

一类附加斜弹簧支撑的悬臂梁碰撞系统的 全局动力学

张绎泮¹, 徐慧东², 张建文¹

(1. 太原理工大学数学学院, 山西 太原 030024; 2. 太原理工大学机械与运载工程学院, 山西 太原 030024)

摘要: 本文研究了双侧非对称刚性约束下附加斜弹簧支撑的悬臂梁碰撞系统的次谐分岔和混沌的全局动力学。由于斜弹簧支撑结构的刚度项为超越函数, 给解析研究系统混沌和次谐分岔造成很大的困难。本文近似拟合了该系统的刚度项, 并对比分析了近似系统和原系统的同宿轨道及其内部的次谐轨道。将 Melnikov 方法发展应用于非光滑的碰撞悬臂梁系统, 给出了发生同宿混沌和次谐分岔的阈值条件。利用光滑流形的特征乘子结合碰撞函数分析了碰撞次谐轨道的稳定性, 并分析了次谐分岔与混沌的关系。基于阈值条件研究了阻尼、激励频率、激励幅值以及碰撞恢复系数对混沌和次谐分岔的影响, 进一步验证了理论分析的正确性。

关键词: 非线性振动; 碰撞悬臂梁; 同宿混沌; 次谐分岔; Melnikov 方法

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)08-1308-12

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.08.005

引言

碰撞振动系统广泛存在于日常生活和工程应用中。反复持续碰撞的梁是一种典型的非光滑碰撞系统。碰撞的非光滑因素通常会导致系统产生复杂的动力学行为, 这将对工程结构产生大的影响。因此, 具有碰撞约束的系统受到了科学工作者的广泛关注。Zhang 等^[1]基于 KAM 理论和 Aubry-Mather 理论证明了刚性约束倒立摆在小扰动下拟周期解以及大扰动下次谐解的存在性, 并提出一种精确计算不连续不变流形的数值方法来研究该系统的同宿分岔。Lyu 等^[2]给出了一类两自由度刚性碰撞振子极限环滑动分岔的四种情况, 并计算了余维 2 分岔点。Li 等^[3]研究了弹性碰撞、刚性碰撞和干摩擦同时作用的非光滑系统中伴随擦边和滑动非光滑分岔出现的各种吸引子跨越的全局演化结构。Zhang 等^[4]利用路径跟踪法研究了具有多个非光滑约束碰撞系统的各种光滑分岔和擦边非光滑分岔的复杂现象。Li 等^[5]利用李雅普诺夫指数和功率谱研究了一类拟周期激励的非光滑齿轮传动系统的非混沌特性, 证明了该系统存在奇异非混沌吸引子。蒋贵荣等^[6]研究了脉冲激励下碰撞振子的周期解及其复杂的分岔行为。Yin 等^[7]通过推广高阶零时间不连续映射方法, 研究了一类三自由度碰撞振动系统退化的擦边分岔

行为, 结果表明, 系统退化擦边点附近不仅存在典型的鞍结分岔和倍化分岔, 还存在 Neimark-Sacker 分岔的新现象。Feng 等^[8]研究了由碰撞振子周期轨线擦边导致的混沌激变现象, 并讨论了一类有界噪声激励下碰撞系统分形边界与混沌之间的关系。Zhang 等^[9]揭示了一类三自由度碰撞振动系统中多周期吸引子、多频拟周期吸引子以及混沌吸引子共存的现象, 并分析了导致这些吸引子共存的机理。

具有负刚度的系统能展示出多稳态的属性, 负刚度的引入通常会使系统产生同异宿轨道, 这将引发复杂的混沌运动和次谐分岔。这些特性使得此类系统受到广泛关注。Molyneux^[10]最早将两个横向弹簧元件与竖向刚度元件组合构造了具有负刚度结构的高静低动隔振器。Cao 等^[11]提出了光滑不连续振子, 即 SD 振子, 该振子不仅具有由光滑向不连续转迁的性质, 还具有多屈曲和多负刚度的特性。Ding 等^[12]基于负刚度设计了准零刚度隔振器并将其应用于预压梁, 实现了良好的减/隔振目标。Zhou 等^[13]提出了凸轮曲面滚子的负刚度设计模型, 并将其用于扭转振动隔振器的设计。Yang 等^[14]利用负刚度技术定量分析了能量采集器的动力学行为, 发现参数的调整不仅可以使势阱之间的跳跃更容易, 而且可以提高小振幅激励下的能量收集效率。Zhu 等^[15]提出了一种基于 SD 振子的两自由度抗震系统, 通过斜弹簧提供的负刚度获得了良好的隔振

收稿日期: 2022-09-17; 修订日期: 2022-12-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11872264)。

性能。Lu 等^[16]设计了一种负刚度非线性隔振系统,通过解析推导和动态实验验证了该隔振器优异的隔振效率。Valeev 等^[17]将碟簧负刚度部件应用到准零刚度隔振机构中,对隔振装置进行了理论研究和实验验证。

具有负刚度系统的次谐波解和混沌的参数区域通常比较小,这给运用数值方法求解次谐波共振和混沌的阈值带来了困难。为了克服数值方法的局限性,有必要使用解析的理论来确定系统的混沌和次谐波解的阈值。Melnikov 理论是分析系统混沌和次谐波解的经典方法。许多学者针对不同的系统不断改进 Melnikov 方法。Kukučka^[18]推广了经典 Melnikov 方法,并导出了平面非光滑系统的 Melnikov 函数。Cao 等^[19]提出了分段线性近似,并基于该近似方法通过发展 Melnikov 方法研究了具有两稳态的 SD 振子的混沌。Tian 等^[20]通过发展 Melnikov 方法研究了具有多个脉冲作用下的非光滑系统的混沌。Li 等^[21-22]给出了具有四个切换流形的同异宿混沌 Melnikov 方法的详细推导过程,并通过实例验证了理论推导的有效性。Zhou 等^[23]改进了曹庆杰提出的分段线性逼近方法,研究双稳态隔振系统的次谐共振和混沌。张思进等^[24]将 Melnikov 方法应用于碰撞准哈密顿系统,通过推导局部亚谐轨道的 Melnikov 函数,揭示了碰撞准哈密顿系统的众多动力学特性。

本文研究了双侧非对称刚性约束下附加斜弹簧支撑的悬臂梁的混沌和次谐分岔。第 1 节给出了悬臂梁碰撞系统的动力学方程,近似拟合了系统的刚度项,并对比分析了近似系统和原系统的同宿轨道及其内部的亚谐轨道;第 2 节通过非光滑的 Melnikov 方法给出了碰撞悬臂梁发生同宿混沌的条件;第 3 节通过非光滑的 Melnikov 方法给出了碰撞悬臂梁发生次谐分岔的条件,并讨论了碰撞次谐解的稳定性以及次谐分岔与混沌的关系;第 4 节基于理论分析结果通过数值仿真研究了阻尼、激励频率、激励幅值以及碰撞恢复系数对系统混沌和次谐分岔的影响。

1 力学模型及动力学方程

图 1 为双侧刚性约束下附加斜弹簧支撑的悬臂梁系统。系统的质量主要集中在悬臂梁的自由端,用质量为 m 的圆形质块 M 来表示,悬臂梁的长度为 l , EI 为抗弯刚度,取质块 M 静平衡位置为坐标原点,质块 M 受到斜弹簧结构的支撑作用,支撑结构中 l_0 为弹簧原长; l_H 为预加载后弹簧的长度; k_H 为弹簧刚度; C_v 为阻尼系数。并在简谐激振力 $F = \bar{f}_0 \sin(\bar{\omega} \bar{t})$ 的作用下做竖直方向的运动,振动位移为

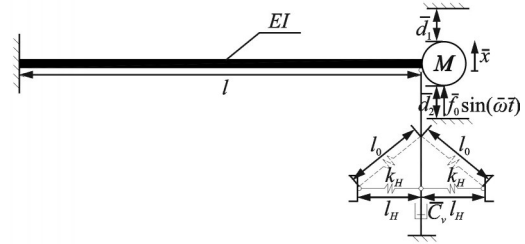


图 1 斜弹簧支撑的双侧刚性约束悬臂梁模型

Fig. 1 Model of a two-sided rigid constrained cantilever beam with oblique spring support

\bar{x} 。上、下约束与质块 M 静平衡位置存在的间隙分别为 \bar{d}_1, \bar{d}_2 。当质块 M 到达约束面时,将与上下约束面发生碰撞,碰撞过程由碰撞恢复系数 R 来确定。

基于文献[25]中支撑结构作用力的表达式,直接给出系统的无量纲动力学方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2(\zeta + \zeta_v)\dot{x} + x + 2kx \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) = \\ f_0 \sin(\omega t), \quad -d_2 < x < d_1 \\ \dot{x}_+ = -R\dot{x}_-, \quad x = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中 变量上方加“·”表示对时间 t 求导数, \dot{x}_+ 和 \dot{x}_- 分别为碰撞后与碰撞前的瞬时速度,其他物理量释义可参见文献[25]。

令 $2(\zeta + \zeta_v) = \xi\rho, f_0 = \xi q$, 系统(1)可以写为:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \xi\rho\dot{x} + x + 2kx \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) = \\ \xi q \sin(\omega t), \quad -d_2 < x < d_1 \\ \dot{x}_+ = -R\dot{x}_-, \quad x = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (2)$$

系统(2)对应的无阻尼未扰系统为:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2kx \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right), \\ -d_2 < x < d_1 \\ y_+ = -Ry_-, \quad x = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (3)$$

设系统(3)的非线性刚度为:

$$\tilde{F}(x) = x + 2kx \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) \quad (4)$$

由式(4)可以看出, $\tilde{F}(x)$ 是一个超越函数,为了方便基于 Melnikov 理论分析系统的混沌和次谐分岔,将 $\tilde{F}(x)$ 近似为如下形式^[19]:

$$\hat{F}(x) = \left(1 + 2k - \frac{2k\beta}{\alpha}\right)x + \frac{k\beta}{\alpha^3}x^3 + O(x) \quad (5)$$

随着 α 和 β 的变化,刚度函数(4)会呈现出负刚度的特性。不失一般性,取 $\alpha = 6, \beta = 216/35, k = 35$, 根据式(4)和(5)可得到如图 2 所示的刚度曲线。

从图2中可以看出,曲线中间段出现了负刚度,而且近似刚度函数(5)和原刚度函数(4)差别很小,说明在一定范围内可以用近似刚度函数来代替原刚度函数。

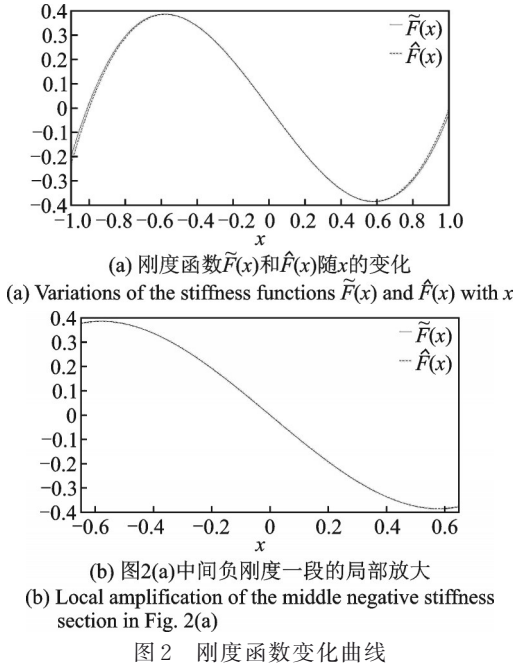


图2 刚度函数变化曲线

令 $\tau = -\left(1 + 2k - \frac{2k\beta}{\alpha}\right)$, $\delta = \frac{k\beta}{\alpha^3}$, 式(5)可写为:

$$\hat{F}(x) = -\tau x + \delta x^3 \quad (6)$$

于是近似后的系统为:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \xi p \dot{x} + \hat{F}(x) = \xi q \sin(\omega t), & -d_2 < x < d_1 \\ \dot{x}_+ = -R\dot{x}_-, & x = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (7)$$

系统(7)对应的未扰系统为:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\hat{F}(x) \\ y_+ = -Ry_-, & x = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (8)$$

图2中出现的负刚度表明系统(2)会呈现出多稳态的特性。接下来通过势函数来分析系统的多稳态特性。对于未扰系统(3),其对应的势函数为:

$$\tilde{V}(x) = \frac{1+2k}{2}x^2 - 2k\beta\sqrt{x^2+\alpha^2} + 2k\beta\alpha \quad (9)$$

对于未扰系统(8),其对应的势函数为:

$$\hat{V}(x) = -\frac{\tau}{2}x^2 + \frac{\delta}{4}x^4 \quad (10)$$

不失一般性,仍然基于参数 $\alpha=6, \beta=216/35, k=35$, 计算可得 $\tau=1$ 和 $\delta=1$, 基于表达式(9)和(10)得到如图3所示的势函数。从图3中可以看出,系统(2)有1个鞍点(0,0)以及2个中心点($x_1^*, 0$)和($x_2^*, 0$),表明系统是具有两稳态的结构。

为了从解析角度研究原系统(2)的混沌和次谐分岔,需要在同宿轨道及其内侧轨道的基础上进行

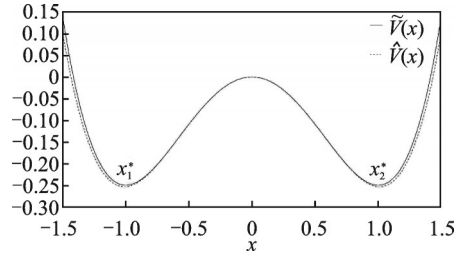


图3 势函数 $\tilde{V}(x)$ 和 $\hat{V}(x)$ 的变化曲线

Fig. 3 The variation curves of potential functions $\tilde{V}(x)$ and $\hat{V}(x)$

Melnikov积分。因此,除了要求验证原系统(2)和近似系统(7)刚度的近似度外,还需要进一步验证两个系统同宿轨道及其内侧轨道的近似度。

未扰系统(3)的Hamilton函数为:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1+2k}{2}x^2 - 2k\beta\sqrt{x^2+\alpha^2} + 2k\beta\alpha \quad (11)$$

未扰系统(8)的Hamilton函数为:

$$\hat{H}(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{\tau}{2}x^2 + \frac{\delta}{4}x^4 \quad (12)$$

将Hamilton函数(11)对应的哈密顿方程 $H(x, y) = E$ 和Hamilton函数(12)对应的哈密顿方程 $\hat{H}(x, y) = E$ 在不同能量值 E 下的相图放到同一个图中,如图4所示。图4中,红色虚线是原系统的同宿轨道及其内侧的周期轨道;黑色实线是近似系统同宿轨道及其内侧的周期轨道,近似系统(7)同宿轨道以及其内部周期轨道的详细表达式见附录。从图4中可以看出,近似系统(7)和原系统(2)的哈密顿系统的相图吻合很好,因此可利用系统(7)来分析原系统的混沌和次谐分岔。

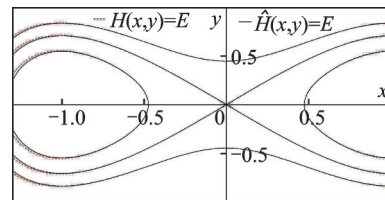


图4 哈密顿方程 $H(x, y) = E$ 和 $\hat{H}(x, y) = E$ 的相图

Fig. 4 Phase diagrams of Hamiltonian equations

$$H(x, y) = E \text{ and } \hat{H}(x, y) = E$$

2 悬臂梁碰撞系统的混沌

本节将基于文献[26]通过推导非光滑的Melnikov函数来分析非对称约束悬臂梁碰撞系统的混沌行为。首先,将系统(7)写为如下形式:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\hat{F}(x) + \varepsilon g(\dot{x}, t), & -d_2 < X_1 < d_1 \\ \dot{x}_+ = -R\dot{x}_-, & x = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (13)$$

式中 $g(\dot{x}, t) = -p\dot{x} + q\sin(\omega t)$; ϵ 为扰动参数, $0 < \epsilon \ll 1$; R 为碰撞恢复系数, $R = 1 - \epsilon r_0$, 其中 r_0 是一个可以大于 1 的较大参数。

将系统(13)写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) + \epsilon G(X, t), & -d_2 < X_1 < d_1 \\ X_+ = PX_-, & X_1 = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (14)$$

其中:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1 - \epsilon r_0) \end{bmatrix},$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} X_2 \\ -\hat{F}(X_1) \end{bmatrix}, G(X, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(X_2, t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

根据 Melnikov 理论首先给出关于系统(14)的几个假设:

条件(H1): $\epsilon = 0$ 时的未扰系统是哈密顿函数, 且具有连接在鞍点(0, 0)的同宿轨道 $X_h(t)$, 下标 h 表示质量块 M 静平衡位置与上、下约束面间的间隙;

条件(H2): 函数 F, G 足够光滑且有界, G 是具有周期 T 的函数。

由 Melnikov 理论可知, 对于足够小的扰动参数 ϵ , 扰动系统有唯一的双曲周期轨道。令 $X^{u,s}(t; t_0, \epsilon)$ 为扰动系统的唯一轨道, 其位于稳定流形 W_ϵ^s 和不稳定流形 W_ϵ^u 之间, 示意图如图 5 所示, W_0^u 是对应鞍点(0, 0)的不稳定流形, W_0^s 是对应鞍点(0, 0)的稳定流形, Σ_{t_0} 为 Poincare 截面。为了推导同宿混沌的 Melnikov 函数, 将轨道 $X^{u,s}(t; t_0, \epsilon)$ 展开为:

$$X^{u,s}(t; t_0, \epsilon) = X_h(t - t_0) + \epsilon X_{1,\pm}^{u,s}(t, t_0) + O(\epsilon^2) \quad (16)$$

并定义如下函数:

$$\nabla(t, t_0) = F(X_h(t - t_0)) \wedge [\epsilon T_{1,\pm}^{u,s} - X^s(t; t_0, \epsilon)] = \nabla_1^u(t, t_0) - \nabla_1^s(t, t_0) \quad (17)$$

式中 \wedge 表示楔积, 且:

$$\nabla_1^u(t, t_0) = \epsilon F(X_h(t - t_0)) \wedge X_{1,\pm}^u(t; t_0, \epsilon) \quad (18)$$

$$\nabla_1^s(t, t_0) = \epsilon F(X_h(t - t_0)) \wedge X_{1,\pm}^s(t; t_0, \epsilon) \quad (19)$$

令 $t_0 + T_{h,\pm}$ 和 $t_0 + T_{\pm}^{u,s}$ 分别为未扰轨道 $X_h(t - t_0)$ 和扰动轨道 $X^{u,s}(t; t_0, \epsilon)$ 到达约束面的时间, 其中 $T_{h,\pm}$ 和 $T_{\pm}^{u,s}$ 具有如下关系:

$$T_{\pm}^{u,s} = T_{h,\pm} + \epsilon T_{1,\pm}^{u,s} + O(\epsilon^2) \quad (20)$$

将 $t = t_0$ 代入式(17), 可得:

$$\begin{aligned} \nabla_1^u(t_0, t_0) - \nabla_1^s(t_0, t_0) = & [\nabla_1^u(t_0, t_0) - \nabla_1^u(t_0 + T_{h,+}, t_0)] + \\ & [\nabla_1^u(t_0 + T_{h,+}, t_0) - \nabla_1^u(t_0 + T_{h,-}, t_0)] + \\ & [\nabla_1^u(t_0 + T_{h,-}, t_0) - \nabla_1^u(-\infty, t_0)] + \\ & [\nabla_1^s(\infty, t_0) - \nabla_1^s(t_0, t_0)] \end{aligned} \quad (21)$$

为了计算式(21), 定义式(18)和(19)的导数为:

$$\dot{\nabla}_1^{u,s}(t, t_0) = \epsilon F(X_h(t - t_0)) \wedge G(X_h(t - t_0), t) \quad (22)$$

对式(22)关于时间 t 积分, 可得:

$$\begin{aligned} \nabla_1^u(t + t_0, t_0) = & \epsilon \int_{-\infty}^t F(X_h(\sigma)) \wedge G(X_h(\sigma), t_0 + \sigma) dt, t < T_-^u \\ -\nabla_1^s(t + t_0, t_0) = & \epsilon \int_t^{\infty} F(X_h(\sigma)) \wedge G(X_h(\sigma), t_0 + \sigma) dt, t > T_+^s \end{aligned} \quad (23)$$

将式(23)和(24)代入式(21)右边的未碰撞项, 可得:

$$\begin{aligned} & [\nabla_1^u(t_0, t_0) - \nabla_1^u(t_0 + T_{h,+}, t_0)] + \\ & [\nabla_1^u(t_0 + T_{h,+}, t_0) - \nabla_1^u(t_0 + T_{h,-}, t_0)] + \\ & [\nabla_1^s(\infty, t_0) - \nabla_1^s(t_0, t_0)] = \\ & \epsilon \int_{-\infty}^{T_{h,-}} F(X_h(\sigma)) \wedge G(X_h(\sigma), t_0 + \sigma) dt + \\ & \epsilon \int_{T_{h,+}}^{\infty} F(X_h(\sigma)) \wedge G(X_h(\sigma), t_0 + \sigma) dt \end{aligned} \quad (25)$$

对于式(21)右边的碰撞项, 经过复杂计算可得:

$$\begin{aligned} \nabla_1^u(t_0 + T_{h,+}, t_0) - \nabla_1^u(t_0 + T_{h,-}, t_0) = & \epsilon \left(-2r_0 \int_0^h -\hat{F}(x) dx \right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (26)$$

由式(25)和(26)可以得到同宿混沌的 Melnikov 函数为:

$$\begin{aligned} M(t_0) = & \epsilon \left[\int_{-\infty}^{T_{h,-}} X_{h_2}(\sigma) g(X_h(\sigma), t_0 + \sigma) dt + \right. \\ & \left. \int_{T_{h,+}}^{\infty} X_{h_2}(\sigma) g(X_h(\sigma), t_0 + \sigma) dt - \right. \\ & \left. 2r_0 \int_0^h -\hat{F}(x) dx \right] \end{aligned} \quad (27)$$

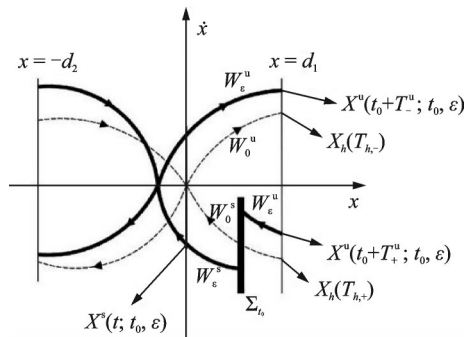


图 5 扰动系统(14)的稳定流形和不稳定流形

Fig. 5 The stable and unstable manifolds of perturbed system (14)

对于非对称约束系统(7), 需要分别计算左右两个同宿轨的 Melnikov 函数, 然后通过取交集来确定潜在的混沌区域。根据式(27), 系统(7)上侧约束同宿轨的 Melnikov 函数可以表示为:

$$M_1(t_0) = -\xi p \int y_h^2(t) dt + \xi q \int y_h(t) \sin[\omega(t+t_0)] dt - 2\xi r_0 \int_0^{d_1} (\tau x - \delta x^3) dx \quad (28)$$

式(28)可简化为:

$$M_1(t_0) = \xi(-pA_1 + qA_2 - r_0A_3) \quad (29)$$

其中:

$$A_1 = \int y_h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{-T_1} y_0^2(t) dt + \int_{T_1}^{\infty} y_0^2(t) dt = \frac{4\tau^2}{3\delta\sqrt{\tau}} \left[1 - \tanh^3(\sqrt{\tau} T_1) \right] \quad (30)$$

$$A_2 = \int y_h(t) \sin[\omega(t+t_0)] dt = 2\cos(\omega t_0)(Q_1 - Q_2) \quad (31)$$

其中:

$$\begin{cases} Q_1 = \cos(\omega T_1) \int_{T_1}^{\infty} y_0(t) \sin(\omega t) dt \\ Q_2 = \sin(\omega T_1) \int_{T_1}^{\infty} y_0(t) \cos(\omega t) dt \end{cases} \quad (32)$$

$$A_3 = 2 \int_0^{d_1} (\tau x - \delta x^3) dx = -\frac{\delta}{2} d_1^4 + \tau d_1^2 \quad (33)$$

同样地,下边约束同宿轨的 Melnikov 函数为:

$$M_2(t_0) = \xi(-pB_1 + qB_2 - r_0B_3) \quad (34)$$

其中:

$$\begin{cases} B_1 = \frac{4\tau^2}{3\delta\sqrt{\tau}} \left[1 - \tanh^3(\sqrt{\tau} T_2) \right] \\ B_2 = 2\cos(\omega t_0)(Q_3 - Q_4) \end{cases} \quad (35)$$

其中:

$$\begin{cases} Q_3 = \cos(\omega T_2) \int_{T_2}^{\infty} y_0(t) \sin(\omega t) dt \\ Q_4 = \sin(\omega T_2) \int_{T_2}^{\infty} y_0(t) \cos(\omega t) dt \end{cases} \quad (36)$$

$$B_3 = 2 \int_0^{d_2} (\tau x - \delta x^3) dx = -\frac{\delta}{2} d_2^4 + \tau d_2^2 \quad (37)$$

命题1:假设条件(H1)和(H2)成立,系统(7)产生同宿混沌的阈值条件为:

$$\begin{cases} 4q(Q_1 - Q_2) - (2\tau d_1^2 - \delta d_1^4)r_0 - 2pA_1 \geq 0 \\ 4q(Q_3 - Q_4) - (2\tau d_2^2 - \delta d_2^4)r_0 - 2pB_1 \geq 0 \end{cases} \quad (38)$$

证明:由式(29)和(34)可得命题1中的混沌阈值条件(38)。

3 悬臂梁碰撞系统的次谐分岔

3.1 次谐 Melnikov 函数

系统(14)的未扰系统为:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), & -d_2 < X_1 < d_1 \\ X_+ = -X_-, & X_1 = d_1 \text{ 或 } -d_2 \end{cases} \quad (39)$$

对于未扰系统(39),引入如下假设^[27]:

条件(D1):存在同宿轨把鞍点的稳定流形和不稳定流形连接在一起;

条件(D2):同宿轨道内存在一个中心,并存在围绕中心的周期轨道 $X^k(t)$,其中 \bar{k} 为椭圆模量。

假设扰动系统的次谐轨道是 $X^\varepsilon(t, t_0)$,其中 t_0 是初始时间或初相位。为推导 Melnikov 函数,将轨道 $X^\varepsilon(t, t_0)$ 对 ε 展开,可得:

$$X^\varepsilon(t, t_0) = X^k(t - t_0) + \varepsilon X^{(1)}(t, t_0) + O(\varepsilon^2) \quad (40)$$

对于轨道 $X^\varepsilon(t, t_0)$, m 阶亚谐共振条件为:

$$T_0 = mT \quad (41)$$

式中 T_0 为碰撞后内部轨道的周期; T 为激振力周期; m 为阶数。

类似于式(17),定义函数:

$$\Delta(t, t_0) = F[X^k(t - t_0)]X^\varepsilon(t, t_0) \quad (42)$$

根据图6,定义庞加莱截面 Σ_0 上起始点和返回点之间的距离为:

$$d = \Delta(t_0 + mT, t_0) - \Delta(t_0, t_0) \quad (43)$$

将式(41)代入式(43),可得:

$$d = \varepsilon[\Delta_1(t_0 + mT, t_0) - \Delta_1(t_0, t_0)] + O(\varepsilon^2) \quad (44)$$

其中:

$$\Delta_1(t, t_0) = F[X^k(t - t_0)]X^{(1)}(t, t_0) \quad (45)$$

由式(44)可定义次谐轨的 Melnikov 函数为:

$$M^m(t_0) = \Delta_1(t_0 + mT, t_0) - \Delta_1(t_0, t_0) = [\Delta_1(t_0 + mT, t_0) - \Delta_1(t_+^\varepsilon, t_0)] + [\Delta_1(t_+^\varepsilon, t_0) - \Delta_1(t_-^\varepsilon, t_0)] + [\Delta_1(t_-^\varepsilon, t_0) - \Delta_1(t_0, t_0)] \quad (46)$$

式中 t_\pm^ε 表示扰动轨道发生碰撞的时刻,显然有如下形式:

$$t_\pm^\varepsilon = t_\pm^k + \varepsilon t_{1,\pm} + O(\varepsilon^2) \quad (47)$$

为计算式(46)的未发生碰撞项,对式(45)进行求导,并对求导后的公式在区间 $[t_0, t_+^\varepsilon]$ 内积分,再将式(47)代入得到的积分式,最终可得:

$$\Delta_1(t_+^\varepsilon, t_0) - \Delta_1(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_+^\varepsilon} F[X^k(t - t_0)]G[X^k(t - t_0), t] dt \quad (48)$$

在区间 $[t_+^\varepsilon, t_0 + mT]$ 内积分,重复同样的操作,可得:

$$\Delta_1(t_0 + mT, t_0) - \Delta_1(t_+^\varepsilon, t_0) = \int_{t_+^\varepsilon}^{t_0 + mT} F[X^k(t - t_0)]G[X^k(t - t_0), t] dt \quad (49)$$

对于式(46)右侧的碰撞项,经过复杂计算可得:

$$\Delta_1(t_+^\varepsilon, t_0) - \Delta_1(t_-^\varepsilon, t_0) = 2\varepsilon r_0 \int_{x_{1\min}}^{d_1} f(x) dx + O(\varepsilon^2) \quad (50)$$

式中 $x_{1\min}$ 表示时间 $t=0$ 时位于未扰轨道上的点, $x_{1\min} = X_1^k(0)$ 。

将式(48)~(50)代入式(46),并略去无穷小量,可得:

$$M^m(t_0) \approx \int_{t_+^k}^{t_0+mT} F[X_+^k(t-t_0)]G[X_+^k(t-t_0),t]dt + \int_{t_0}^{t_+^k} F[X_-^k(t-t_0)]G[X_-^k(t-t_0),t]dt + 2r_0 \int_{x_{\min}}^{d_1} f(x)dx \quad (51)$$

此外, $X_{\pm}^k(t)$ 关于 x 对称且周期为 mT , 根据 $t_+^k = t_-^k$, 可得:

$$t_+^k - t_0 = t_-^k - t_0 = \frac{mT}{2} \quad (52)$$

变换积分时间 $t \rightarrow t + t_0$, 并将式(52)代入式(51), 可得 Melnikov 函数为:

$$M^m(t_0) = \int_{\frac{mT}{2}}^{mT} F[X_+^k(t)]G[X_+^k(t), t+t_0]dt + \int_0^{\frac{mT}{2}} F[X_-^k(t)]G[X_-^k(t), t+t_0]dt + 2r_0 \int_{x_{\min}}^{d_1} f(x)dx \quad (53)$$

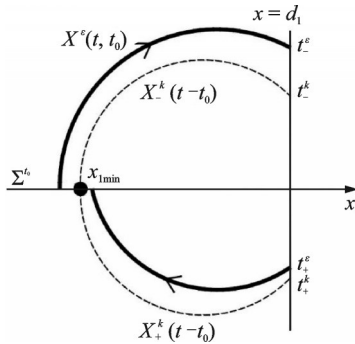


图 6 扰动系统(14)的次谐波轨道(虚线为未扰周期轨道)
Fig.6 The subharmonic orbit of perturbed system (14) (the dotted line is the periodic orbits of unperturbed system)

从图 4 中可以看出, 实线的同宿轨内部有左右两族次谐波轨道, 由于此处考虑的是内部的次谐波轨道, 所以只需研究单侧的次谐波轨道即可。不失一般性, 以右侧碰撞次谐波轨为例进行分析。

如果系统(7)没有发生碰撞, 那么未扰系统内部周期轨道的周期为 $T_{C,1} = 2\sqrt{2-k^2} K(\bar{k})$, 其中, \bar{k} 为雅可比椭圆函数的模, $0 < k < 1$, $K(\bar{k})$ 为第一类完全椭圆积分。

如果发生碰撞, 碰撞后内部轨道的周期为:

$$T_0 = T_{C,1} - T_{r,1} \quad (54)$$

式中 $T_{r,1}$ 为完整轨道在切换面右侧的穿越时间(即 $x > d_1$), 可以由以下碰撞条件来确定:

$$\left| x_1 \left(\frac{T_{C,1} - T_{r,1}}{2} \right) \right| = d_1 \quad (55)$$

将式(54)代入式(41), 可得:

$$2\sqrt{2-k^2} K(\bar{k}) - T_{r,1} = mT \quad (56)$$

将式(A3)代入式(55), 可得:

$$\left| \sqrt{\frac{2}{(2-k^2)}} dn \left(\frac{-T_{r,1}}{2\sqrt{2-k^2}}, \bar{k} \right) \right| = d_1 \quad (57)$$

根据式(56)和(57)可确定椭圆模量 k 的值。

将式(A3)代入式(53), 可得:

$$M^m(t_0) = -\xi p \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt + \xi q \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin[\omega(t+t_0)] dt - 2\xi r_0 \int_{x_{\min}}^{d_1} (\tau x - \delta x^3) dx = \xi [-pA + q \cos(\omega t_0) B - 2r_0 C] \quad (58)$$

其中:

$$A = \int_0^{\frac{mT}{2}} (y_{1,-}(t))^2 dt + \int_{\frac{mT}{2}}^{mT} (y_{1,+}(t))^2 dt \quad (59)$$

$$B = \int_0^{\frac{mT}{2}} y_{1,-}(t) \sin(\omega t) dt + \int_{\frac{mT}{2}}^{mT} y_{1,+}(t) \sin(\omega t) dt \quad (60)$$

$$C = \int_{x_{\min}}^{d_1} (\tau x - \delta x^3) dx \quad (61)$$

命题 2: 假设条件(D1)和(D2)成立, 系统(7)产生周期为 mT 的局部亚谐波轨道的阈值条件为:

$$qB - pA - 2r_0 C \geq 0 \quad (62)$$

证明: 由式(58)可得命题 2 中的次谐波阈值条件(62)。

3.2 次谐解的稳定性以及次谐解与混沌的关系

由于系统(7)为碰撞系统, 所以需要利用未发生碰撞时方程的线性化系统与碰撞恢复函数复合后的线性化矩阵 $A = \tilde{C}BCB$ 的特征值来判断其稳定性, 其中 B 和 \tilde{B} 为未发生碰撞时的方程的基解矩阵, C 为发生碰撞时的矩阵且 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix}$ 。

给定 $(x_{h_0}(t), y_{h_0}(t))$ 为未扰系统(8)的谐振轨道(即在周期 T_{h_0} 下的非平凡周期解), 这里的 h_0 满足 $T_{h_0} = \frac{2\pi m}{\omega}$ 。 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为 $(x_{h_0}(t), y_{h_0}(t))$ 邻域内的系统(7)的次谐解。类似于文献[28], 给定相同意义下的 $\Phi(t, t_0, \xi p, \xi q)$, 考虑 $\Phi(t, t_0, 0, 0)$ 处的线性化方程, 可得:

$$\ddot{x} + [\tau - 3\delta\Phi^2(t)]x - \xi p \dot{x} = 0 \quad (63)$$

设 $B(t, t_0, \xi p, \xi q) = \begin{bmatrix} b_{11}(t, t_0) & b_{21}(t, t_0) \\ b_{12}(t, t_0) & b_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$ 为线性化系统(63)的基解矩阵:

$$B(0, t_0, \xi p, \xi q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

注意到:

$$B(t, t_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} m_1(t) & \varphi_1(t) \\ m_2(t) & \varphi_2(t) \end{bmatrix} \quad (65)$$

其中:

$$m_1(t) = y'_{h_0} \cdot \frac{\partial x_h(t)}{\partial h} \Big|_{h=h_0}, m_2(t) = y'_{h_0} \cdot \frac{\partial y_h(t)}{\partial h} \Big|_{h=h_0} \quad (66)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{x'_{h_0}(t)}{x'_{h_0}(0)}, \varphi_2(t) = \frac{y'_{h_0}(t)}{y'_{h_0}(0)} \quad (67)$$

且:

$$m_1\left(\frac{2\pi m}{\omega}\right) = m_1(0) = 1, m_2(0) = 0 \quad (68)$$

方程(63)的特征乘子就是 $B\left(\frac{2\pi m}{\omega}, t_0, \xi p, \xi q\right)$ 的特征值, 因此, 碰撞系统线性化方程的特征乘子满足如下方程:

$$\sigma^2 - \text{Tr}A\left(\frac{2\pi m}{\omega}, t_0, \xi p, \xi q\right)\sigma + \det A\left(\frac{2\pi m}{\omega}, t_0, \xi p, \xi q\right) = 0 \quad (69)$$

命题 3: 给定 $\varepsilon > 0$ 且 ε 足够小, $p > 0, q > 0$, $\Phi(t, t_0, \xi p, \xi q) = (\Phi_1(t, t_0), \Phi_2(t, t_0))$ 是系统(7)的周期解, $|\sigma_1| \leq |\sigma_2|$ 是其特征乘子, 存在 t_0 使得 $M^m(t_0) = 0$, 那么有如下情况:

(1) 如果 $\frac{\partial}{\partial t} M^m(t_0) > 0$, 那么要么 $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, 此时不动点为稳定结点; 要么 σ_1, σ_2 为复数且 $|\sigma_1| = |\sigma_2| < 1$, 此时不动点为稳定焦点。

(2) 如果 $\frac{\partial}{\partial t} M^m(t_0) < 0$, 那么 $0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2$, 此时不动点为鞍点。

(3) 如果 $\frac{\partial}{\partial t} M^m(t_0) = 0$ 且 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} M^m(t_0) \neq 0$, 那么其中有一个特征乘子为 1。

接下来, 对有关系统(7)的混沌和次谐波解的关系, 给出如下备注:

备注: 次谐 Melnikov 函数(58)和混沌 Melnikov 函数(28)有如下关系:

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ -\xi p \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt + \right. \\ & \xi q \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin[\omega(t+t_0)] dt - \\ & \left. 2\xi r_0 \int_{x_{\min}}^{d_1} (\tau x - \delta x^3) dx \right\} = -\xi p \int y_h^2(t) dt + \\ & \xi q \int y_h(t) \sin[\omega(t+t_0)] dt - \\ & 2\xi r_0 \int_0^{d_1} (\tau x - \delta x^3) dt \end{aligned} \quad (70)$$

由式(70)可猜想到系统(7)可能通过无限次的

次谐分岔通向混沌。

4 数值模拟

首先分析系统(2)的混沌, 选取系统的一组参数 $\tau = 1, \delta = 1, d_1 = 1, d_2 = 1.1, \xi = 0.1$, 根据命题 1 得到如图 7 所示的混沌阈值, 该阈值用来预测原系统(2)的混沌。从图 7 中可以看出, 当 (p, r_0, q) 落在曲面围成的上侧区域时, 原系统(2)将产生混沌。此外, 图 7 还表明随着激振频率 ω 的减小, 混沌区域逐渐增大。不失一般性, 以图 7 中 $\omega = 1.5$ 为例探讨原系统(2)的混沌。取 Poincaré 截面 $\sigma = \{(x, \dot{x}, \theta) \in R^2 \times S | x = d_1, \dot{x} = \dot{x}_+\}$ 。在混沌区域取一点(4, 3, 8), 得到如图 8 和 9 所示的混沌。

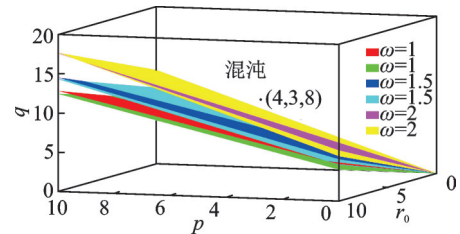
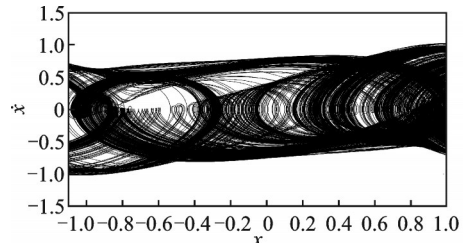


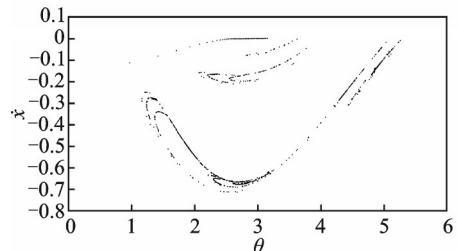
图 7 系统(7)的混沌阈值

Fig. 7 Chaotic thresholds of system (7)



(a) 原相图

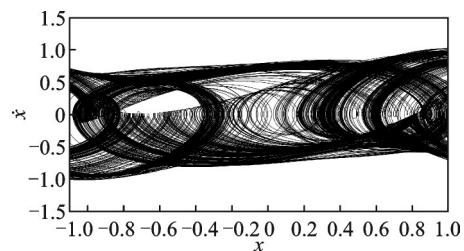
(a) The original phase portrait



(b) 对应的庞加莱截面图

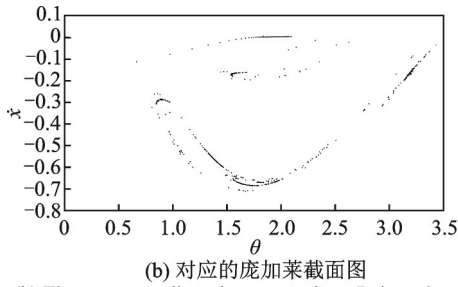
(b) The corresponding phase portrait on Poincaré section

图 8 初值取(1, -0.1)时得到的原系统(2)的混沌
Fig. 8 The chaos of original system (2) with initial value (1, -0.1)



(a) 原相图

(a) The original phase portrait



(b) 对应的庞加莱截面图
(b) The corresponding phase portrait on Poincaré section

图 9 初值取(1, -0.1)时得到的近似系统(7)的混沌
Fig. 9 The chaos of approximate system (7) with initial value (1, -0.1)

下面分析阻尼、碰撞恢复系数和激励幅值对混沌的影响。将图 7 的混沌阈值投影到 (p, q) 平面, 得到随碰撞恢复系数 r_0 变化的混沌阈值, 如图 10 所示。从图 10 中可以看出, 随着碰撞恢复系数 R 的增大(即 r_0 的减小), 混沌区域增大, 这表明增大碰撞恢复系数更容易诱发混沌。

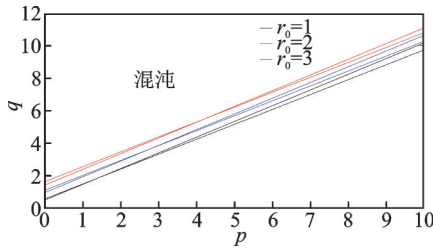


图 10 混沌阈值随阻尼 p 和激励幅值 q 的变化

Fig. 10 Variations of chaotic thresholds with the damping p and the excitation amplitude q

将图 7 的混沌阈值投影到 (r_0, q) 平面, 得到随阻尼 p 变化的混沌阈值, 如图 11 所示。从图 11 中可以看出, 随着阻尼 p 的减小, 混沌区域增大, 这表明减小阻尼更容易诱发混沌。

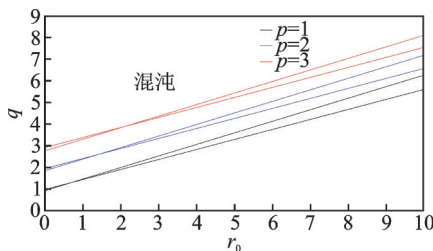


图 11 混沌阈值随碰撞恢复系数 r_0 和激励幅值 q 的变化

Fig. 11 Variations of chaotic thresholds with the impact recovery coefficient r_0 and the excitation amplitude q

将图 7 的混沌阈值投影到 (r_0, p) 平面, 得到随激励幅值 q 变化的混沌阈值, 如图 12 所示。从图 12 中可以看出, 随着激励幅值增大, 混沌区域增大, 这表明增大激励幅值更容易诱发混沌。

接下来分析系统(2)的次谐分岔, 选取系统的另一组参数 $\omega = 1, \tau = 1, \delta = 1, d_1 = 1, d_2 = 1.1, \xi = 0.1$, 根据命题 2 得到如图 13 所示的次谐分岔阈值,

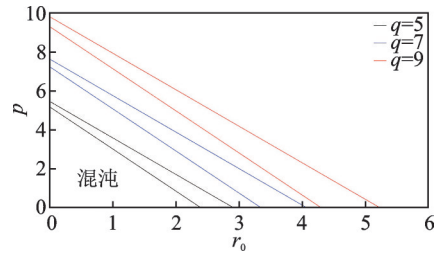


图 12 混沌阈值随碰撞恢复系数 r_0 和阻尼 p 的变化

Fig. 12 Variations of chaotic thresholds with the impact recovery coefficient r_0 and the damping p

该阈值用来预测原系统(2)的次谐解。从图 13 中可以看出, 当 (p, r_0, q) 落在曲面的上侧区域时, 原系统(2)将产生次谐解; 此外, 随着激振频率的增加, 次谐解的区域逐渐增大。不失一般性, 以图 13 中 $\omega = 1$ 为例探讨原系统(2)的次谐解。在次谐解区域取两点 $(4.3, 4.3, 5.9)$ 和 $(5, 5, 6.6)$, 得到如图 14~17 所示的次谐相图和庞加莱截面图。对比图 14 和 15 以及图 16 和 17 可以看出, 原系统和近似系统的次谐解吻合很好, 这进一步说明了基于近似系统分析原系统的次谐解的有效性。为了方便表示系统的碰撞次谐解, 用 (a, b) 表示其不同周期的状态, 这里 a 表示激励次数, b 表示与右边界碰撞次数。

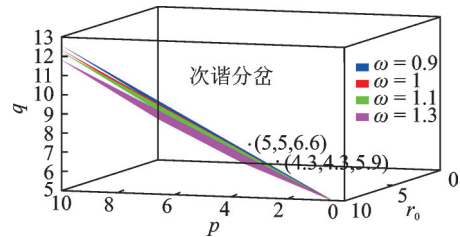
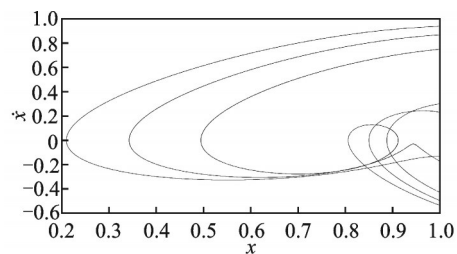
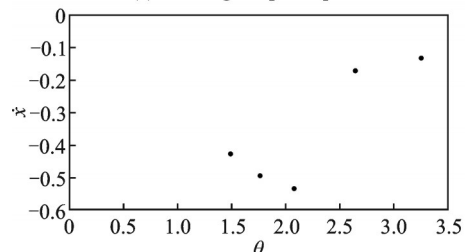


图 13 系统(7)的次谐分岔阈值

Fig. 13 Subharmonic bifurcation thresholds of system (7)

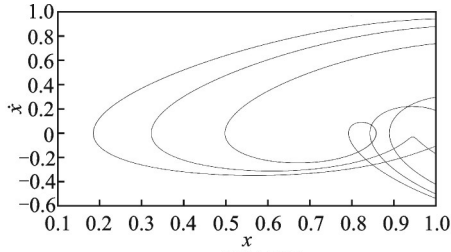


(a) 原相图
(a) The original phase portrait

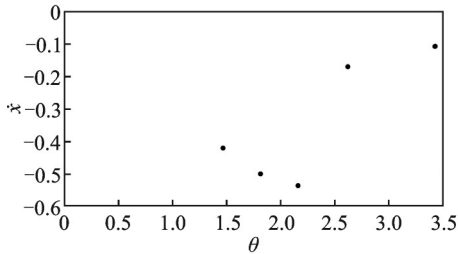


(b) 对应的庞加莱截面图
(b) The corresponding phase portrait on Poincaré section

图 14 对应点 $(4.3, 4.3, 5.9)$ 的原系统(2)的 $(6, 5)$ 次谐解
Fig. 14 $(6, 5)$ subharmonic solution of original system (2) corresponding to point $(4.3, 4.3, 5.9)$

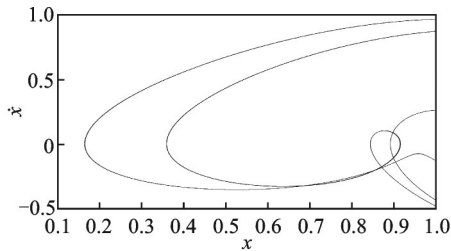


(a) 近似相图
(a) The approximate phase portrait

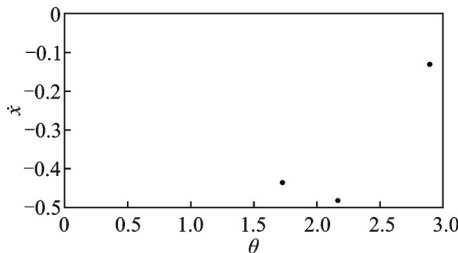


(b) 对应的庞加莱截面图
(b) The corresponding phase portrait on Poincaré section

图 15 对应点(4.3, 4.3, 5.9)的近似系统(7)的(6,5)次谐波
Fig. 15 (6, 5) subharmonic solution of approximate system (7) corresponding to point (4.3, 4.3, 5.9)



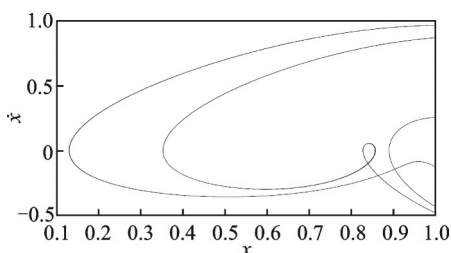
(a) 原相图
(a) The original phase portrait



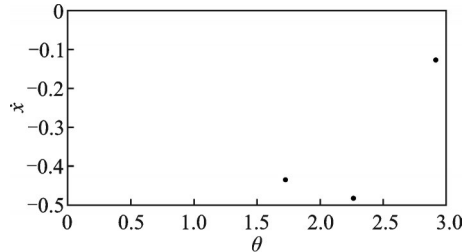
(b) 对应的庞加莱截面图
(b) The corresponding phase portrait on Poincaré section

图 16 对应点(5, 5, 6.6)的原系统(2)的(4,3)次谐波
Fig. 16 (4, 3) subharmonic solution of original system (2) corresponding to point (5, 5, 6.6)

下面分析阻尼、碰撞恢复系数和激励幅值对次谐波分岔的影响。将图 13 的次谐波分岔阈值投影到 (p, q) 平面, 得到随碰撞恢复系数 R 变化的次谐波



(a) 近似相图
(a) The approximate phase portrait



(b) 对应的庞加莱截面图
(b) The phase portrait on Poincaré section

图 17 对应点(5, 5, 6.6)的近似系统(7)的(4,3)次谐波
Fig. 17 (4, 3) subharmonic solution of approximate system (7) corresponding to point (5, 5, 6.6)

分岔, 如图 18 所示。从图 18 中可以看出, 随着碰撞恢复系数 R 的减小, 次谐波区域减小, 这表明增大碰撞恢复系数更容易诱发次谐波分岔。

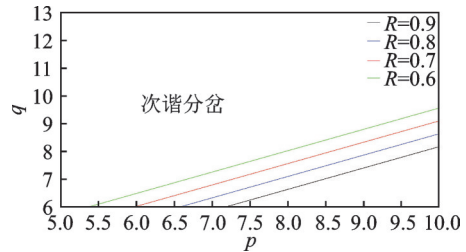


图 18 次谐波分岔阈值随阻尼 p 和激励振幅 q 的变化
Fig. 18 Variations of subharmonic bifurcation thresholds with the damping p and the excitation amplitude q

将图 13 的次谐波分岔阈值投影到 (r_0, p) 平面, 得到随激励振幅 q 变化的次谐波分岔阈值, 如图 19 所示。从图 19 中可以看出, 随着激励振幅的增大, 次谐波区域增大, 这表明增大激励振幅更容易诱发次谐波分岔。

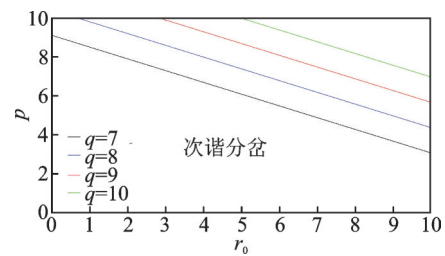


图 19 次谐波分岔阈值随碰撞恢复系数 r_0 和阻尼 p 的变化
Fig. 19 Variations of subharmonic bifurcation thresholds with the impact recovery coefficient r_0 and the damping p

将图 13 的次谐波分岔阈值投影到 (r_0, q) 平面, 得到随阻尼 p 变化的次谐波分岔阈值, 如图 20 所示。从图 20 中可以看出, 随着阻尼的减小, 次谐波区域增大, 这表明减小阻尼更容易诱发次谐波分岔。

接下来选取系统的一组参数 $m=1, \omega=1, \xi p=0.4, \xi q=0.3, \xi r_0=0.2$, 根据命题 3 来分析次谐波的稳定性。从图 21 中可以看到, $M^1(t_0)=0$ 有两个简单解, 这里 $0 < t_1 < t_2 < 2\pi/\omega$, 也就是说系统(7)有两

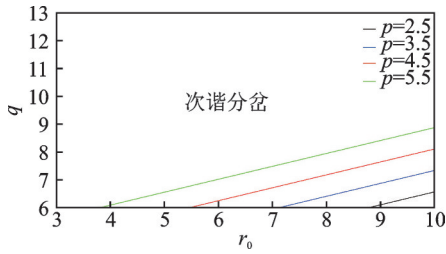


图 20 次谐分岔阈值随碰撞恢复系数 r_0 和激励振幅 q 的变化
Fig. 20 Variations of subharmonic bifurcation thresholds with the impact recovery coefficient r_0 and the excitation amplitude q

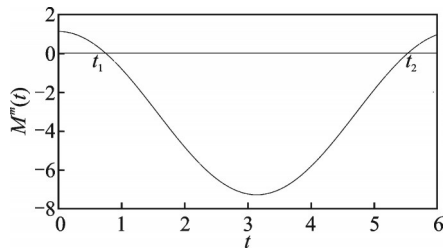


图 21 $M^m(t)$ 的图像 ($m=1$)
Fig. 21 The image of $M^m(t)$ at $m=1$

对次谐解。显然 $\Phi(t, t_1, \xi p, \xi q)$ 是系统 (7) 的非稳定次谐解; $\Phi(t, t_2, \xi p, \xi q)$ 是系统 (7) 的稳定次谐解。

接下来,取 $\omega=1$, 分别给出 $m=1$ 和 $m=3$ 的次谐阈值面以及混沌阈值面,如图 22 所示。从图 22 中可以看出,随着 m 的增大,次谐阈值面不断接近混沌阈值面。给定初值 $(1, -0.1)$, 上、下间隙分别取为 $-1.1, 1$, 在次谐阈值面和混沌阈值面之间取点 A $(4.6, 4.6, 5.75)$, B $(4.6, 4.6, 5.79)$ 和 C $(4.6, 4.6, 5.815)$, 并在混沌阈值面的上面取点 D $(4.6, 4.6, 6.2)$, 得到如图 23 所示的次谐解和混沌。从图 23 中可以看出,随着参数激励振幅 q 的增大,系统逐渐由周期解倍化导向混沌,数值结果间接验证了式 (70) 的正确性。

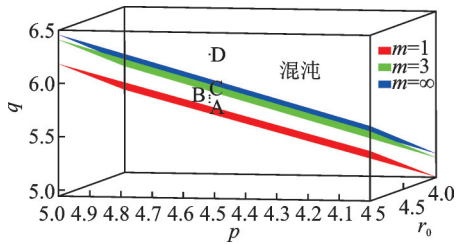
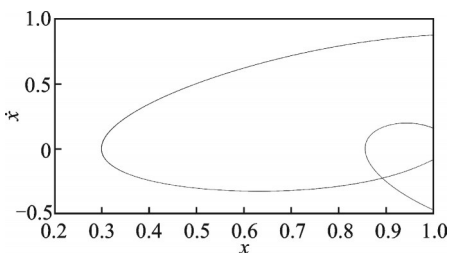
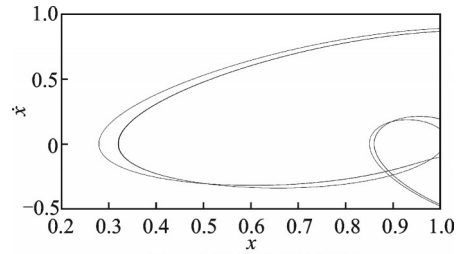


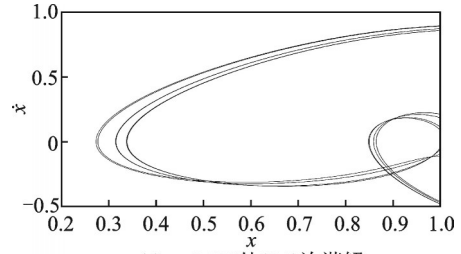
图 22 $m=1, m=3$ 和 $m=\infty$ 时的次谐分岔阈值
Fig. 22 Subharmonic bifurcation thresholds for $m=1$ and $m=3$ and $m=\infty$



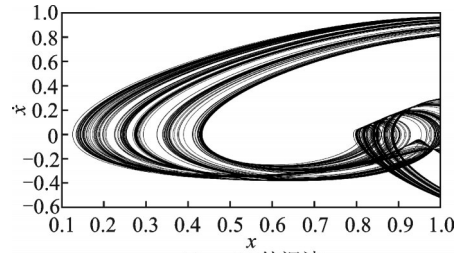
(a) $q=5.75$ 处 $(2,2)$ 次谐解
(a) $(2,2)$ subharmonic solutions at $q=5.75$



(b) $q=5.79$ 处 $(4,4)$ 次谐解
(b) $(4,4)$ subharmonic solutions at $q=5.79$



(c) $q=5.815$ 处 $(8,8)$ 次谐解
(c) $(8,8)$ subharmonic solutions at $q=5.815$



(d) $q=6.2$ 处混沌
(d) chaos at $q=6.2$

图 23 激励振幅 q 对原系统 (2) 的次谐解和混沌关系的影响
Fig. 23 Influences of the excitation amplitude q on relations between subharmonic bifurcation and chaos of original system (2)

5 结 论

本文研究了双侧非对称刚性约束下附加斜弹簧支撑的悬臂梁碰撞系统的混沌和次谐分岔。确立了碰撞系统发生同宿混沌和次谐分岔的条件。讨论了阻尼、激励频率、激励幅值以及碰撞恢复系数对混沌和次谐分岔的影响。结果表明:减小阻尼、增大碰撞恢复系数、增大激励频率和振幅更容易诱发混沌和次谐分岔。而且近似系统与原系统的混沌和次谐分岔分析结果具有较好的一致性,说明近似系统用于分析悬臂梁碰撞系统的混沌和次谐分岔是有效的。此外,给出了碰撞次谐轨道的稳定性条件,并揭示了次谐分岔通向混沌的路径。

参考文献:

[1] Zhang X M, Cao Z B, Li D H, et al. Quasi-periodic solutions and homoclinic bifurcation in an impact inverted pendulum[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2022, 434: 133210.
[2] Lyu Xiaohong, Shi Yuqing, Luo Guanwei. Two-param-

- eter non-smooth bifurcations of period-one motions in a plastic impacting oscillator[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, 138: 103849.
- [3] Li G F, Wu S P, Wang H B, et al. Global dynamics of a non-smooth system with elastic and rigid impacts and dry friction[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 95: 105603.
- [4] Zhang Wen, Li Qunhong, Meng Zhongchuan. Complex bifurcation analysis of an impacting vibration system based on path-following method[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2021, 133: 103715.
- [5] Li G L, Yue Y, Xie J H, et al. Strange nonchaotic attractors in a nonsmooth dynamical system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, 78: 104858.
- [6] 蒋贵荣, 刘期怀, 龙腾飞, 等. 脉冲动力系统的分岔混沌理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [7] Yin S, Ji J C, Deng S N, et al. Degenerate grazing bifurcations in a three-degree-of-freedom impact oscillator[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(1): 525-539.
- [8] Feng Jinqian, Liu Junli. Chaotic dynamics of the vibro-impact system under bounded noise perturbation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2015, 73: 10-16.
- [9] Zhang Yongxiang, Luo Guanwei. Multistability of a three-degree-of-freedom vibro-impact system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 57: 331-341.
- [10] Molyneux W G. Supports for vibration isolation[R]. London: Her Majesty's Stationery Office, 1957.
- [11] Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, et al. Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics[J]. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2006, 74(4): 046218.
- [12] Ding Hu, Lu Zeqi, Chen Liqun. Nonlinear isolation of transverse vibration of pre-pressure beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 442: 738-751.
- [13] Zhou J, Wang X, Xu D, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam-roller-spring mechanisms[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 346: 53-69.
- [14] Yang Tao, Cao Qingjie. Novel multi-stable energy harvester by exploring the benefits of geometric nonlinearity[J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2019, 2019(3): 033405.
- [15] Zhu G N, Liu J Y, Cao Q J, et al. A two degree of freedom stable quasi-zero stiffness prototype and its applications in aseismic engineering[J]. *Science China Technological Sciences*, 2020, 63(3): 496-505.
- [16] Lu Z Q, Yang T J, Brennan M J, et al. Experimental investigation of a two-stage nonlinear vibration isolation system with high-static-low-dynamic stiffness[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, 84(2): 021001.
- [17] Valeev A, Zotov A, Kharisov S. Designing of compact low frequency vibration isolator with quasi-zero-stiffness[J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2015, 34(4): 459-473.
- [18] Kukučka P. Melnikov method for discontinuous planar systems[J]. *Nonlinear Analysis: an International Multidisciplinary Journal*, 2007, 66(12): 2698-2719.
- [19] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, et al. Piecewise linear approach to an archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2008, 366(1865): 635-652.
- [20] Tian R L, Zhou Y F, Wang Y Z, et al. Chaotic threshold for non-smooth system with multiple impulse effect[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(3): 1849-1863.
- [21] Li S B, Shen C, Zhang W, et al. Homoclinic bifurcations and chaotic dynamics for a piecewise linear system under a periodic excitation and a viscous damping[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(4): 2395-2406.
- [22] Li S B, Shen C, Zhang W, et al. The Melnikov method of heteroclinic orbits for a class of planar hybrid piecewise-smooth systems and application[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(2): 1091-1104.
- [23] Zhou Biliu, Jin Yanfei, Xu Huidong. Subharmonic resonance and chaos for a class of vibration isolation system with two pairs of oblique springs[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 108: 427-444.
- [24] 张思进, 文桂林, 王紫业, 等. 碰撞准哈密顿系统局部亚谐轨道的Melnikov方法[J]. *振动工程学报*, 2016, 29(2): 214-219.
- Zhang Sijin, Wen Guilin, Wang Jinye, et al. The Melnikov's method for local-subharmonic orbits of a vibro-impact quasi-Hamiltonian system[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(2): 214-219.
- [25] 张笑云. 附加负刚度支撑对梁振动的被动控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.
- Zhang Xiaoyun. Study on passive control of vibration of beam with additional negative stiffness supports[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2020.
- [26] Xu Wei, Feng Jinqian, Rong Haiwu. Melnikov's method for a general nonlinear vibro-impact oscillator[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, 71(1-2): 418-426.
- [27] Li Shuangbao, Ran Sun. Melnikov analysis of subharmonic motions for a class of bistable vibro-impact oscillators[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111: 1047-1069.
- [28] Zhou Liangqiang, Chen Fangqi, Zhao Ziman. Subharmonic bifurcation and chaos of a carbon nanotube supported by a Winkler and Pasternak foundation[J]. *International Journal of Modern Physics B: Condensed Matter Physics, Statistical Physics, Applied Physics*, 2019, 33(19): 1950207.

Global dynamics for an impacting system of cantilever beam supported by oblique springs

ZHANG Yi-feng¹, XU Hui-dong², ZHANG Jian-wen¹

(1. College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China;

2. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: In this paper, the global dynamics of chaos and subharmonic bifurcation of an impacting system of cantilever beam supported by oblique springs under bilateral asymmetric rigid constraints are studied. It is difficult to study analytically the chaos and subharmonic bifurcation of the system because the stiffness term of the oblique spring support structure is a transcendental function. To do this, the stiffness term of the system is fitted by the approximation method, and the homoclinic orbit and its internal orbits of the approximate system are compared with the orbits of the original system. The threshold conditions for homoclinic chaos and subharmonic bifurcation are presented by applying the Melnikov method to the non-smooth impacting cantilever beam system. Moreover, the stability of the impacting subharmonic orbit is analyzed by combining characteristic multipliers of smooth manifolds with impact function, and the relationship between subharmonic bifurcation and chaos is analyzed. The effects of damping, excitation frequency, excitation amplitude and impact coefficient of restitution on chaos and subharmonic bifurcation are studied based on threshold conditions, which further verify the theoretical analysis.

Key words: nonlinear vibration; cantilever beam with impact; homoclinic chaos; subharmonic bifurcation; Melnikov method

作者简介: 张绎洋(1999—),男,硕士研究生。E-mail:zyfzyf0119@163.com。

通讯作者: 徐慧东(1978—),男,博士,副教授。E-mail:xhd0931@126.com。

附 录:

由 $H(x, y) = 0$, 推导出未扰系统(7)的同宿轨道为:

$$(x_i(t), y_i(t)) = \begin{cases} \begin{cases} x_0(t + T_1), y_0(t + T_1), & t > 0 \\ x_0(t - T_1), y_0(t - T_1), & t < 0 \end{cases}; & x \in (0, d_1) \\ \begin{cases} x_0(t + T_2), y_0(t + T_2), & t > 0 \\ x_0(t - T_2), y_0(t - T_2), & t < 0 \end{cases}; & x \in (-d_2, 0) \end{cases} \quad (\text{A1})$$

其中:

$$\begin{cases} x_0(t) = \pm \sqrt{\frac{2\tau}{\delta}} \operatorname{sech}(\sqrt{\tau} t) \\ y_0(t) = \pm \tau \sqrt{\frac{2}{\delta}} \operatorname{sech}(\sqrt{\tau} t) \tanh(\sqrt{\tau} t) \\ T_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{arcsech}\left(\sqrt{\frac{\delta}{2\tau}} d_1\right) \\ T_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{arcsech}\left(\sqrt{\frac{\delta}{2\tau}} d_2\right) \end{cases} \quad (\text{A2})$$

式中 T_1, T_2 分别表示同宿轨道到达两侧约束面发生碰撞的时间。

由 $H(x, y) = c$ 可得同宿轨道内部的周期轨道的表达式为:

$$\Omega_c = \begin{cases} \begin{cases} x_{1,-}(t) = \sqrt{\frac{2}{(2-\bar{k}^2)}} \operatorname{dn}\left(\frac{t - T_{c,1}}{2}, \bar{k}\right) \\ y_{1,-}(t) = -\sqrt{2} \frac{\bar{k}^2}{2-\bar{k}^2} \operatorname{sn}\left(\frac{t - T_{c,1}}{2}, \bar{k}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{t - T_{c,1}}{2}, \bar{k}\right) \end{cases}, & t \in \left[0, \frac{mT}{2}\right) \\ \begin{cases} x_{1,+}(t) = x_{1,-}(t + T_{r,1}) \\ y_{1,+}(t) = y_{1,-}(t + T_{r,1}) \end{cases}, & t \in \left[\frac{mT}{2}, mT\right) \end{cases} \quad (\text{A3})$$

式中 $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ 为雅可比椭圆函数。