非线性变换的前提下保持不变。由于 x_i 和 u_i 的对应关系是非线性变换，因此，秩相关系数被用来度量 X_i 和未知变量 X_j 的关联程度。

假设 X_i 和 X_j 的 Kendall 秩相关系数为 k_τ，那么，中间标准正态随机变量 Z_i 和 Z_j 的 Kendall 秩相关系数也为 k_τ。与 k_τ 对应的 Pearson 相关系数 ρ 为：

$$\rho=\sin\left(\frac{k_\tau\pi}{2}\right) \tag{18}$$

对应的 Pearson 相关矩阵描述为：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix} \tag{19}$$

基于正态随机变量的线性变换性质，Z 可以用 U 来表示，其表达式为：

$$\begin{bmatrix}Z_i\\ Z_j\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}U_i\\ U_j\end{bmatrix} \tag{20}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的 Cholesky 分解；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，其表达式为：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A_{ii} & 0\\ A_{ji} & A_{jj}\end{bmatrix}。$$

根据式(16)和(20)，x_i 和 x_j 最终可以分别表示为：

$$x_i=\ell_{i,1}+\ell_{i,2}\sqrt{\pi}\left[a_i+b_iA_{ii}u_i+c_i(A_{ii}u_i)^2+d_i(A_{ii}u_i)^3\right] \tag{21a}$$

$$x_j=\ell_{j,1}+\ell_{j,2}\sqrt{\pi}\left[a_j+b_j(A_{ji}u_i+A_{jj}u_j)+c_j(A_{ji}u_i+A_{jj}u_j)^2+d_j(A_{ji}u_i+A_{jj}u_j)^3\right] \tag{21b}$$

3.2　概率空间剖分与赋得概率计算

代表点选取的基本原则是在均匀抽样的基础上确保经验累积分布函数的偏差很小。针对信息不完备的概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$,本节提出了一种改进的 GF 偏差代表点[8]选取策略。

一个完整的概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$ 被剖分成一系列子域 $\boldsymbol{\Omega}_q(q=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{\Omega}_q$ 满足:(1)$\bigcup_{q=1}^{n}\boldsymbol{\Omega}_q=\boldsymbol{\Omega}_\Theta$;(2)$\boldsymbol{\Omega}_r\bigcap\boldsymbol{\Omega}_q=\varnothing, r\neq q$。在子域 $\boldsymbol{\Omega}_q$ 内的代表点用 $\boldsymbol{x}_q$ 表示,其中,$\boldsymbol{x}_q\in\mathbf{M}_n$ 是一个 d 维随机向量。$\boldsymbol{x}_q$ 的 Voronoi 区域用 V_q 表示,其表达式为:

$$\mathrm{V}_q=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{d}^N:\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_q\right\|\leqslant\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_m\right\|,\ \forall\boldsymbol{x}_m\in\mathbf{M}_n,\ m\neq q\right\}\tag{22}$$

式中　$\mathbf{M}_n$ 为概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$ 的代表点集;$\mathbf{d}^N$ 为 N 个 d 维随机向量组成的空间。

显然,V_q 的体积需要用 Monte Carlo 方法获取,其代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 的赋得概率与 V_q 的体积有关。

图 5 为利用 Voronoi 区域计算代表点的赋得概率的示意图。以 $d=2$ 的概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$ 为例,基于外接圆法计算 Voronoi 区域的面积 V_q,并采用微元法近似其代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 的赋得概率 P_q。每个 Voronoi 区域的外接圆的最大半径可以表达为:

$$r_q=\sup_{x\in d^2}\left[\inf_{x_q\in\mathrm{M}_n}\left(\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_q\right\|\right)\right]\tag{23}$$

如图 5 所示,以代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 为圆心,以 r_q 为半径作圆,圆的面积为 $S_q=\pi r_q^2$。采用 Monte Carlo 方法在圆内均匀撒入 n_c 个测试点 $\boldsymbol{x}_{q,k}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_c)$,计算每个测试点与代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 的距离。若测试点 $\boldsymbol{x}_{q,k}$ 满足公式(23),则:

$$\left\|\boldsymbol{x}_{q,k}-\boldsymbol{x}_q\right\|\leqslant\left\|\boldsymbol{x}_{q,k}-\boldsymbol{x}_m\right\|\tag{24}$$

式中　$\boldsymbol{x}_m$ 为与 $\boldsymbol{x}_q$ 相邻的代表点,则 $\boldsymbol{x}_{q,k}$ 属于代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 的 Voronoi 区域。

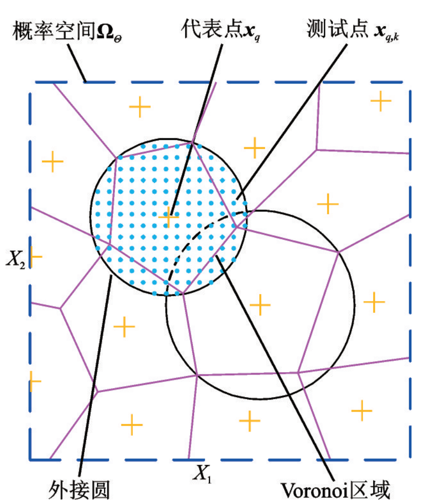


图 5　利用 Voronoi 区域计算代表点的赋得概率

Fig. 5　Assigned probabilities of representative points calculated based on Voronoi region

记测试点 $\boldsymbol{x}_{q,k}\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_c)$ 中属于 $\boldsymbol{x}_q$ 的 Voronoi 区域的数目为 n_b,则 Voronoi 区域的面积 V_q 可以近似为:

$$V_q=\frac{n_b}{n_c}S_q\tag{25}$$

位于 Voronoi 区域的每个测试点代表的面积 $V_{q,k}$ 可以近似为:

$$V_{q,k}=\frac{V_q}{n_b}\tag{26}$$

采用微元法,位于 Voronoi 区域的代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 的赋得概率 P_q 计算为:

$$P_q=\sum_{k=1}^{n_b}V_{q,k}P_\Theta\left(\boldsymbol{x}_{q,k}\right)\tag{27}$$

式中　$P_\Theta\left(\boldsymbol{x}_{q,k}\right)$ 为测试点 $\boldsymbol{x}_{q,k}$ 的联合概率密度函数。

根据式(16)和(17),$P_\Theta\left(\boldsymbol{x}_{q,k}\right)$ 可以表达为:

$$P_\Theta\left(\boldsymbol{x}_{q,k}\right)=\frac{\partial\Phi\left(\boldsymbol{u}_{q,k}\right)}{\partial\boldsymbol{u}_{q,k}}\frac{\partial\boldsymbol{u}_{q,k}}{\partial\boldsymbol{x}_{q,k}}=\prod_{j=1}^{d}\frac{\phi\left(u_{q,k,j}\right)}{b_j+2c_ju_{q,k,j}+3d_j\left(u_{q,k,j}\right)^2}\tag{28}$$

式中　$\phi(\cdot)$ 为标准正态分布密度函数;$\boldsymbol{u}_{q,k}$ 为测试点 $\boldsymbol{x}_{q,k}$ 的等概率变换点,它们对应关系如式(16)所示;$u_{q,k,j}$ 为 $\boldsymbol{u}_{q,k}$ 的第 j 个分量。若考虑 $\boldsymbol{x}_{q,k}$ 的两个分量间的相关性,$\partial\boldsymbol{u}_{q,k}/\partial\boldsymbol{x}_{q,k}$ 可以参照式(21a)和(21b)。

对代表点 $\boldsymbol{x}_q\in\mathbf{M}_n(q=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的概率 P_q 进行归一化处理,如下式所示:

$$\tilde{P}_q=\frac{P_q}{\sum_{q=1}^{n}P_q}\tag{29}$$

式中　$\tilde{P}_q$ 为代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 的最终赋得概率。

实际上,概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$ 只能被剖分成有限个且尽可能少的子域。因此,GF 偏差通常被用来作为概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$ 最佳剖分的指标,其表达式为:

$$D_{\mathrm{GF}}\left(\mathbf{M}_n\right)=\max_{1\leqslant j\leqslant d}\left\{\sup_{-\infty<x_j<+\infty}\left|F\left(x_j\right)-F_\Theta\left(x_j\right)\right|\right\}\tag{30}$$

式中　$F\left(x_j\right)$ 为第 j 个变量的边际分布函数,其表达式如式(17)所示;$F_\Theta\left(x_j\right)$ 为概率空间剖分影响下第 j 个变量的经验边际分布函数,可以表达为:

$$F_\Theta\left(x_j\right)=\sum_{q=1}^{n}\tilde{P}_q\cdot I\left\{x_{q,j}\leqslant x_j\right\}\tag{31}$$

式中　$I\{\cdot\}$ 为指示函数;$x_{q,j}$ 为代表点 $\boldsymbol{x}_q$ 的第 j 个分量。

代表点集的 GF 偏差越小,概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$ 的剖分越合理。因此,概率空间 $\boldsymbol{\Omega}_\Theta$ 的剖分可以转化为最优化问题。这种最优化问题可以通过遗传算法或其他优化方法解决,但要占据大量的计算资源。本节采

用点集重排法实现快速的概率空间剖分。该方法包括两个步骤:(1)生成初始点集;(2)重新排列以减少GF偏差。

由Sobol序列[9]生成在单位超立方体$[0,\ 1]^d$的d维均匀点集,如下式所示:

$$\varsigma_n=\left\{\boldsymbol{e}_q=\left(e_{q,1},e_{q,2},\cdots,e_{q,d}\right);q=1,\ 2,\ \cdots,\ n\right\}\tag{32}$$

根据式(19a)和(19b),在物理空间被第一次均匀化的初始点集可以定义为:

$$x_{q,j}=\ell_{j,1}+\ell_{j,2}\sqrt{\pi}\left(a_j+b_ju_{q,j}+c_ju_{q,j}^2+d_ju_{q,j}^3\right)\tag{33}$$

式中 $u_{q,j}$为在标准正态空间的点集,其表达式为:

$$u_{q,j}=\Phi^{-1}\left(e_{q,j}\right)\tag{34}$$

式中 $\Phi^{-1}(\cdot)$为$\Phi(\cdot)$的逆函数。

为了确保初始点$\boldsymbol{x}_q\ (q=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$所处的Voronoi区域的$V_q$彼此接近,$\boldsymbol{x}_q$在每个维度上被第二次均匀化,如下式所示:

$$x'_{q,j}=\ell_{j,1}+\ell_{j,2}\sqrt{\pi}\left[a_j+b_ju'_{q,j}+c_j\left(u'_{q,j}\right)^2+d_j\left(u'_{q,j}\right)^3\right]\tag{35}$$

式中 $u'_{q,j}$为在标准正态空间被第二次均匀化的点集,定义为:

$$u'_{q,j}=\Phi^{-1}\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}I\left\{x_{q,j}<x_{r,j}\right\}+\frac{1}{2n}\right)\tag{36}$$

式中 $x_{r,j}(r=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为在物理空间内第$j$个维度上被第一次均匀化的点集,当$r=q$时,$x_{r,j}=x_{q,j}$。

根据式(29)和(31),$x'_{q,j}$的最终赋得概率$\tilde{P}_q$和经验边际分布函数$F_\Theta\left(x'_j\right)$被分别确定。为了减少$x'_{q,j}$的GF偏差,$x'_{q,j}$在经验边际分布函数$F_\Theta\left(x'_j\right)$上被第三次均匀化,如下式所示:

$$x''_{q,j}=\ell_{j,1}+\ell_{j,2}\sqrt{\pi}\left[a_j+b_ju''_{q,j}+c_j\left(u''_{q,j}\right)^2+d_j\left(u''_{q,j}\right)^3\right]\tag{37}$$

式中 $u''_{q,j}$为在标准正态空间被第三次均匀化的点集,定义为:

$$u''_{q,j}=\Phi^{-1}\left(\sum_{r=1}^{n}\tilde{P}_r\cdot I\left\{x'_{q,j}<x'_{r,j}\right\}+\frac{\tilde{P}_r}{2}\right)\tag{38}$$

式中 $x'_{r,j}(r=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为在物理空间内第$j$个维度上被第二次均匀化的点集;$\tilde{P}_r$为代表点$\boldsymbol{x}_r$的最终赋得概率。当$r=q$时,$x'_{r,j}=x'_{q,j}$,$\tilde{P}_r=\tilde{P}_q$。

在信息不完备的概率空间中,由以上的点集重排法所确定的代表点集$\boldsymbol{x}''_q\ (q=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$通常只是次佳的。但是,$\boldsymbol{x}''_q$的精度在实际应用中足够满足大部分工程的要求。表2为影响矿井提升机主轴承多尺度耦合系统振动响应的随机变量。

如图6所示,代表点数量q是影响选点策略精度的主要因素,而测试点数量n_c对选点策略精度的影响较小。当$q\geqslant 800$时,选点策略能达到较好的精度效果,其GF偏差的范围为$[0.0245,\ 0.0343]$。当$q=800$时,采用$n_c=1\times10^6$获得的选点策略的GF偏差为0.0271;而采用$n_c=8\times10^6$获得的选点策略的GF偏差为0.0303。因此,n_c的增加并不能显著地提高选点策略的稳定性。在工程应用中,可以选取较大的q和较小的n_c,在多次尝试的情况下选择满足工程要求的代表点集。

表2 随机变量的概率特征

Tab. 2 Probabilistic characteristics of random variables

变量	符号	均值μ	标准差σ	概率分布
X_1	m_r	3.79	0.25	截断型正态分布
X_2	c_r	9424	40	对数正态分布
X_3	k_r	2×10^9	800	对数正态分布
X_4	D_p	0.718	0.005	截断型正态分布
X_5	D_b	0.053	0.005	截断型正态分布
X_6	β	10^{-6}	10^{-7}	正态分布
X_7	Q_{x0}	3591.211	26	对数正态分布
X_8	Q_{y0}	9866.773	34	对数正态分布
X_9	k	4×10^{-18}	6×10^{-20}	对数正态分布
X_{10}	s_1	2×10^{-3}	7.598×10^{-6}	均匀分布

注:随机变量X_1,X_4,X_5和X_{10}的概率分布区间分别为$[3.06,\ 4.49]$,$[0.705,\ 0.733]$,$[0.038,\ 0.065]$和$[1\times10^{-3},\ 3\times10^{-3}]$。

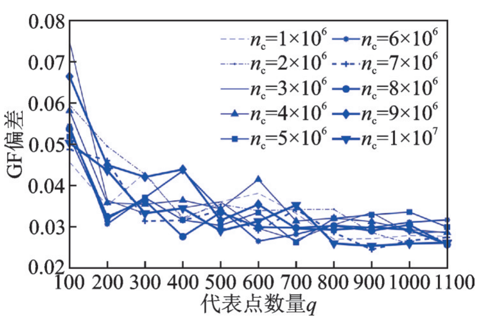


图6 基于线性矩的GF偏差代表点选取策略的精度

Fig. 6 Accuracy of selection strategy of GF discrepancy representative points based on linear moment

3.3 随机振动的概率密度演化

矿井提升机主轴承多尺度耦合系统动力学方程的参数用一系列基本随机变量$\Theta=[X_1,X_2,\cdots,X_{10}]$表示。根据式(2),主轴承的随机动力学方程可以表示为:

$$\boldsymbol{M}(\Theta)\ddot{Z}+\boldsymbol{C}(\Theta)\dot{Z}+\boldsymbol{K}(\Theta)Z+F(\Theta,t)=\boldsymbol{Q}(\Theta,t)\tag{39}$$

基于随机动力系统的概率守恒原理,式(39)的广义概率密度演化方程[10]为:

$$\frac{\partial P_{A\Theta}(a,\ \boldsymbol{x},\ t)}{\partial t}+\dot{A}(\boldsymbol{x},\ t)\frac{\partial P_{A\Theta}(a,\ \boldsymbol{x},\ t)}{\partial a}=0\tag{40}$$

式中 $P_{A\Theta}(a,\ \boldsymbol{x},\ t)$为随机变量$A$和$\Theta$的联合概率

密度函数；$A(t)$为所关注的物理量，即主轴承的振动加速度响应；$\dot{A}(t)$为所关注的物理量的状态变化速率；a和$\boldsymbol{x}$分别为A和Θ对应的样本。

式(33)的初始条件为：

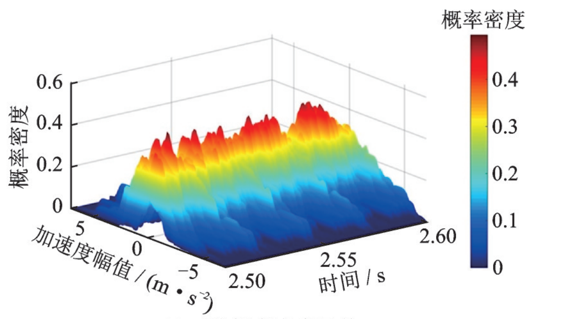
$$P_{A\Theta}(a,\ \boldsymbol{x},\ t)=\delta(a-a_0)P_{\Theta}(\boldsymbol{x},\ t) \tag{41}$$

式中　$P_{\Theta}(\boldsymbol{x},\ t)$为$\Theta$的联合概率密度函数；$a_0$为感兴趣的物理量的初始值；$\delta(\cdot)$为Dirac-Delta函数。

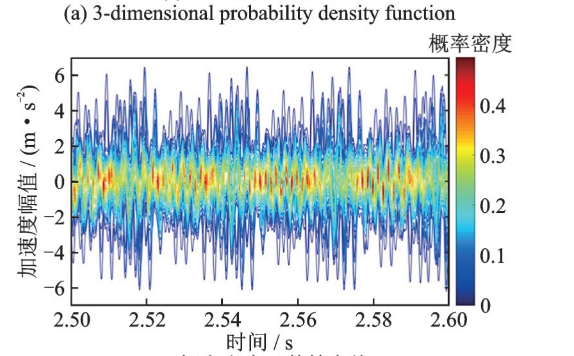
采用有限差分法求解式(40)和(41)，$A(t)$的概率密度函数可以计算为：

$$A(a,\ t)=\int_{\Omega_{\Theta}} P_{A\Theta}(a,\ \boldsymbol{x},\ t)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{42}$$

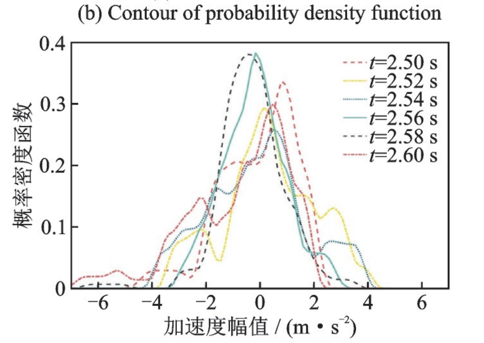
图7为矿井提升机主轴承宏微尺度耦合系统在2.5～2.6 s时间历程的振动加速度概率密度演化。图7(a)～(c)反映了滚动轴承振动加速度的概率分布随时间的变化趋势。滚动轴承振动加速度的变化范围为－6～6 m/s²，其中，振动加速度以较大的概率出现在－2～2 m/s²。矿井提升机主轴承在全服役时间历程的振动加速度概率密度演化见附录B。



(a) 三维概率密度函数
(a) 3-dimensional probability density function



(b) 概率密度函数等高线
(b) Contour of probability density function



(c) 指定时间截面处的概率密度函数
(c) Probability density function at the specified time section

图7　2.5～2.6 s时间历程的振动加速度概率密度演化
Fig. 7　Probability density evolution of vibration acceleration within 2.5～2.6 s time-history

4　主轴承动态可靠性分析

4.1　概率密度演化路径非平稳随机过程建模

概率密度演化缺失随机序列信息，无法从频谱分析的角度对主轴承开展可靠性分析。本节提出了一种基于概率密度演化路径的非平稳随机过程建模方法，其基本思想是使用潜在的非平稳高斯随机过程去近似目标的非平稳非高斯随机过程。

$A(t,\ \theta)$为定义在一个概率空间$(\Omega,\ F,\ P)$上的随机过程，表示t时刻的A在样本点θ处的值，它的前4个中心矩被表示为$\mu(t)$,$\sigma(t)$,$s_k(t)$和$k_u(t)$。采用梯形法对3.3节的概率密度演化进行数值积分，$A(t,\ \theta)$的前4个中心矩[11]能够被确定。

根据三次正态变换多项式[12]，$A(t,\ \theta)$可近似为：

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t,\ \theta)=&\mu(t)+\sigma(t)\big[a_s(t)+b_s(t)U(t)+\\&c_s(t)U^2(t)+d_s(t)U^3(t)\big]\end{aligned} \tag{43}$$

式中　a_s,b_s,c_s和d_s为三次多项式的系数；$U(t)$为非平稳高斯随机过程。

已知$A(t,\ \theta)$的协方差函数为$C_{\mathrm{N}}(t_1,\ t_2)$，它的自相关函数定义为：

$$\rho_{\mathrm{N}}(t_1,\ t_2)=\frac{C_{\mathrm{N}}(t_1,\ t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} \tag{44}$$

根据式(43)和(44)，$X(t,\ \theta)$的自相关函数与$U(t)$的自相关函数的关系可以表达为：

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{N}}(t_1,\ t_2)=&\rho_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)\big[b_s(t_1)b_s(t_2)+3d_s(t_1)\cdot\\&b_s(t_2)+3b_s(t_1)d_s(t_2)+9d_s(t_1)d_s(t_2)\big]+\\&2c_s(t_1)c_s(t_2)\rho_{\mathrm{G}}^2(t_1,\ t_2)+\\&6d_s(t_1)d_s(t_2)\rho_{\mathrm{G}}^3(t_1,\ t_2)\end{aligned} \tag{45}$$

式中　$\rho_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$为$U(t)$的自相关函数，其解析表达式见附录C。

由于$E\big[U(t)\big]=0$和$D\big[U(t)\big]=1$，$U(t)$的协方差函数与它的自相关函数相等，即

$$C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)=\rho_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2) \tag{46}$$

基于Mercer定理[13]，$C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$的谱分解可以表达为：

$$C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i(t_1)f_i(t_2) \tag{47}$$

式中　λ_i和$f_i(t)$分别为第二类Fredholm积分方程[14]的特征值和特征函数，如下式所示：

$$\int_0^T C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)f_i(t_1)\mathrm{d}t_1=\lambda_i f_i(t_2) \tag{48}$$

式中　$[0,\ T]$为$U(t)$的时间域，$f_i(t_1)$有一个完整的

正交集，并满足下式：

$$\int_0^T f_i(t)\, f_j(t)\,\mathrm{d}t=\delta_{ij} \tag{49}$$

式中 δ_{ij}为Kronecker delta函数。

基于Karhunen-Loève展开[15]，$U(t)$表达为：

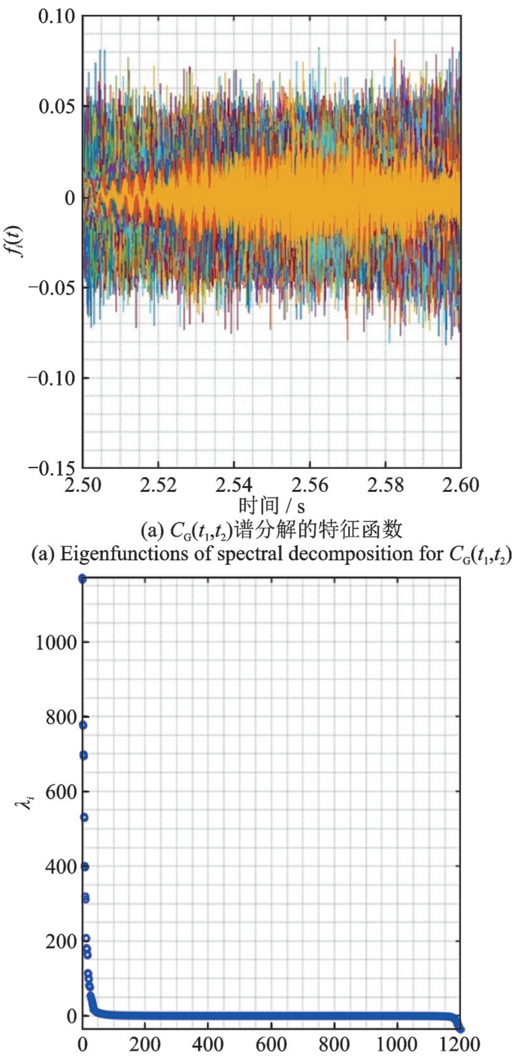
$$U(t)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sqrt{\lambda_i}\, f_i(t) \tag{50}$$

式中 m为展开项的数目；$\eta_i(t)$为一系列独立的标准正态随机变量。

将式(50)带入式(43)，即得非平稳非高斯随机过程$\tilde{A}(t,\ \theta)$。

图8为$C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$谱分解的特征函数和特征值。基于式(48)求解产生$m=1200$个特征函数和特征值。

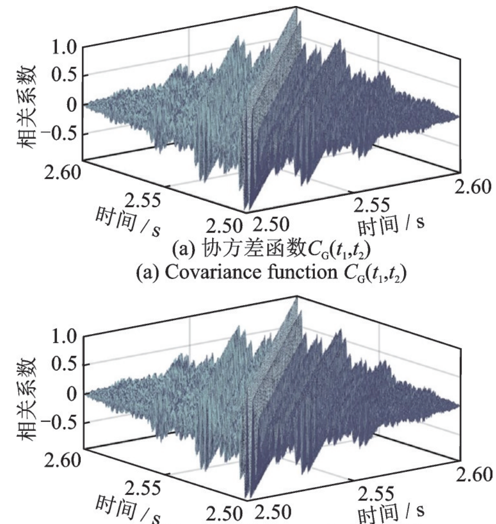
图9(a)的$C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$为给定的协方差函数。由3.2节概率空间剖分产生$q=800$个滚动轴承振动加速度随机序列样本，并统计得到$A(t,\ \theta)$的协方差函数为$C_{\mathrm{N}}(t_1,\ t_2)$。基于式(44)～(46)求解得到$U(t)$的协方差函数$C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$。图9(b)为$C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$的Karhunen-Loève近似，其近似表达式见式(47)。



(a) $C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$谱分解的特征函数
(a) Eigenfunctions of spectral decomposition for $C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$
(b) $C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$谱分解的特征值
(b) Eigenvalues of spectral decomposition for $C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$

图8 $C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$谱分解的特征函数和特征值

Fig. 8 Eigenfunctions and eigenvalues of spectral decomposition for $C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$



(a) 协方差函数$C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$
(a) Covariance function $C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$
(b) $C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$的Karhunen-Loève近似
(b) Karhunen-Loève approximation of $C_{\mathrm{G}}(t_1,t_2)$

图9 $C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$和它的Karhunen-Loève近似

Fig. 9 $C_{\mathrm{G}}(t_1,\ t_2)$ and its Karhunen-Loève approximation

图10为由概率密度演化路径非平稳随机过程产生的10^6个振动加速度随机序列。其振动加速度幅值和协方差函数分别与图4(c)的振动加速度幅值和协方差函数存在着某种“相似性”，即设计阶段主轴承加速度状态量的“孪生”。

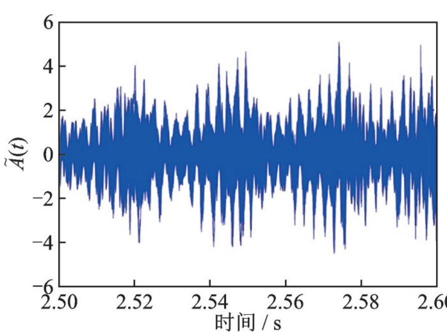


图10 由概率密度演化产生的10^6个振动加速度随机序列

Fig. 10 10^6 random sequences of vibration acceleration generated by probability density evolution

4.2 随机振动频谱概率密度函数分布

如图10所示，基于4.1节建立的随机过程，采用Monte Carlo方法产生10^6个加速度随机序列。对每个确定的随机序列$\tilde{a}(t)$分别进行傅里叶变换，如下式所示：

$$\tilde{A}(f)=\int_0^T x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{51}$$

式中 f为频率。

对于离散的频率 $f_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$,其对应的傅里叶变换定义为:

$$H(f_k)=\frac{\tilde{A}(f_k)}{\Delta t} \tag{52}$$

式中　Δt 为采样间隔;$N=T/\Delta t$ 为 $[0,\ T]$ 时间段的采样点数。

根据维纳-欣钦定理,$\tilde{a}(t)$ 的功率谱密度定义为:

$$G(f_k)=\frac{2\Delta t}{N}\left|H(f_k)\right|^2 \tag{53}$$

对于 f_k 落在间隔 $[f_a,\ 2f_a]$ 内的每个确定的随机序列的功率谱密度的片段,统计其功率谱密度的平均值,如下式所示:

$$\tilde{G}(f_c)=\frac{\sum_{j=1}^{\gamma}G(f_j)}{\gamma} \tag{54}$$

式中　γ 为 f_k 落在间隔 $[f_a,\ 2f_a]$ 内的数量;f_c 为间隔 $[f_a,\ 2f_a]$ 的中心频率,其表达式为:

$$f_c=\sqrt{2}\ f_a。$$

f_a 以 1/2 倍频程增加用于计算下一个间隔内的功率谱密度的平均值,$f_a=\sqrt{2}\ f_a$。直到间隔 $[f_a,\ 2f_a]$ 包括最后的频率 f_{N-1}。

将 $\tilde{G}(f_c)$ 转换为以 dB 为单位的数值,其表达式为:

$$P_w(f_c)=10\lg\left[\tilde{G}(f_c)\right] \tag{55}$$

对于每个确定的 f_c,P_w 的概率密度为:

$$P\left(P_w\middle|f_c\right)=\frac{N_{\mathrm{dB}}}{10^6} \tag{56}$$

式中　N_{dB} 为 10^6 个随机序列的 $P_w(f_c)$ 落在某个长度为 1 dB 的间隔内的数量。

图 11 为矿井提升机主轴承振动加速度功率谱密度的概率密度函数。如图 11(a)所示,在加速度频率 34~40 Hz 内,滚动轴承振动加速度每间隔两个频率出现一个较大的峰值,且较大的峰值以特定的概率出现在 $-35\sim0$ dB/Hz 之间。图 11(b)反映了在频率 $f_c=37.103$ Hz 上的滚动轴承振动加速度较大峰值的概率分布。

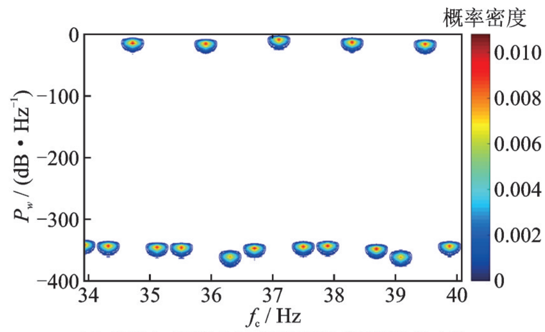
4.3　基于条件概率的可靠度计算

矿井提升机主轴承外圈的故障频率定义为:

$$f_o=\frac{w}{60}\cdot\frac{n_r\left(1-\dfrac{D_b}{D_p}\right)}{2} \tag{57}$$

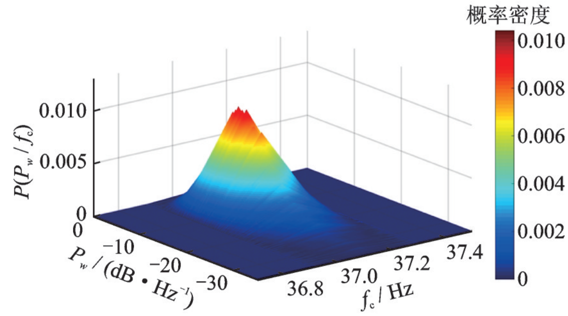
式中　D_b 和 D_p 为随机变量,其概率分布见表 2。

当出现在故障频率上的加速度功率谱密度的峰值超过失效阈值时,矿井提升机主轴承视为失效。因此,矿井提升机主轴承的失效概率表达为:



(a) 振动加速度功率谱密度的概率密度函数

(a) Probability density function for power spectral density of vibration acceleration



(b) 指定频率处的振动加速度功率谱密度的概率密度函数

(b) Probability density function for power spectral density of vibration acceleration at the specified frequency

图 11　振动加速度功率谱密度的概率密度函数

Fig. 11　Probability density function for power spectral density of vibration acceleration

$$P_f=P\left(P_w>P_T\middle|f_o=f_c\right)\cdot P\left(f_o=f_c\right) \tag{58}$$

式中　P_T 为失效阈值;$P\left(P_w>P_T\middle|f_o=f_c\right)$ 为在"$f_o=f_c$"发生条件下"P_w 大于 P_T"发生的概率,如式(56)和图 11(b)所示;$P(f_o=f_c)$ 为"$f_o=f_c$"发生的概率。

根据式(57)和二阶 Taylor 级数展开[16],"$f_o=f_c$"的前 4 个中心矩可被确定,它们分别为 $\mu_{f_o}=37.052$,$\sigma_{f_o}=0.270$,$s_{f_o}=0.081$ 和 $k_{f_o}=2.712$。基于三次正态变换多项式,f_o 的概率密度函数可表达为:

$$P(f_o)=\frac{\phi(u_o)}{\sigma_{f_o}\left(b_{f_o}+2c_{f_o}u_o+3d_{f_o}^2u_o\right)} \tag{59}$$

式中　$b_{f_o}=1.042$,$c_{f_o}=0.015$ 和 $d_{f_o}=-0.014$ 为三次正态变换的多项式系数;f_o 和 u_o 的对应关系为 $f_o=\mu_{f_o}+\sigma_{f_o}\left(a_{f_o}+b_{f_o}u_o+c_{f_o}u_o^2+d_{f_o}u_o^3\right)$,其中 $a_{f_o}=-0.015$。

图 12 为矿井提升机主轴承外圈故障频率的概率密度函数,f_o 的定义域为 $[36.1,\ 38.1]$。相较图 11(a),滚动轴承振动加速度在频率 $f_c\in[36.1,\ 38.1]$ 内共出现 5 个峰值,其中较大峰值的概率分布如图 11(b)所示。

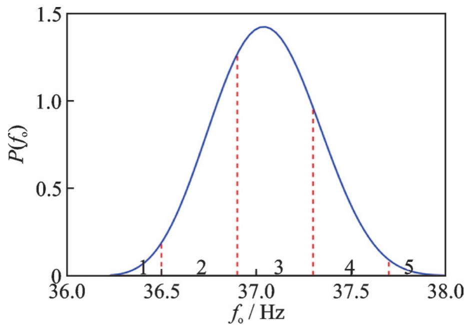


图 12 主轴承外圈故障频率的概率密度函数

Fig. 12 Probability density function of fault frequency for outer ring of main bearing

将f_o的定义域[36.1, 38.1]均等分成5段，每段包括对应的加速度频率f_{c_j}（$j=1, 2, \cdots, 5$）。定义式（58）的功率谱密度的失效阈值为$P_T=-340$ dB/Hz。设计阶段矿井提升机主轴承在服役时间2.5～2.6 s内的最终失效概率计算为：

$$\begin{aligned}\tilde{P}_f=&\sum_{j=1}^{5}P\left(P_w>P_T\middle|f_o=f_{c_j}\right)\cdot P\left(f_o=f_{c_j}\right)=\\&\sum_{j=1}^{5}P\left(P_w>P_T\middle|f_{c_j}\right)\cdot P\left(f_o=f_{c_j}\right)=\\&0\times0.0139+0.00885\times0.295+1\times0.507+\\&0.0967\times0.176+0.14\times0.0081=0.528\end{aligned}\tag{60}$$

相应的可靠度为：

$$\beta=\Phi^{-1}\left(1-\tilde{P}_f\right)=-0.0697\tag{61}$$

5 结 论

针对设计阶段的大型提升机主轴承随机振动的设计可靠性分析缺少试验样本的工程难题，本文提出了孪生数据驱动的大型矿井提升机主轴承随机振动系统的设计可靠性分析的技术路线。该技术路线总结如下：

（1）提出了大型矿井提升机主轴承宏微尺度耦合系统的动力学模型，运用已采集的载荷历程驱动滚动轴承的动力学模型，并获取振动加速度响应。

（2）针对概率分配的技术问题：个性的动力学模型以多少概率出现和工况数据以多少概率分配给个性的动力学模型，提出了信息不完备的概率空间剖分和赋得概率计算方法。该方法以GF偏差作为概率空间$\boldsymbol{\Omega}_\Theta$最佳剖分的指标，保证了工程的精度要求。

（3）现有的概率密度演化缺失随机序列信息，无法从频谱分析的角度对主轴承开展可靠性分析。提出了概率密度演化路径非平稳随机过程建模方法。相较传统的随机过程建模方法，该方法中的分布类型无需假设，随机序列的每个样本由概率密度演化给定的时间上的分布类型和从物理模型中统计的协方差函数共同决定。

（4）提供了滚动轴承随机振动的加速度功率谱密度的概率分布。该功率谱密度的概率分布反映了发生在频率上的加速度功率谱密度的峰值概率。若发生在故障频率上的加速度功率谱密度的峰值很小，则滚动轴承视为安全。

（5）提供了大型矿井提升机主轴承在服役时间历程上的可靠度指标，为考虑批量生产的滚动轴承设计提供了依据。

参考文献：

[1] 胡爱军，许莎，向玲，等. 滚动轴承外圈多点故障特征分析[J]. 机械工程学报，2020，56(21)：110-120.
HU Aijun，XU Sha，XIANG Ling，et al. Characteristic analysis of multi-point faults on the outer race of rolling element bearing[J]. Journal of Mechanical Engineering，2020，56(21)：110-120.

[2] 张文虎，邓四二，陈国定，等. 圆柱滚子轴承半物理仿真试验技术研究[J]. 机械工程学报，2018，54(19)：78-87.
ZHANG Wenhu，DENG Sier，CHEN Guoding，et al. Hardware-in-the-loop simulation technology of cylindrical roller bearing[J]. Journal of Mechanical Engineering，2018，54(19)：78-87.

[3] 刘宇，李天翔，刘阔，等. 基于四阶矩法车削颤振可靠性研究[J]. 机械工程学报，2016，52(20)：193-200.
LIU Yu，LI Tianxiang，LIU Kuo，et al. Chatter reliability of turning processing system based on fourth moment method[J]. Journal of Mechanical Engineering，2016，52(20)：193-200.

[4] 付洋，曹宏瑞，郜伟强，等. 数字孪生驱动的航空发动机涡轮盘剩余寿命预测[J]. 机械工程学报，2021，57(22)：106-113.
FU Yang，CAO Hongrui，GAO Weiqiang，et al. Digital twin driven remaining useful life prediction for aero-engine turbine discs[J]. Journal of Mechanical Engineering，2021，57(22)：106-113.

[5] 尹家宝，卢纯，全鑫，等. 列车制动块磨损行为动态演变数值分析[J]. 机械工程学报，2021，57(18)：204-213.
YIN Jiabao，LU Chun，QUAN Xin，et al. Analysis of wear behavior dynamic evolution on railway brake pad[J]. Journal of Mechanical Engineering，2021，57(18)：204-213.

[6] ULRYCH T J，VELIS D R，WOODBURY A D，et al. L-moments and C-moments[J]. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment，2000，14：

50-68.
[7] CAO Shuang, LU Hao, PENG Yuxing, et al. A novel fourth-order L-moment reliability method for L-correlated variables[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 95: 806-823.
[8] CHEN Jianbing, YANG Junyi, LI Jie. A GF-discrepancy for point selection in stochastic seismic response analysis of structures with uncertain parameters[J]. Structural Safety, 2016, 59: 20-31.
[9] RADOVIĆ I, SOBOL I M, TICHY R F. Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration: comparison of different low discrepancy sequences[J]. Monte Carlo Methods and Applications, 1996, 2(1): 1-14.
[10] LIU Gang, GAO Kai, YANG Qingshan, et al. Improvement to the discretized initial condition of the generalized density evolution equation[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 216: 107999.
[11] LU Hao, CAO Shuang, ZHU Zhencai, et al. An improved high order moment-based saddlepoint approximation method for reliability analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 82(6): 836-847.
[12] LU Zhaohui, CAI Chaohuang, ZHAO Yangang, et al. Normalization of correlated random variables in structural reliability analysis using fourth-moment transformation[J]. Structural Safety, 2020, 82: 101888.
[13] CHIOU J M, CHEN Y T, YANG Y F. Multivariate functional principal component analysis: a normalization approach[J]. Statistica Sinica, 2014, 24: 1571-1596.
[14] WANG Xingtao, LI Yuanmin. Numerical solution of fredholm integral equation of the second kind by general legendre wavelets[J]. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2012, 8: 799-805.
[15] PHOON K K, HUANG S P, QUEK S T. Simulation of second-order processes using Karhunen-Loève expansion[J]. Computers & Structures, 2002, 80(12): 1049-1060.
[16] 郑宏伟，孟广伟，李锋，等.基于高阶矩最大熵方法的结构混合可靠性分析[J].机械工程学报，2021，57(14)：282-290.
ZHENG Hongwei, MENG Guangwei, LI Feng, et al. Hybrid reliability analysis for structures based on high-order moments and maximum entropy method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(14): 282-290.

Twin data-driven design reliability analysis of random vibration system for main bearing of a large mine hoist

CAO Shuang[1,2], *LU Hao*[1,2], *ZHU Zhen-cai*[1,2], *ZHANG Yi-min*[3]

(1. School of Mechanical & Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Mine Mechanical and Electrical Equipment, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China; 3. School of Mechanical and Power Engineering, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang 110142, China)

Abstract: In the design phase of a mine hoist's main bearing, the reliability analysis of its random vibration cannot obtain complete probability information of the vibration acceleration response due to insufficient experimental samples. This paper proposes a new technical route for the reliability analysis of the main bearing of a mine hoist under incomplete probability information. This route includes the dynamic model of a multi-scale coupling system for rolling element bearings, the probability density evolution of vibration acceleration, stochastic process modeling of the probability density evolution path, the probability distribution of vibration power spectral density, and the calculation of design reliability based on conditional probability. By using the collected condition data to drive the established dynamic model of multi-scale coupling system for rolling element bearings, the probability density evolution of vibration acceleration is carried out. Based on the probability density evolution and Karhunen-Loève expansion, a modeling approach for the non-stationary random process of vibration acceleration of rolling element bearings is proposed. This approach obtains the twin data of the random sequence of vibration acceleration for rolling element bearings. The probability distribution of the vibration power spectral density for the main bearing of a mine hoist is studied, and the reliability index of the main bearing of a mine hoist within the service time is calculated.

Key words: random vibration; design reliability analysis; twin data; main bearing of a large mine hoist; incomplete probability information

作者简介： 曹　爽(1993—)，男，博士研究生。 E-mail：caoshuangyc@163.com。
通讯作者： 卢　昊(1985—)，男，博士，副教授。 E-mail：haolucumt@163.com。

附录A:基于正态变换的三次多项式系数的解析表达式

设式(16)中x_i的前4个线性矩与式(16)中$S(u_i)$的前4个线性矩相等,可以得到关于多项式系数的方程组,如下式所示:

$$a_i + c_i = 0 \tag{A1}$$

$$\frac{2b_i + 5d_i}{2} = 1 \tag{A2}$$

$$\frac{2\sqrt{3}\, c_i}{\sqrt{\pi}\,(2b_i + 5d_i)} = \tau_{i,3} \tag{A3}$$

$$\frac{20\sqrt{2}\,(\delta_1 b_i + \delta_2 d_i)}{(2b_i + 5d_i)\pi} - \frac{3}{2} = \tau_{i,4} \tag{A4}$$

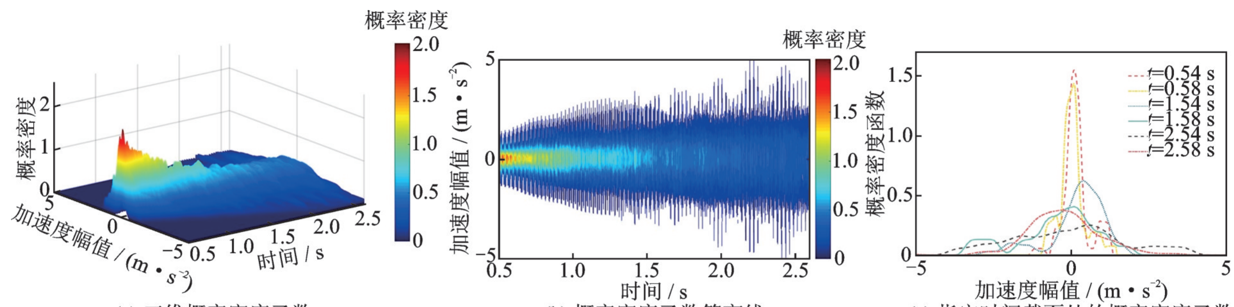
其中,δ_1和δ_2的表达式分别为:

$$\delta_1 = \frac{3\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{4\sqrt{2}},\ \delta_2 = \frac{15\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}} - \frac{15\pi}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{4}。$$

求解式(A1)~(A4),多项式系数a_i,b_i,c_i和d_i可被确定为:

$$a_i = -c_i = -\tau_{i,3}\sqrt{\frac{\pi}{3}},\ b_i = \frac{-16\delta_2 + \sqrt{2}\,(3 + 2\tau_{i,4})\pi}{8(15\delta_1 - 2\delta_2)},\ d_i = \frac{40\delta_1 - \sqrt{2}\,(3 + 2\tau_{4,i})\pi}{20(5\delta_1 - 2\delta_2)}。$$

附录B:全服役时间历程的加速度概率密度演化



(a) 三维概率密度函数
(a) 3-dimensional probability density function
(b) 概率密度函数等高线
(b) Contour of probability density function
(c) 指定时间截面处的概率密度函数
(c) Probability density function at the specified time section

图B1　全服役时间历程主轴承振动加速度概率密度演化

Fig. B1　Probability density evolution of vibration acceleration of main bearing during full service time

附录C:$\rho_G(t_1, t_2)$的解析表达式

(1)　当$d_s(t_1)d_s(t_2)<0$时:

$$\rho_G(t_1, t_2) = -2g\cos\left[\frac{(\theta+\pi)}{3}\right] - \frac{q_2}{3} \tag{C1}$$

(2)　当$d_s(t_1)d_s(t_2)>0$且$\varsigma \geqslant 0$时:

$$\rho_G(t_1, t_2) = \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} - \frac{q_2}{3} \tag{C2}$$

(3)　当$d_s(t_1)d_s(t_2)>0$,$\varsigma<0$且$q_2>0$时:

$$\rho_G(t_1, t_2) = 2g\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{q_2}{3} \tag{C3}$$

(4)　当 $d_s(t_1)d_s(t_2)>0$,$\varsigma<0$ 且 $q_2<0$ 时:

$$\rho_G(t_1,\ t_2)=-2g\cos\left[\frac{(\theta-\pi)}{3}\right]-\frac{q_2}{3} \tag{C4}$$

(5)　当 $d_s(t_1)d_s(t_2)=0$ 且 $c_s(t_1)c_s(t_2)\neq 0$ 时:

$$\rho_G(t_1,\ t_2)=\frac{1}{4c_s(t_1)c_s(t_2)}\cdot\left[-D+\sqrt{D^2+8c_s(t_1)c_s(t_2)\rho_N(t_1,\ t_2)}\right] \tag{C5}$$

(6)　当 $d_s(t_1)d_s(t_2)=0$ 且 $c_s(t_1)c_s(t_2)=0$ 时:

$$\rho_G(t_1,\ t_2)=\frac{\rho_N(t_1,\ t_2)}{D} \tag{C6}$$

其中,g,θ,ς,B,C 和 D 的表达式分别为:

$$g=\sqrt{\frac{-\left(q_1-\frac{q_2^2}{3}\right)}{3}} \tag{C7-1}$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{q_3}{2g^3}\right) \tag{C7-2}$$

$$\varsigma=\left[\frac{\left(q_1-\frac{q_2^2}{3}\right)}{3}\right]^3+\left(\frac{q_3}{2}\right)^2 \tag{C7-3}$$

$$B=\frac{-q_3}{2}+\sqrt{\varsigma} \tag{C7-4}$$

$$C=\frac{-q_3}{2}-\sqrt{\varsigma} \tag{C7-5}$$

$$D=b_s(t_1)b_s(t_2)+3b_s(t_1)d_s(t_2)+3d_s(t_1)b_s(t_2) \tag{C7-6}$$

其中,q_1,q_2 和 q_3 的表达式分别为:

$$q_1=\frac{b_s(t_1)b_s(t_2)+3b_s(t_1)d_s(t_2)+3d_s(t_1)b_s(t_2)+9d_s(t_1)d_s(t_2)}{6d_s(t_1)d_s(t_2)},$$

$$q_2=\frac{c_s(t_1)c_s(t_2)}{3d_s(t_1)d_s(t_2)},q_3=\frac{2q_2^3}{27}-\frac{q_1q_2}{3}-\frac{\rho_N(t_1,t_2)}{6d_s(t_1)d_s(t_2)}。$$