

# 非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的静力学与动力学分析

郭振坤<sup>1</sup>, 徐佳乐<sup>1</sup>, 董挺<sup>2</sup>

(1. 北京建筑大学机电与车辆工程学院, 北京 100044; 2. 中国北方车辆研究所, 北京 100072)

**摘要:** 建立了非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的静力学和动力学模型。通过固化分析确定了三个平衡状态, 展示了以温差绝对值为控制参数的超临界分岔。通过稳定性分析确定了三个平衡状态为两个稳定平衡状态和一个不稳定平衡状态。通过静力学分析确定了双势阱势能曲线, 这有助于对动态跳跃现象的研究。通过在动力学分析中引入阻尼, 分析了平衡点的动态分岔。通过数值模拟讨论了基础激励频率对动力学特性的影响。当激励频率处于一定范围内时, 系统会发生双势阱大振幅动态跳跃和非线性振动, 此频率范围可以被设定为特定频率带宽。双稳态系统的主要动力学特性表现为周期振动、概周期振动和混沌振动。

**关键词:** 非线性振动; 复合材料层合方形板; 双稳态; 三种平衡状态; 动态跳跃

**中图分类号:** O322; TB334 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)07-1169-13

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.07.009

## 引言

非对称纤维铺设的层合板在从高温冷却到室温的过程中会产生残余热应力<sup>[1]</sup>。由于残余热应力和几何非线性的共同作用, 非对称层合板冷却到室温时会产生两个稳定平衡状态和一个不稳定平衡状态, 从而形成双稳态复合材料层合板。这两个稳定平衡状态分别表现为主曲率沿  $x$  和  $y$  方向的两个圆柱壳, 这两个圆柱壳在没有能量输入的情况下就能够被维持, 而当有足够的能量输入时, 其可以通过跳跃 (snap-through) 实现相互之间的转换。不稳定平衡状态表现为两个微小曲率分别沿  $x$  和  $y$  方向的大小相等、符号相反的马鞍形双曲壳。双稳态复合材料层合板作为自适应变形结构, 在航空航天工程领域发挥着越来越重要的作用。

双稳态复合材料层合板的静态跳跃现象已经得到广泛的研究<sup>[2-8]</sup>, Guest 等<sup>[9]</sup>通过调整材料参数和纤维铺设方式获得了多个稳定构型。有趣的是, 反对称复合材料层合板或壳体也呈现出两个带有卷曲半径的稳定构型<sup>[10]</sup>。除了直接提供机械力和力矩的机械加载装置外<sup>[11]</sup>, 形状记忆合金能够提供准静态力, 从而很好地控制静态跳跃<sup>[12-13]</sup>。Mattioni 等<sup>[14]</sup>提出多种构型、可跳跃的变形机翼的应用概念。Pirrer 等<sup>[15]</sup>提出了更精确的位移场, 改进了双稳态复合材

料层合板的高阶多项式函数。与形状记忆合金相似, 含准静态电压的压电纤维更适合与双稳态复合材料层合板集成使用<sup>[16-17]</sup>。此外, Seffen 等<sup>[18]</sup>进行了磁力驱动跳跃的研究; Zhang 等<sup>[19]</sup>通过磁流变弹性体驱动多稳态跳跃现象; Chillara 等<sup>[20]</sup>建立了一个传感器系统的理论模型。

近年来, 一些学者研究了双稳态复合材料层合板的动力学问题。Saber 等<sup>[21]</sup>分析了双稳态复合材料层合板的自由振动; Senba 等<sup>[22]</sup>利用丰富的动力学特性改进驱动机构。Arrieta 等<sup>[23-24]</sup>研究了阱间动力学特性即跳跃特性, 并采用气动力来驱动跳跃。Emam 等<sup>[25]</sup>通过实验的方法研究了动态跳跃。Carrella 等<sup>[26]</sup>建立了双稳态系统的杜芬方程。Lee 等<sup>[27]</sup>研究了动态跳跃的抑制策略。Habibzadeh 等<sup>[28]</sup>建立了双稳态板的静力学和动力学的半解析模型。

到目前为止, 关于非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的静力学和动力学建模方面的工作是极少的。本文建立了非对称双稳态正交复合材料层合方形板的力学模型及方程, 忽略惯性项、阻尼项和外激励项得到静力学方程。通过求解静力学方程进行固化分析, 确定了双稳态板的三个平衡点。通过稳定性分析确定了三个平衡点为两个稳定平衡点和一个不稳定平衡点。通过求解动力学方程阐述了非对称双稳态正交复合材料层合方形板的双势阱动

收稿日期: 2023-10-18; 修订日期: 2023-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12102031); 北京建筑大学“金字塔人才培养工程”项目(JDYC20220828)。

态跳跃和非线性振动。动态跳跃往往伴随着混沌振动,而非线性振动表现为周期振动、概周期振动和混沌振动。

### 1 运动方程

图 1(a)所示为中心固定支撑、四边自由的非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板,其材料成分为石墨/环氧树脂,其非对称铺层顺序如图 1(b)所示,总层数为  $n=2N(N=2, 3, 4)$ ,前  $N$  层纤维铺设方向为  $0^\circ$ ,后  $N$  层纤维铺设方向为  $90^\circ$ ,单层纤维的厚度为  $h$ ,长度、宽度和总厚度分别为  $2L_x, 2L_y$  和  $2H(H=Nh)$ ;  $I_x, I_y$  和  $I_z$  表示板在 3 个方向的惯性量。双稳态板受到基础激励  $Y$  的作用。两个稳定平衡状态分别表现为主曲率沿  $x$  和  $y$  方向的两个圆柱壳,不稳定平衡状态表现为两个微小曲率分别沿  $x$  和  $y$  方向的大小相等、符号相反的马鞍形双曲壳,如图 2 所示。

Reddy 三阶剪切位移场  $u, v, w$  可以分别表示为<sup>[29]</sup>:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) - c_1 z^3 \left( \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1a)$$

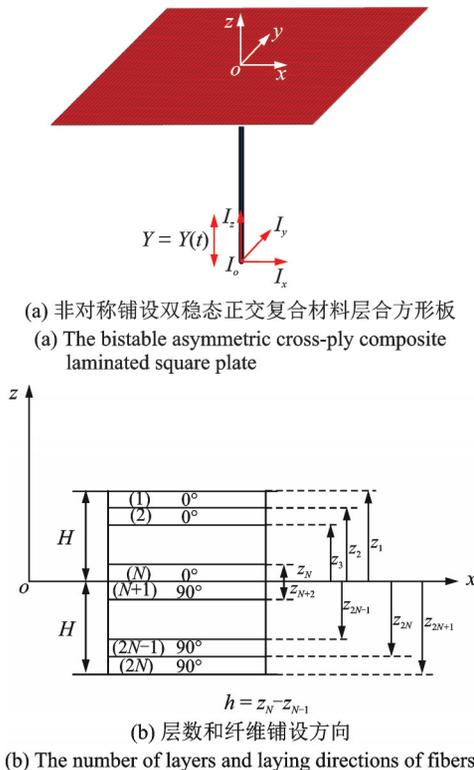


图 1 静力学和动力学理论模型

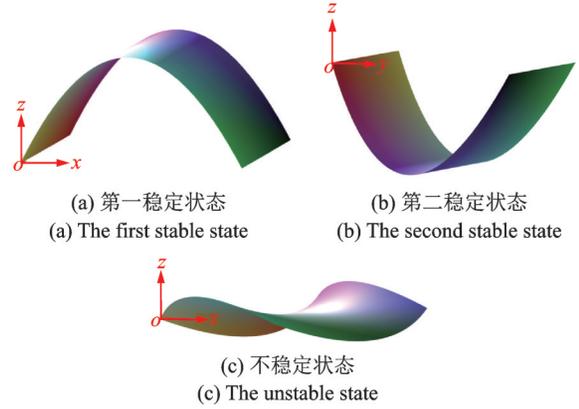


图 2 三个平衡状态

Fig. 2 The three equilibrium states

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) - c_1 z^3 \left( \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1b)$$

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) + Y \quad (1c)$$

式中  $u_0, v_0$  和  $w_0$  分别表示层合板中面上任意一点沿  $x, y$  和  $z$  方向的位移;  $\varphi_x$  和  $\varphi_y$  分别表示中面法线绕  $y$  轴和  $x$  轴的转角。

非线性应变-位移关系为:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^{(0)} \\ k_y^{(0)} \\ k_{xy}^{(0)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{yz}^{(1)} \\ k_{xz}^{(1)} \end{pmatrix} + z^3 \begin{pmatrix} k_x^{(2)} \\ k_y^{(2)} \\ k_{xy}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3a)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3b)$$

$$\begin{pmatrix} k_x^{(0)} \\ k_y^{(0)} \\ k_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3c)$$

$$\begin{pmatrix} k_{yz}^{(1)} \\ k_{xz}^{(1)} \end{pmatrix} = -c_2 \begin{pmatrix} \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3d)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^{(2)} \\ k_y^{(2)} \\ k_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3e)$$

其中,  $c_1 = \frac{4}{3(2H)^2}$ ,  $c_2 = 3c_1$ 。

应力-应变关系如下:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & Q_{26} \\ 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & 0 & 0 & Q_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T; k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中  $\alpha_{xx}$  和  $\alpha_{yy}$  分别表示纤维沿  $x$  和  $y$  轴的热膨胀系数,  $\alpha_{xy} = 0$ ; 等效刚度系数  $Q_{ij}$  为:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{12} &= \frac{E_{22}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{16} = Q_{26} = 0, Q_{45} = 0, \\ Q_{44} &= Q_{55} = G_{13}, Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $E_{11}$  和  $E_{22}$  分别为纵向和横向弹性模量;  $\nu_{12}$  和  $\nu_{21}$  分别表示纵向和横向泊松比;  $G_{12}$  和  $G_{13}$  分别表示纵向和横向剪切模量。

非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的势能为:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_{\text{lam}}} \int_{V_{\text{lam}}^{(j)}} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) dV_{\text{lam}}^{(j)} \quad (6)$$

非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的动能为:

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^{n_{\text{lam}}} \int_{V_{\text{lam}}^{(j)}} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV_{\text{lam}}^{(j)} \quad (7)$$

哈密顿原理为:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0 \quad (8)$$

为方便起见, 建立一个低阶模型, 根据中心固定支撑、四边自由的边界条件, 低阶位移为<sup>[18]</sup>:

$$u_0 = u_1(t)x^3 + u_2(t)xy^2 + u_3(t)x \quad (9a)$$

$$v_0 = v_1(t)y^3 + v_2(t)yx^2 + v_3(t)y \quad (9b)$$

$$w_0 = w_1(t)x^2 + w_2(t)y^2 \quad (9c)$$

$$\varphi_x = \varphi_1(t)x^3 + \varphi_2(t)xy^2 + \varphi_3(t)x \quad (9d)$$

$$\varphi_y = \varphi_4(t)y^3 + \varphi_5(t)yx^2 + \varphi_6(t)y \quad (9e)$$

式中  $w_1$  和  $w_2$  分别表示  $x$  和  $y$  方向的曲率。

将式(8)在平面域( $x \in [-L_x, L_x]$  和  $y \in [-L_y, L_y]$ )中积分, 并只考虑双稳态系统的横向振动, 确定二自由度常微分方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + c_1 \dot{w}_1 + k_1 w_1 + k_2 w_2 + N_1(\Delta T) w_1 + \\ N_2(\Delta T) w_2 + \alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2 + \\ \alpha_3 w_1 w_2 + \alpha_4 w_1^3 + \alpha_5 w_2^3 + \alpha_6 w_1^2 w_2 + \\ \alpha_7 w_1 w_2^2 + N_3(\Delta T) = \gamma_1 f \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 + c_2 \dot{w}_2 + k_3 w_1 + k_4 w_2 + N_4(\Delta T) w_1 + \\ N_5(\Delta T) w_2 + \beta_1 w_1^2 + \beta_2 w_2^2 + \\ \beta_3 w_1 w_2 + \beta_4 w_1^3 + \beta_5 w_2^3 + \beta_6 w_1^2 w_2 + \\ \beta_7 w_1 w_2^2 + N_6(\Delta T) = \gamma_2 f \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (10b)$$

引入无量纲表达式:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = u_1, \bar{u}_2 = L_y^2 u_2, \bar{u}_3 = L_x^2 u_3, \bar{v}_1 = v_1, \bar{v}_2 = L_x^2 v_2, \\ \bar{v}_3 = L_y^2 v_3, \bar{w}_1 = L_x w_1, \bar{w}_2 = L_y w_2, \bar{\varphi}_1 = L_x \varphi_1, \\ \bar{\varphi}_2 = L_x L_y^2 \varphi_2, \bar{\varphi}_3 = L_x^3 \varphi_3, \bar{\varphi}_4 = L_y \varphi_4, \bar{\varphi}_5 = L_y L_x^2 \varphi_5, \\ \bar{\varphi}_6 = L_y^3 \varphi_6 \end{aligned} \quad (11)$$

因此, 式(10)可以写成无量纲的形式:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}}_1 + \bar{c}_1 \dot{\bar{w}}_1 + \bar{k}_1 \bar{w}_1 + \bar{k}_2 \bar{w}_2 + \bar{N}_1(\Delta T) \bar{w}_1 + \\ \bar{N}_2(\Delta T) \bar{w}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{w}_1^2 + \bar{\alpha}_2 \bar{w}_2^2 + \\ \bar{\alpha}_3 \bar{w}_1 \bar{w}_2 + \bar{\alpha}_4 \bar{w}_1^3 + \bar{\alpha}_5 \bar{w}_2^3 + \bar{\alpha}_6 \bar{w}_1^2 \bar{w}_2 + \\ \bar{\alpha}_7 \bar{w}_1 \bar{w}_2^2 + \bar{N}_3(\Delta T) = \bar{f} \cos(\bar{\Omega} t) \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}}_2 + \bar{c}_2 \dot{\bar{w}}_2 + \bar{k}_3 \bar{w}_1 + \bar{k}_4 \bar{w}_2 + \bar{N}_4(\Delta T) \bar{w}_1 + \\ \bar{N}_5(\Delta T) \bar{w}_2 + \bar{\beta}_1 \bar{w}_1^2 + \bar{\beta}_2 \bar{w}_1 \bar{w}_2 + \\ \bar{\beta}_3 \bar{w}_1 \bar{w}_2 + \bar{\beta}_4 \bar{w}_1^3 + \bar{\beta}_5 \bar{w}_2^3 + \bar{\beta}_6 \bar{w}_1^2 \bar{w}_2 + \\ \bar{\beta}_7 \bar{w}_1 \bar{w}_2^2 + \bar{N}_6(\Delta T) = \bar{f} \cos(\bar{\Omega} t) \end{aligned} \quad (12b)$$

基于式(12), 可以分析出非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的静力学和动力学特性。

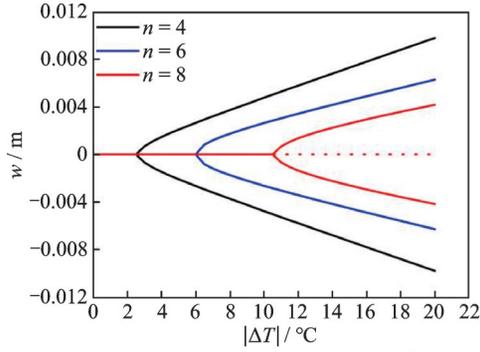
## 2 固化分析

通过固化分析可以确定三种平衡状态。忽略式(10)中的惯性、阻尼和动态激励项, 得到非线性静平衡方程:

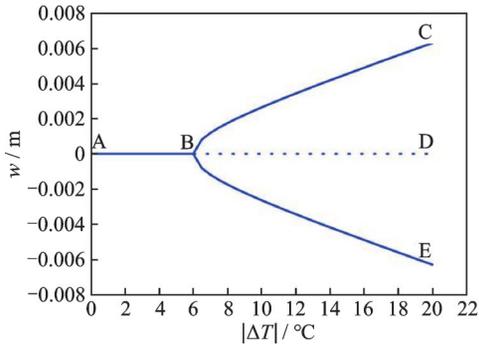
$$\begin{aligned} k_1 w_1 + k_2 w_2 + N_1(\Delta T) w_1 + N_2(\Delta T) w_2 + \\ \alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2 + \alpha_3 w_1 w_2 + \alpha_4 w_1^3 + \alpha_5 w_2^3 + \\ \alpha_6 w_1^2 w_2 + \alpha_7 w_1 w_2^2 + N_3(\Delta T) = 0 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} k_3 w_1 + k_4 w_2 + N_3(\Delta T) w_1 + N_4(\Delta T) w_2 + \\ \beta_1 w_1^2 + \beta_2 w_2^2 + \beta_3 w_1 w_2 + \beta_4 w_1^3 + \beta_5 w_2^3 + \\ \beta_6 w_1^2 w_2 + \beta_7 w_1 w_2^2 + N_6(\Delta T) = 0 \end{aligned} \quad (13b)$$

在固化过程中, 非对称复合材料层合板从制造温度冷却至室温。设室温与制造温度之间的差值为  $\Delta T$ , 并以温差绝对值  $|\Delta T|$  作为控制参数。改变  $|\Delta T|$ , 通过求解式(13)可绘制静态分岔图, 如图3所示。



(a)  $(0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ 和  
 $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  双稳态板的静态分岔图  
 (a) The static bifurcation diagrams of the  $(0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,  
 $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  and  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$   
 bistable plates



(b)  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ 双稳态板的静态分岔图  
 (b) The static bifurcation diagram of the  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$   
 bistable plate

图3 角 $(L_x, L_y)$ 的横向位移 $w$ 关于温差绝对值 $|\Delta T|$ 的静态分岔图

Fig.3 The static bifurcation diagrams of the transversal displacement  $w$  of corner  $(L_x, L_y)$  with respect to absolute values of temperature difference  $|\Delta T|$

图3(a)中,黑线、蓝线和红线分别表示非对称铺设顺序为 $(0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ)$ , $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ 和 $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,尺寸为 $300\text{ mm}\times 300\text{ mm}$ 的双稳态板。由图可知,平衡解的数目随着 $|\Delta T|$ 的变化从1变到3,这表明静态分岔的类型是超临界叉形分岔。

图3(b)表示非对称铺设顺序为 $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,尺寸为 $300\text{ mm}\times 300\text{ mm}$ 的双稳态板的固化过程。板在点A处是一个平板。在点B处,温度-位移关系曲线分岔出分支BC,BD和BE。沿分支BC,正位移的大小随着参数 $|\Delta T|$ ( $\Delta T$ 的符号为负)的增加而增加;沿分支BD,位移保持在接近于零的水平;沿分支BE,负位移的大小随着参数 $|\Delta T|$ 的增加而增加。在分支BE,沿 $x$ 方向的曲率占主导地位,而沿 $y$ 方向的曲率接近于零,这代表第一稳定状态;在分支BD,沿 $x$ 和 $y$ 方向的曲率大小相等、符号相反,这代表不稳定平衡状态;在分支BC,沿 $y$ 方向的曲率占主导地位,而沿 $x$ 方向的曲率接近于零,这代表第二稳定状态。

### 3 稳定性分析

本节中,首先研究式(10)是否有三个平衡点,然后通过稳定性分析判断式(10)是否有两个稳定平衡点和一个不稳定平衡点。分别考虑无阻尼和有阻尼的情况,其中,无阻尼情况对应静态分析,有阻尼情况对应动态分析。

在本节中,非对称铺设顺序为 $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,尺寸为 $300\text{ mm}\times 300\text{ mm}$ , $\Delta T$ 为 $-90^\circ\text{C}$ 。令 $w_1=x_1$ , $\dot{w}_1=x_2$ , $w_2=x_3$ , $\dot{w}_2=x_4$ ,将式(10)转化为状态空间的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中:

$$f_1 = x_2 \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & -c_1 x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_3 - N_1(\Delta T)x_1 - \\ & N_2(\Delta T)x_3 - \alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_3^2 - \alpha_3 x_1 x_3 - \\ & \alpha_4 x_1^3 - \alpha_5 x_3^3 - \alpha_6 x_1^2 x_3 - \alpha_7 x_1 x_3^2 - \\ & N_3(\Delta T) + \gamma_1 f \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (15b)$$

$$f_3 = x_4 \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} f_4 = & -c_2 x_4 - k_3 x_1 - k_4 x_3 - N_4(\Delta T)x_1 - \\ & N_5(\Delta T)x_3 - \beta_1 x_1^2 - \beta_2 x_3^2 - \beta_3 x_1 x_3 - \\ & \beta_4 x_1^3 - \beta_5 x_3^3 - \beta_6 x_1^2 x_3 - \beta_7 x_1 x_3^2 - \\ & N_6(\Delta T) + \gamma_2 f \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (15d)$$

雅可比矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad (16)$$

即

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, a_{12} = 1, a_{13} = 0, a_{14} = 0, \\ a_{21} &= -k_1 - N_1(\Delta T) - 2\alpha_1 x_1 - \alpha_3 x_3 - \\ & 3\alpha_4 x_1^2 - 2\alpha_6 x_1 x_3 - \alpha_7 x_3^2, \\ a_{22} &= -c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= -k_2 - N_2(\Delta T) - 2\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_1 - \\
&\quad 3\alpha_5 x_3^2 - \alpha_6 x_1^2 - 2\alpha_7 x_1 x_3, \\
a_{24} &= 0, a_{31} = 0, a_{32} = 1, a_{33} = 0, a_{34} = 0, \\
a_{41} &= -k_3 - N_4(\Delta T) - 2\beta_1 x_1 - \beta_3 x_3 - \\
&\quad 3\beta_4 x_1^2 - 2\beta_6 x_1 x_3 - \beta_7 x_3^2, \\
a_{42} &= 0, \\
a_{43} &= -k_4 - N_5(\Delta T) - 2\beta_2 x_3 - \beta_3 x_1 - \\
&\quad 3\beta_5 x_3^2 - \beta_6 x_1^2 - 2\beta_7 x_1 x_3, \\
a_{44} &= -c_2
\end{aligned} \quad (18)$$

### 3.1 三个平衡点

为确定三个平衡点,去掉阻尼和外激励项,并令式(14)中的 $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dot{x}_3 = 0, \dot{x}_4 = 0$ ,得到:

$$x_2 = 0 \quad (19a)$$

$$\begin{aligned}
&-k_1 x_1 - k_2 x_3 - N_1(\Delta T) x_1 - N_2(\Delta T) x_3 - \\
&\quad \alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_3^2 - \alpha_3 x_1 x_3 - \alpha_4 x_1^3 - \\
&\quad \alpha_5 x_3^3 - \alpha_6 x_1^2 x_3 - \alpha_7 x_1 x_3^2 - N_3(\Delta T) = 0
\end{aligned} \quad (19b)$$

$$x_4 = 0 \quad (19c)$$

$$\begin{aligned}
&-k_3 x_1 - k_4 x_3 - N_4(\Delta T) x_1 - N_5(\Delta T) x_3 - \\
&\quad \beta_1 x_1^2 - \beta_2 x_3^2 - \beta_3 x_1 x_3 - \beta_4 x_1^3 - \beta_5 x_3^3 - \\
&\quad \beta_6 x_1^2 x_3 - \beta_7 x_1 x_3^2 - N_6(\Delta T) = 0
\end{aligned} \quad (19d)$$

通过求解式(19)得到三个平衡解:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.318 \\ 0 \\ 0.0014 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.13 \\ 0 \\ 0.13 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.0014 \\ 0 \\ 1.318 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (20)$$

### 3.2 无阻尼稳定性分析

令 $c_1 = 0, c_2 = 0$ ,并将式(20)中的第一个平衡点代入雅可比矩阵(16),则 $J_1$ 被表示为:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.21 \times 10^5 & 0 & 2.95 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.47 \times 10^5 & 0 & -5.29 \times 10^7 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

对应 $J_1$ 的特征方程为:

$$\det(J_1 - \lambda I) = 0 \quad (22)$$

即

$$\lambda^4 + 5.3 \times 10^7 \lambda^2 + 2.06 \times 10^{12} = 0 \quad (23)$$

特征值为:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= 7279.28i, \lambda_{12} = -7279.28i, \\
\lambda_{13} &= 197.2i, \lambda_{14} = -197.2i
\end{aligned} \quad (24)$$

由于 $\lambda_{11}$ 和 $\lambda_{12}$ 是一对共轭纯虚特征值, $\lambda_{13}$ 和 $\lambda_{14}$ 也是一对共轭纯虚特征值,所以式(20)中的第一个平

衡点是一个中心点且该点是稳定的。

令 $c_1 = 0, c_2 = 0$ ,并将式(20)中的第二个平衡点代入雅可比矩阵(16),则 $J_2$ 被表示为:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.15 \times 10^6 & 0 & 1.35 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.35 \times 10^6 & 0 & -1.15 \times 10^6 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

对应 $J_2$ 的特征方程为:

$$\det(J_2 - \lambda I) = 0 \quad (26)$$

即

$$\lambda^4 + 2.3 \times 10^6 \lambda^2 - 5.1 \times 10^{11} = 0 \quad (27)$$

特征值为:

$$\begin{aligned}
\lambda_{21} &= 451.59, \lambda_{22} = -451.59, \\
\lambda_{23} &= 1581.34i, \lambda_{24} = -1581.34i
\end{aligned} \quad (28)$$

由于 $\lambda_{21}$ 和 $\lambda_{22}$ 是一对符号相反的实特征值, $\lambda_{23}$ 和 $\lambda_{24}$ 是一对共轭纯虚特征值,所以式(20)中的第二个平衡点是鞍中心点且该点是不稳定的。

令 $c_1 = 0, c_2 = 0$ ,并将式(20)中的第三个平衡点代入雅可比矩阵(16),则 $J_3$ 被表示为:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5.29 \times 10^7 & 0 & 1.47 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.95 \times 10^7 & 0 & -1.21 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

对应 $J_3$ 的特征方程为:

$$\det(J_3 - \lambda I) = 0 \quad (30)$$

即

$$\lambda^4 + 5.3 \times 10^7 \lambda^2 + 2.06 \times 10^{12} = 0 \quad (31)$$

特征值为:

$$\begin{aligned}
\lambda_{31} &= 7279.11i, \lambda_{32} = -7279.11i, \\
\lambda_{33} &= 197.2i, \lambda_{34} = -197.2i
\end{aligned} \quad (32)$$

由于 $\lambda_{31}$ 和 $\lambda_{32}$ 是一对共轭纯虚特征值, $\lambda_{33}$ 和 $\lambda_{34}$ 也是一对共轭纯虚特征值,所以式(20)中的第三个平衡点是中心点且该点是稳定的。

### 3.3 有阻尼稳定性分析

考虑阻尼并将式(20)中的第一个平衡点代入雅可比矩阵(16),则雅可比矩阵被确定为:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.21 \times 10^5 & -c_1 & 2.95 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.47 \times 10^5 & 0 & -5.29 \times 10^7 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

对应 $J_1$ 的特征方程为:

$$\det(J_1 - \lambda I) = 0 \quad (34)$$

即

$$\begin{aligned}
\lambda^4 &+ 3 \times 10^7 \lambda^2 + 18956.4c_1 \lambda + 137c_2 \lambda + \\
&\quad 2.04 \times 10^{12} = 0
\end{aligned} \quad (35)$$

特征值为:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= f_1(c_1, c_2) + 7279.28i, \\ \lambda_{12} &= f_1(c_1, c_2) - 7279.28i, \\ \lambda_{13} &= f_1(c_1, c_2) + 197.2i, \\ \lambda_{14} &= f_1(c_1, c_2) - 197.2i \end{aligned} \quad (36)$$

由于  $\lambda_{11}$  和  $\lambda_{12}$  是一对共轭复特征值,  $\lambda_{13}$  和  $\lambda_{14}$  也是一对共轭复特征值, 所以式(20)中的第一个平衡点不再是中心点而是焦点。一旦  $c_1$  和  $c_2$  被确定,  $f_1(c_1, c_2)$  就可以被计算出来。

考虑阻尼并将式(20)中的第三个平衡点代入雅可比矩阵(16), 则雅可比矩阵被确定为:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5.29 \times 10^7 & -c_1 & 1.47 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.95 \times 10^7 & 0 & -1.21 \times 10^5 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

对应  $J_3$  的特征方程为:

$$\det(J_3 - \lambda I) = 0 \quad (38)$$

即

$$\lambda^4 + 3 \times 10^7 \lambda^2 + 18956.4c_2 \lambda + 137c_1 \lambda + 2.04 \times 10^{12} = 0 \quad (39)$$

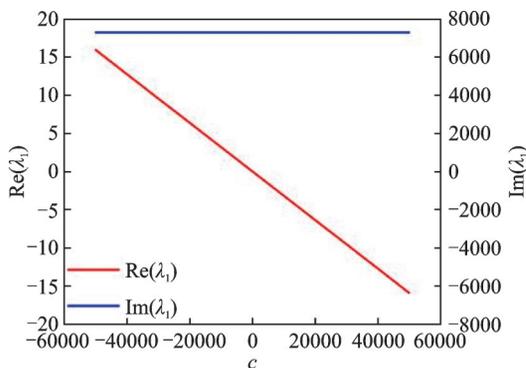
特征值为:

$$\begin{aligned} \lambda_{31} &= f_2(c_1, c_2) + 7279.11i, \\ \lambda_{32} &= f_2(c_1, c_2) - 7279.11i, \\ \lambda_{33} &= f_2(c_1, c_2) + 197.2i, \\ \lambda_{34} &= f_2(c_1, c_2) - 197.2i \end{aligned} \quad (40)$$

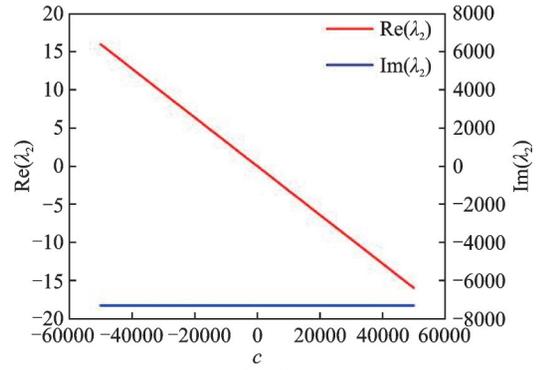
由于  $\lambda_{31}$  和  $\lambda_{32}$  是一对共轭复特征值,  $\lambda_{33}$  和  $\lambda_{34}$  也是一对共轭复特征值, 所以式(20)中的第三个平衡点不再是中心点而是焦点。一旦  $c_1$  和  $c_2$  被确定,  $f_2(c_1, c_2)$  就可以被计算出来。

令  $c_1 = c_2 = c$ , 以阻尼为控制参数, 得到动态分岔图, 如图 4 和 5 所示。

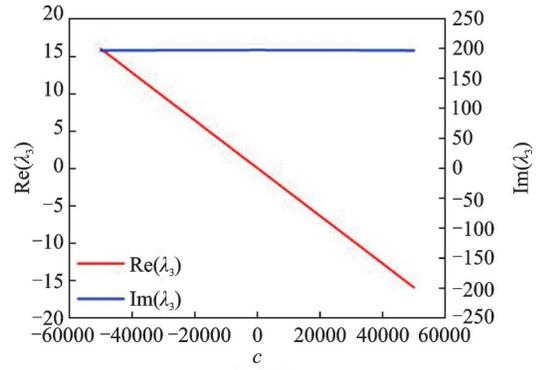
图 4 为特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  与阻尼  $c$  的关系曲线, 图中,  $\text{Re}(\cdot)$  表示特征值实部,  $\text{Im}(\cdot)$  表示特征值虚部。由图 4 可知, 当  $c > 0$  时, 所有特征值实部为负, 说明平衡点是一个稳定的焦点; 当  $c < 0$  时, 所有特征值的实部为正, 说明平衡点是一个不稳定的焦点。可以得出结论, 当阻尼  $c$  的符号从负变到正时, 所有



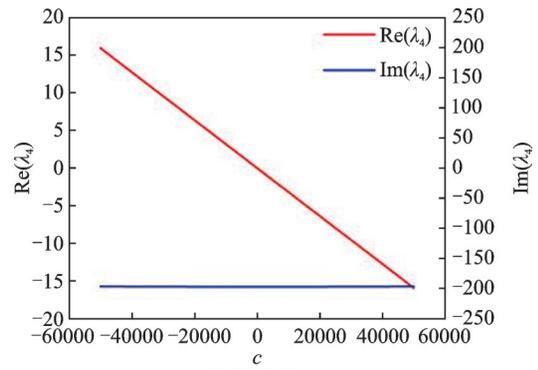
(a) 特征值  $\lambda_1$   
(a) The eigenvalue  $\lambda_1$



(b) 特征值  $\lambda_2$   
(b) The eigenvalue  $\lambda_2$



(c) 特征值  $\lambda_3$   
(c) The eigenvalue  $\lambda_3$



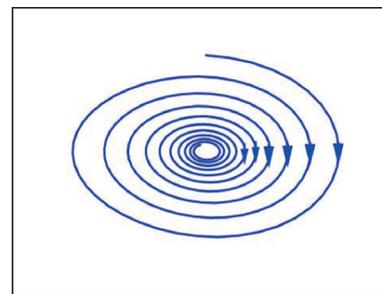
(d) 特征值  $\lambda_4$   
(d) The eigenvalue  $\lambda_4$

图 4 特征值与阻尼  $c$  的关系曲线

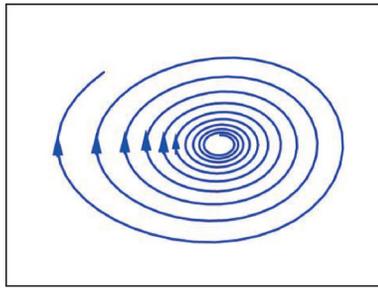
Fig. 4 The relationship curves between the eigenvalues and damping  $c$

特征值实部的符号从正变到负, 而虚部的大小和符号几乎保持不变, 即平衡点从一个不稳定的焦点变为一个稳定的焦点。

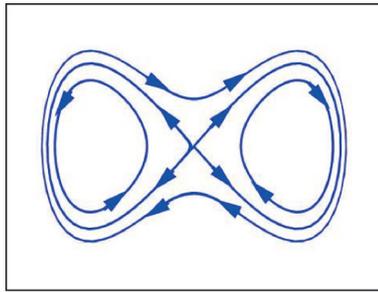
图 5 为平衡点的动态分岔图。如图 5 所示, 当阻



(a)  $c > 0$ , 稳定焦点  
(a) When  $c > 0$ , the stable focus point



(b)  $c < 0$ , 不稳定焦点  
(b) When  $c < 0$ , the unstable focus point



(c)  $c = 0$ 时, 鞍形点  
(c) When  $c = 0$ , the saddle point

图 5 平衡点的动态分岔图

Fig. 5 Dynamic bifurcation diagrams of the equilibrium points

尼  $c$  从零变为非零时,平衡点从中心点变为焦点。图 5(a)说明,当  $c > 0$  时,平衡点为稳定焦点;图 5(b)说明,当  $c < 0$  时,平衡点为不稳定焦点。可以得到结论,平衡点的动态分岔随着阻尼  $c$  的变化而发生。

### 4 势能曲线

对于动力学特性分析,双稳态系统必须要有外部能量输入,以克服其自身的势能。基于式(14),势能为:

$$\begin{aligned}
 U = & -\left[ \frac{2}{5} \rho L_x^5 L_y k_1 + \frac{2}{9} \rho L_x^3 L_y^3 k_3 + \frac{2}{5} \rho L_x^5 L_y N_1(\Delta T) + \right. \\
 & \left. \frac{2}{9} \rho L_x^3 L_y^3 N_4(\Delta T) \right] w_1^2 - \left[ \frac{4}{5} \rho L_x^5 L_y k_2 + \frac{4}{9} \rho L_x^3 L_y^3 k_4 + \right. \\
 & \left. \frac{4}{5} \rho L_x^5 L_y N_2(\Delta T) + \frac{4}{9} \rho L_x^3 L_y^3 N_5(\Delta T) \right] w_1 w_2 - \\
 & \left( \frac{4}{15} \rho L_x^5 L_y \alpha_1 + \frac{4}{27} \rho L_x^3 L_y^3 \beta_1 \right) w_1^3 - \\
 & \left( \frac{4}{5} \rho L_x^5 L_y \alpha_2 + \frac{4}{9} \rho L_x^3 L_y^3 \beta_2 \right) w_1 w_2^2 - \\
 & \left( \frac{2}{5} \rho L_x^5 L_y \alpha_3 + \frac{2}{9} \rho L_x^3 L_y^3 \beta_3 \right) w_1^2 w_2 - \\
 & \left( \frac{4}{5} \rho L_x^5 L_y N_3(\Delta T) + \frac{4}{9} \rho L_x^3 L_y^3 N_6(\Delta T) \right) w_1 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{4}{5} \rho L_x^5 L_y \alpha_5 + \frac{4}{9} \rho L_x^3 L_y^3 \beta_5 \right) w_1 w_2^3 - \\
 & \left( \frac{4}{15} \rho L_x^5 L_y \alpha_6 + \frac{4}{27} \rho L_x^3 L_y^3 \beta_6 \right) w_1^3 w_2 - \\
 & \left( \frac{2}{5} \rho L_x^5 L_y \alpha_7 + \frac{2}{9} \rho L_x^3 L_y^3 \beta_7 \right) w_1^2 w_2^2 - \\
 & \left( \frac{1}{5} \rho L_x^5 L_y \alpha_4 + \frac{1}{9} \rho L_x^3 L_y^3 \beta_4 \right) w_1^4 + C \quad (41)
 \end{aligned}$$

非对称铺设双稳态板的势能曲线如图 6 所示。图中,黑线表示  $(0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,蓝线表示  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,红线表示  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ 。图 6 和 7 中的横坐标表示角  $(L_x, L_y)$  的位移  $w$ ,纵坐标表示能量  $U$ 。双稳态板的尺寸为  $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ ,  $\Delta T$  为  $-90^\circ \text{C}$ 。

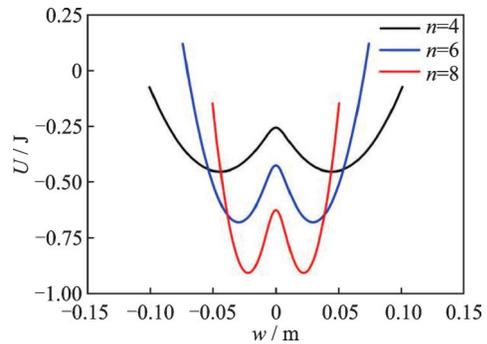


图 6 与横向位移  $w$  相关的能量曲线

Fig. 6 The energy curves related to the transversal displacement  $w$

通过分析图 7,  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  双稳态板的势能曲线有两个势阱和一个势垒,这有助于研究动态跳跃和非线性振动。由图 7 可知,双稳态系统需要足够的能量输入来驱动其从一个稳定平衡状态跳跃到另一个稳定平衡状态。也就是说,需要向双稳态系统施加足够的能量,以驱动其挣脱某一个势阱的束缚,并跨过隔离两个势阱的势垒,进入到另外一个势阱。当能量输入不足时,动态响应将被限制在某一个稳定状态附近的小范围内。

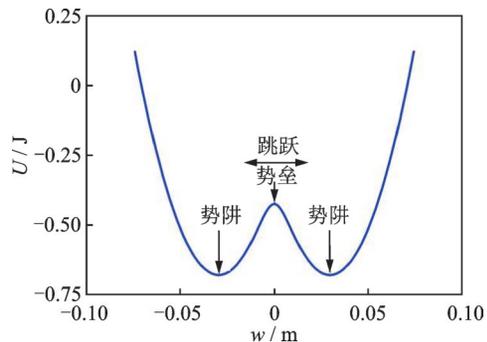


图 7  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  双稳态板的能量曲线与横向位移  $w$  的关系

Fig. 7 The relationship between the energy curve of the  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  bistable plate and transversal displacement  $w$

### 5 动力学分析

为研究非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的动力学特性,设置控制参数为:

$$p=(n, \Delta T, c, f, \Omega) \quad (42)$$

式中  $f$  表示激励振幅; $\Omega$ 表示激励频率。

式(12)被用作频率-位移响应函数。选择三组控制参数,分别为  $p_1=(4, 90, 0.75, 1, \Omega)$ ,  $p_2=(6, 90, 0.75, 0.6, \Omega)$ ,  $p_3=(8, 90, 0.75, 0.3, \Omega)$ 。利用 Runge-Kutta 法进行扫频,得到非对称铺设顺序分别为  $(0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ ,  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ , 尺寸为  $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$  的双稳态板的频率-位移响应图,如图8所示。

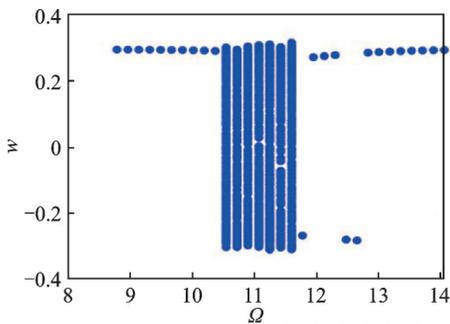
选择一组控制参数  $(6, 90, 0.75, 0.6, \Omega)$ , 得到非对称铺设顺序为  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ , 尺寸为  $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$  的双稳态板的频率-位移响应,如图9所示。

在图8中,纵坐标为角  $(L_x, L_y)$  的横向位移  $w$ , 横坐标为频率  $\Omega$ 。横向位移  $w$  采用以下无量纲形式:

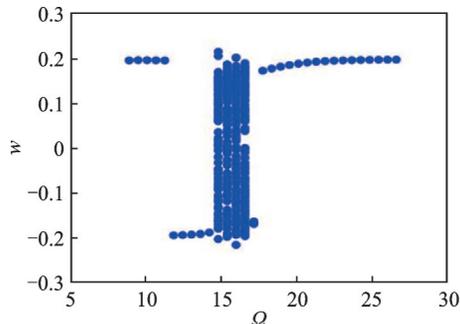
$$w = \bar{w}_1 \bar{x}^2 + \bar{w}_2 \bar{y}^2 = L_x w_1 \left(\frac{x}{L_x}\right)^2 + L_y w_2 \left(\frac{y}{L_y}\right)^2 \quad (43)$$

在图9(a)中,纵坐标为  $x$  方向的曲率,横坐标为频率  $\Omega$ ;在图9(b)中,纵坐标为  $y$  方向的曲率,横坐标为频率  $\Omega$ 。

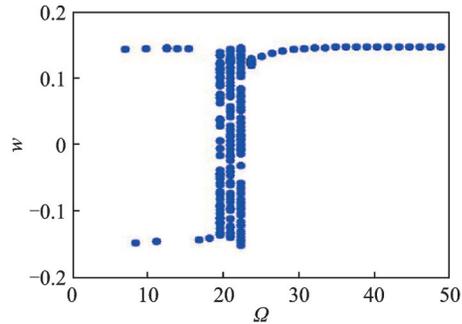
图8和9可以被用来分析非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板在扫频过程中的振动形式。



(a)  $(0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ)$  双稳态板的分岔图  
(a) The bifurcation diagram of the  $(0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ)$  bistable plate



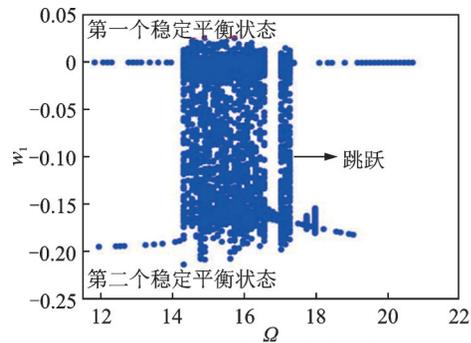
(b)  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  双稳态板的分岔图  
(b) The bifurcation diagram of the  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  bistable plate



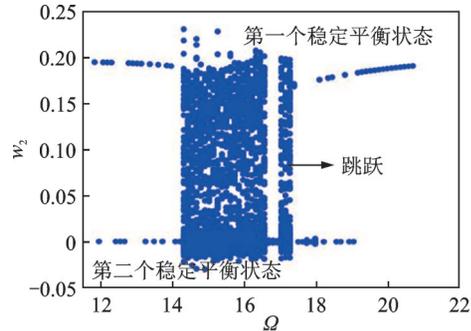
(c)  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  双稳态板的分岔图  
(c) The bifurcation diagram of the  $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$  bistable plate

图8 双稳态板角点  $(0.15, 0.15)$  位移关于基础激励频率  $\Omega$  的分岔图

Fig. 8 The bifurcation diagrams of the bistable plates of the displacement  $w$  of corner  $(0.15, 0.15)$  with respect to base excitation frequency  $\Omega$



(a) 沿  $x$  方向的主曲率响应  
(a) The principal curvature response in the  $x$  direction



(b) 沿  $y$  方向的主曲率响应  
(b) The principal curvature response in the  $y$  direction

图9 关于基础激励频率  $\Omega$  的  $w_1$  和  $w_2$  的分岔图

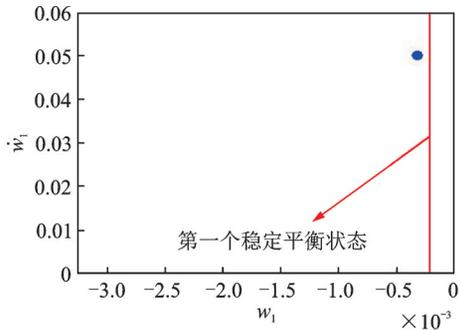
Fig. 9 The bifurcation diagrams of  $w_1$  and  $w_2$  with respect to base excitation frequency  $\Omega$

为全面分析动力学特性,图10展示了一系列平面  $(w_1, \dot{w}_1)$  上的庞加莱截面图,它们表明了双稳态系统的振动形式。图10(a)说明了当  $\Omega=14.46$  时,系统在第一稳定状态附近的周期性振动;图10(b)说明了当  $\Omega=16.68$  时,系统在两个稳定平衡状态之间的连续动态跳跃和混沌振动;图10(c)说明了当  $\Omega=17.16$  时,系统在第二稳定状态附近的概周期振动;图10(d)说明了当  $\Omega=17.52$  时,系统在两个稳定平衡状态之间的动态跳跃和混沌振动;图10(e)说明

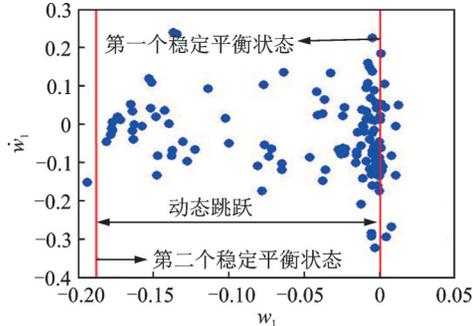
了当  $\Omega=17.64$  时,系统在第一稳定状态附近的概周期振动;图 10(f)说明了当  $\Omega=17.88$  时,系统在第二稳定状态附近的周期振动。

基于图 10 中的庞加莱截面图,图 8 和 9 可以被描述为如下的流程:

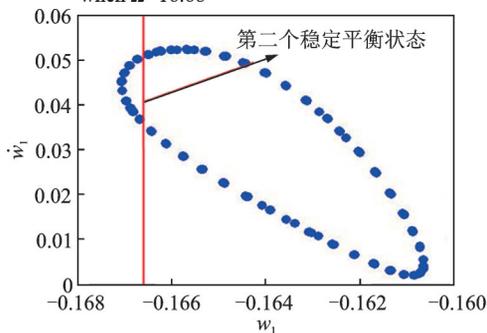
(1) 系统在某一个稳定平衡状态附近的振动  $\rightarrow$



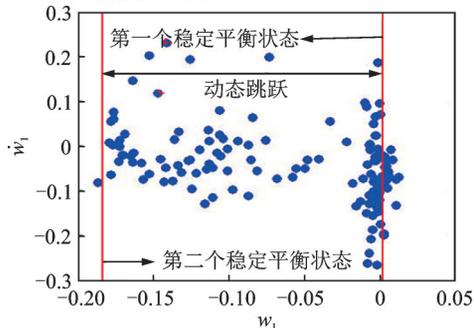
(a) 当  $\Omega=14.46$  时, 系统在第一稳定状态附近的周期性振动  
(a) The periodic vibration around the first stable state when  $\Omega=14.46$



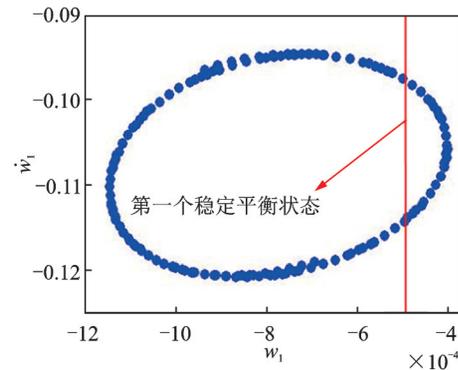
(b) 当  $\Omega=16.68$  时, 系统在两个稳定平衡状态之间的连续动态跳跃和混沌振动  
(b) The continuous dynamic snap-through and chaotic vibration between the two stable equilibrium states when  $\Omega=16.68$



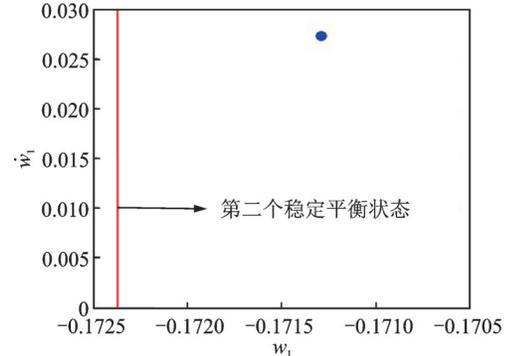
(c) 当  $\Omega=17.16$  时, 系统在第二稳定状态附近的概周期振动  
(c) The quasi-periodic vibration around the second stable state when  $\Omega=17.16$



(d) 当  $\Omega=17.52$  时, 系统在两个稳定平衡状态之间的动态跳跃和混沌振动  
(d) The dynamic snap-through and chaotic vibration between the two stable equilibrium states when  $\Omega=17.52$



(e) 当  $\Omega=17.64$  时, 系统在第一稳定状态附近的概周期振动  
(e) The quasi-periodic vibration around the first stable state when  $\Omega=17.64$



(f) 当  $\Omega=17.88$  时, 系统在第二稳定状态附近的周期振动  
(f) The periodic vibration around the second stable state when  $\Omega=17.88$

图 10 庞加莱截面图

Fig. 10 The Poincaré sectional views

系统在两个稳定平衡状态之间的动态跳跃  $\rightarrow$  系统在某一个稳定平衡状态附近的振动;

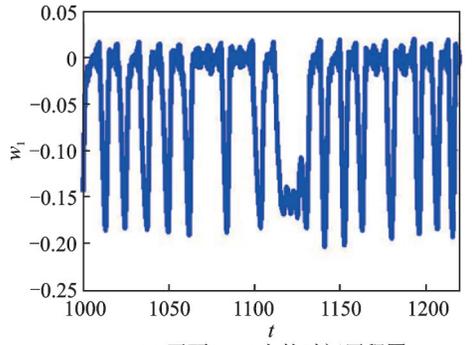
(2) 系统在第一个稳定平衡状态附近的周期振动  $\rightarrow$  系统在两个稳定平衡状态之间的连续动态跳跃  $\rightarrow$  系统在第二个稳定平衡状态附近的概周期振动  $\rightarrow$  系统在两个稳定平衡状态之间的动态跳跃和混沌振动  $\rightarrow$  系统在第二个稳定平衡状态附近的混沌振动  $\rightarrow$  系统在第一个稳定平衡状态附近的概周期振动  $\rightarrow$  系统在第二个稳定平衡状态附近的周期振动;

(3) 单势阱小振幅振动  $\rightarrow$  单势阱大振幅振动  $\rightarrow$  双势阱大振幅振动和非线性振动  $\rightarrow$  单势阱大振幅振动  $\rightarrow$  单势阱小振幅振动。

通过扫频可知,双稳态板首先在某一个稳定平衡状态附近发生轻微振动,然后在两个稳定平衡状态之间发生剧烈跳跃,最后又在某一个稳定平衡状态附近发生轻微振动。

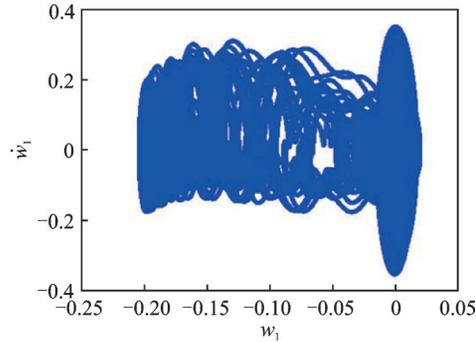
所有能引起双势阱大振幅动态跳跃和非线性振动的激励频率构成了一个特定的范围,这个特定范围实际上有助于双稳态能量采集器的设计,且会随着层合板层数的增加而减小。随着总厚度  $2H$  的增加,动态跳跃将被限制在一个非常窄的频率带内。

如图 10(a) 和 (e) 所示,沿  $y$  方向的曲率振幅占主导地位,而沿  $x$  方向的曲率振幅几乎为零,也就是



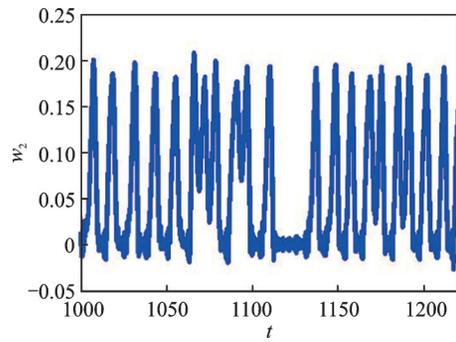
(a) 平面( $t, w_1$ )上的时间历程图

(a) The time-history diagram on the plane ( $t, w_1$ )



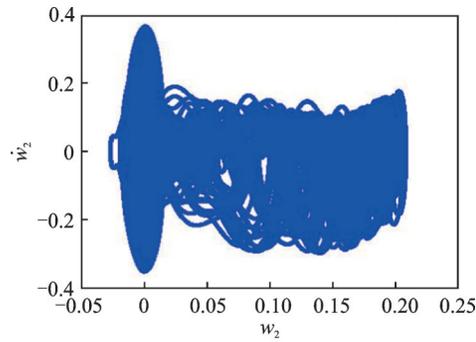
(b) 平面( $w_1, \dot{w}_1$ )上的相图

(b) The phase portrait on the plane ( $w_1, \dot{w}_1$ )



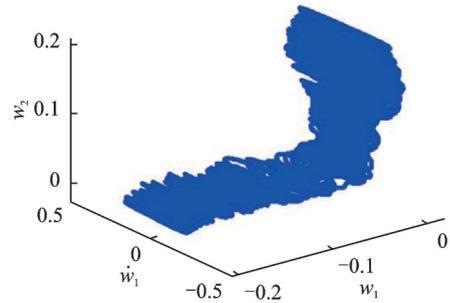
(c) 平面( $t, w_2$ )上的时间历程图

(c) The time-history diagram on the plane ( $t, w_2$ )



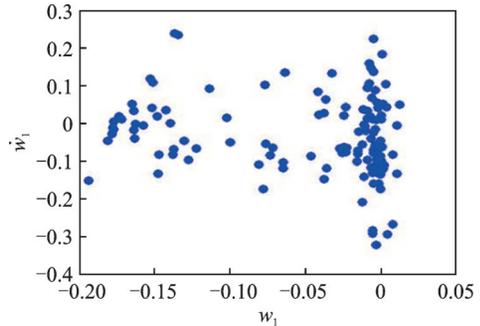
(d) 平面( $w_2, \dot{w}_2$ )上的相图

(d) The phase portrait on the plane ( $w_2, \dot{w}_2$ )



(e) 空间( $w_1, \dot{w}_1, w_2$ )上的三维相图

(e) The three-dimensional phase portrait in space ( $w_1, \dot{w}_1, w_2$ )



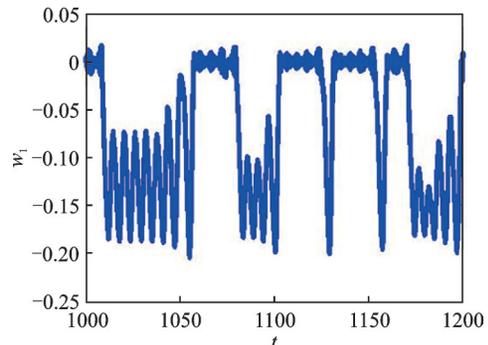
(f) 平面( $w_1, \dot{w}_1$ )上的庞加莱截面图

(f) The Poincaré sectional view on the plane ( $w_1, \dot{w}_1$ )

图 11 当  $\Omega=16.68$  时, 系统在两个稳定平衡状态之间的连续动态跳跃和混沌振动

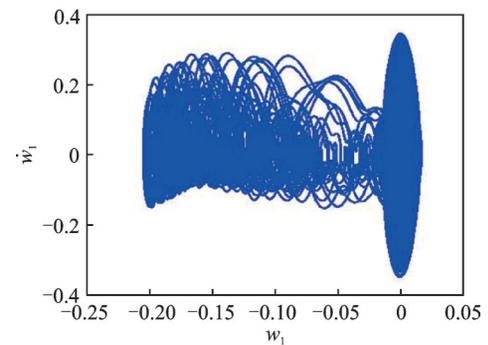
Fig. 11 The continuous dynamic snap-through and chaotic vibration between the two stable equilibrium states when  $\Omega=16.68$

说,图 10(a)和(e)显示的位移为正,这表示系统在第一稳定状态附近振动。类似地,如图 10(c)和(f)所示,沿  $x$  方向的曲率振幅占主导地位,而沿  $y$  方向的曲率振幅几乎为零,也就是说,图 10(c)和(f)中显示的位移为负,这表示系统在第二稳定状态附近振动。通过比较图 11 和 12 所示的  $w_1$  和  $w_2$  的动态响应可以发现,在振动过程中,当某一个方向的曲率趋于零,而另一个方向的曲率迅速增加时,系统发生动态



(a) 平面( $t, w_1$ )上的时间历程图

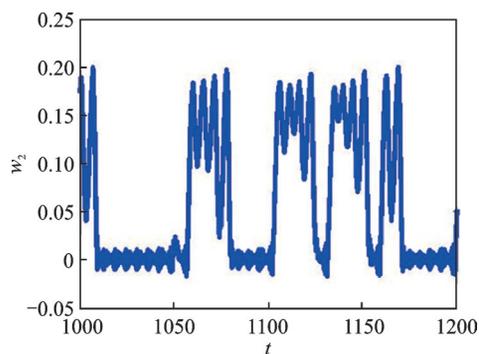
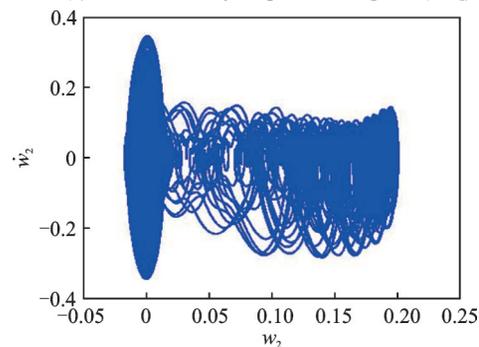
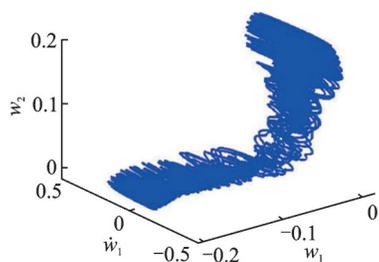
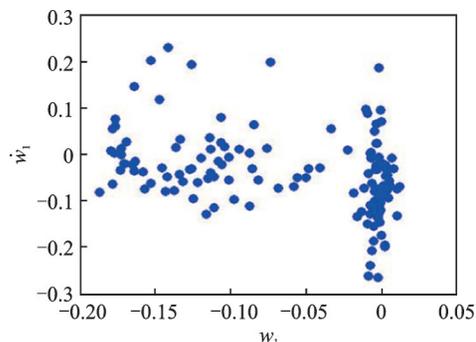
(a) The time-history diagram on the plane ( $t, w_1$ )



(b) 平面( $w_1, \dot{w}_1$ )上的相图

(b) The phase portrait on the plane ( $w_1, \dot{w}_1$ )

跳跃。基于庞加莱截面图可知,动态跳跃往往伴随着混沌振动,也就是说,混沌振动是动态跳跃发生的有利条件。

(c) 平面 $(t, w_2)$ 上的时间历程图(c) The time-history diagram on the plane  $(t, w_2)$ (d) 平面 $(w_2, \dot{w}_2)$ 上的相图(d) The phase portrait on the plane  $(w_2, \dot{w}_2)$ (e) 空间 $(w_1, \dot{w}_1, w_2)$ 上的三维相图(e) The three-dimensional phase portrait in space  $(w_1, \dot{w}_1, w_2)$ (f) 平面 $(w_1, \dot{w}_1)$ 上的庞加莱截面图(f) The Poincaré sectional view on the plane  $(w_1, \dot{w}_1)$ 图12 当 $\Omega=17.52$ 时,系统在两个稳定平衡状态之间的混沌振动和动态跳跃Fig.12 The chaotic vibration and dynamic snap-through between the two stable equilibrium states when  $\Omega=17.52$ 

## 6 结论

本文建立了非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的静力学和动力学模型。在静力学分析

中,进行了固化分析、稳定性分析和能量曲线分析;在动力学分析中,研究了基础激励频率对非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的影响。

通过固化分析确定了双稳态板的三个平衡位置,并阐明了以温差绝对值为控制参数的超临界叉形分岔。通过稳定性分析确定了三个平衡位置为两个稳定平衡位置和一个不稳定平衡位置。通过在动力学分析中引入阻尼,分析了平衡点的动态分岔,其中,稳定平衡点不再是中心点而是焦点。利用静平衡方程绘制了带有两个势阱的势能曲线,这有助于对动态跳跃现象的研究。

以基础激励频率为控制参数的理论模型论证了非对称铺设双稳态正交复合材料层合方形板的双势阱动态跳跃和非线性振动。只有当激励频率位于一定范围内时,系统才会发生双势阱大振幅动态跳跃和非线性振动,否则只会发生单势阱小振幅振动。动态跳跃往往伴随着混沌振动。混沌振动是动态跳跃发生的有利条件。非线性振动往往表现为周期振动、概周期振动和混沌振动。在动态跳跃过程中,沿一个方向的曲率趋于零,而沿另一个方向的曲率迅速增加。所有能引起双势阱大振幅动态跳跃和非线性振动的激励频率构成了一个特定的范围,这个特定范围实际上有助于双稳态能量采集器的设计,且会随着层合板层数的增加而减小。随着厚度的增加,动态跳跃将被限制在一个非常窄的频率带内。

## 参考文献:

- [1] Schlecht M, Schulte K. Advanced calculation of the room-temperature shapes of unsymmetric laminates[J]. Journal of Composite Materials, 1999, 33(16): 1472-1490.
- [2] Dano M L, Hyer M W. Snap-through of unsymmetric fiber reinforced composite laminates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(1): 175-198.
- [3] 胡筠晔, 卿海. 非对称铺层复合材料层合板的双稳态特性半解析研究[J]. 力学季刊, 2019, 40(1): 46-54. HU Junye, QING Hai. Semi-analytical modeling of bi-stable unsymmetric composite laminates[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2019, 40(1): 46-54.
- [4] 董挺, 张伟. 六层非对称正交双稳态复合材料层合板的动态跳跃研究[J]. 力学与实践, 2022, 44(2): 337-343. DONG Ting, ZHANG Wei. Study on dynamic snap-through of a six-layer asymmetric cross-ply bi-stable composite laminated plate[J]. Mechanics in Engineering, 2022, 44(2): 337-343.

- [5] 陈丹迪, 张征, 柴国钟. 双稳态复合材料层合结构的黏弹性模型[J]. 复合材料学报, 2016, 33(10): 2336-2343.  
CHEN Dandi, ZHANG Zheng, CHAI Guozhong. Viscoelastic model of bistable composite laminated structures[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2016, 33(10): 2336-2343.
- [6] 周伟兵, 郝育新. 四角点简支双稳态层合板振动特性研究[J]. 力学季刊, 2021, 42(4): 718-730.  
ZHOU Weibing, HAO Yuxin. Natural vibration characteristics of bi-stable laminates simply supported at four corners[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2021, 42(4): 718-730.
- [7] 钱有华, 杨园. 一类双稳态复合材料层合板的簇发振荡现象分析[J]. 振动工程学报, 2023, 36(3): 612-622.  
QIAN Youhua, YANG Yuan. Analysis of bursting oscillation in a class of bistable composite laminates[J]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 36(3): 612-622.
- [8] Li Y, Zhou S X, Yang Z C, et al. High-performance low-frequency bistable vibration energy harvesting plate with tip mass blocks[J]. Energy, 2019, 180: 737-750.
- [9] Guest S D, Pellegrino S. Analytical models for bistable cylindrical shells[J]. Proceedings of the Royal Society A, 2006, 462(2067): 839-854.
- [10] Potter K, Weaver P, Seman A A, et al. Phenomena in the bifurcation of unsymmetric composite plates[J]. Composites, Part A: Applied Science and Manufacturing, 2007, 38(1): 100-106.
- [11] Dano M L, Hyer M W. SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(22): 5949-5972.
- [12] Hufenbach W, Gude M, Kroll L. Design of multistable composites for application in adaptive structures[J]. Composites Science and Technology, 2002, 62(16): 2201-2207.
- [13] Giddings P F, Bowen C R, Salo A I T, et al. Bistable composite laminates: effects of laminate composition on cured shape and response to thermal load[J]. Composite Structures, 2010, 92(9): 2220-2225.
- [14] Mattioni F, Weaver P M, Potter K D, et al. The application of residual stress tailoring of snap-through composites for variable sweep wings[C]// Proceedings of the 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Newport, Rhode Island, USA, 2006: 1-4.
- [15] Pirra A, Avitabile D, Weaver P M. Bistable plates for morphing structures: a refined analytical approach with high-order polynomials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(25): 3412-3425.
- [16] Portela P, Camanho P, Weaver P M, et al. Analysis of morphing, multi stable structures actuated by piezoelectric patches[J]. Computers and Structures, 2008, 86(3-5): 347-356.
- [17] Schultz M R, Wilkie W K, Bryant R G. Investigation of self resetting active multi-stable laminates[J]. Journal of Aircraft, 2007, 44(4): 1069-1076.
- [18] Seffen K A, Vidoli S. Eversion of bistable shells under magnetic actuation: a model of nonlinear shapes[J]. Smart Material Structures, 2016, 25(6): 065010.
- [19] Zhang Z, Zhou Y S, Shen H C, et al. Experimental study of orthogonal bistable laminated composite shell driven by magnetorheological elastomer[J]. Composite Structures, 2021, 271: 114119.
- [20] Chillara V S C, Ramanathan A K, Dapino M J. Self-sensing piezoelectric bistable laminates for morphing structures[J]. Smart Materials and Structures, 2020, 29(8): 085008.
- [21] Saberi S, Ghayour M, Mirdamadi H R, et al. Free vibration analysis and mode management of bistable composite laminates using deep learning[J]. Archive of Applied Mechanics, 2021, 91: 2795-2816.
- [22] Senba A, Ikeda T, Ueda T. A two-way morphing actuation of bi-stable composites with piezoelectric fibers [C]// 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Orlando, Florida, USA, 2010: 12-15.
- [23] Arrieta A F, Neild S A, Wagg D J. Nonlinear dynamic response and modeling of a bi-stable composite plate for applications to adaptive structures[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 58: 259-272.
- [24] Arrieta A F, Bilgen O, Friswell M I, et al. Dynamic control for morphing of bi-stable composites[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2013, 24(3): 266-273.
- [25] Emam S A, Hobeck J, Inman D J. Experimental investigation into the nonlinear dynamics of a bistable laminate [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(4): 3019-3039.
- [26] Carrella A, Mattioni F, Diaz A A, et al. Static and dynamic analysis of a bistable plate for application in morphing structures[C]// Proceedings of the Seventh European Conference on Structural Dynamics. Southampton, UK, 2008: 7-9.
- [27] Lee A J, Xie A, Inman D J. Suppression of cross-well oscillations for bistable composites through potential well elimination[J]. Journal of Vibration and Acoustics: Transactions of the ASME, 2020, 142(3): 031003.
- [28] Habibzadeh N, Tikani R, Ziaei-Rad S, et al. Static and dynamic analysis of a bistable plate under nonlinear magnetic force[J]. Journal of Vibration and Control, 2022,

28(7-8): 745-757.

[29] Reddy J N. Mechanics of Laminated Composite Plates

and Shells: Theory and Analysis[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.

## Statics and dynamics analysis of bistable asymmetric cross-ply composite laminated square plates

GUO Zhen-kun<sup>1</sup>, XU Jia-le<sup>1</sup>, DONG Ting<sup>2</sup>

(1.School of Mechanical-Electronic and Vehicle Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China; 2.China North Vehicle Research Institute, Beijing 100072, China)

**Abstract:** A theoretical model for statics and dynamics of bistable asymmetric cross-ply composite laminated square plates is established. Three equilibrium states are determined by curing analysis in statics. Meanwhile the super-critical pitchfork bifurcation with temperature difference as the control parameter is explicated in the process of curing. Two stable states and one unstable state are demonstrated by stability analysis. The potential energy curve with two potential wells is depicted, which can contribute to studying dynamic snap-through. Moreover, the dynamic bifurcation for the equilibrium points is induced by introducing damping in dynamics. The influence of the base excitation frequency on the dynamics is discussed by numerical simulation. When the excitation frequency is located in a certain range, the large-amplitude dynamic snap-through and nonlinear vibrations with two potential wells can occur. The dynamics behaviors of the bistable system are overwhelmingly dominated by periodic vibration, quasi-periodic vibration and chaotic vibration. The certain frequency range, where the large-amplitude dynamic snap-through and nonlinear vibrations with two potential wells can occur, can be defined as a certain frequency broadband which proves bistable asymmetric cross-ply composite laminated square plates to be applicable to bistable energy harvesters.

**Key words:** nonlinear vibration, composite laminated square plates; bistable state; three equilibrium states; dynamic snap-through

作者简介: 郭振坤(1989—),男,博士,讲师。E-mail: guozhenkun@bucea.edu.cn。

通讯作者: 董挺(1988—),男,博士,副教授。E-mail: dongtingB2016@163.com。