

带支撑六参阻尼器隔震结构基于李鸿晶谱的 简明解法研究

韩红, 邹万杰, 李创第, 葛新广, 经承贵

(广西科技大学土木工程学院, 广西柳州 545006)

摘要: 考虑带支撑六参数黏弹性阻尼器耗能隔震结构在李鸿晶谱激励下求解地震响应较为复杂, 提出了一种能够获得随机地震响应的简明解法。采用带支撑六参数黏弹性阻尼器分析模型, 以微分本构方程实现黏弹性阻尼器隔震结构的数学建模, 结合复模态法与虚拟激励法, 获得了隔震体系系列响应(位移、速度以及阻尼器受力)频域解的统一表达式; 以李鸿晶谱作为激励功率谱, 将激励功率谱与结构频率响应特征值函数进行简化, 获得了该随机激励下系统响应功率谱、响应谱矩及响应方差的简明解; 给出算例, 与此类问题传统的常用分析方法进行对比, 验证所提方法在该系统下分析动力响应的合理性和高效性, 并讨论了不同支撑刚度对阻尼器减震效果的影响。

关键词: 隔震体系; 带支撑六参数黏弹性阻尼器; 李鸿晶谱; 响应谱矩; 响应方差

中图分类号: TU352.1; TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)08-1397-12

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.08.014

引言

减隔震作为一种有效的被动控制手段已广泛应用于桥梁、铁路、建筑结构等土木工程领域^[1-3]。隔震技术是在建筑物底部或者层间设置隔震装置^[4](由隔震器、阻尼器装置等组成), 延长结构的自振周期, 从而进一步减小结构的动力响应。阻尼器安装在不同位置, 可以达到设计的不同目的^[5-7]。在基础隔震层设置黏弹性阻尼器, 依靠黏弹性材料的滞回耗能特性, 阻尼器能够充分发挥耗能作用为结构提供附加刚度和阻尼, 消耗了输入到结构中的大部分地震能量, 能够有效地保护结构主体, 起到减小地震响应的目的^[8-9]。

为能够精确描述黏弹性阻尼器的力学关系, 许多学者提出了多种恢复力模型, 这其中包括: Maxwell 模型^[7]、Kelvin 模型^[10-11]、分数导数模型^[12]、标准线性固体模型^[13]、广义 Maxwell 模型^[14], 以及 Mazza 等^[15]提出的六参数黏弹性阻尼器模型等。而六参数黏弹性阻尼器模型本构方程易于扩阶, 模型计算参数便于与实验数据拟合, 更具有普适性。阻尼器常通过耗能支撑连接于建筑结构, 支撑是保证结构有效耗能的重要构件, 随着阻尼器在结构抗风、抗震等

项目上应用的发展, 在很多结构上已经采用了不同安装方式以组成不同类型的安置模型, 有对角支撑、人字型支撑、剪刀式支撑等, 阻尼器和支撑装置起到了很好的消能减震作用^[16-17]。

在随机振动分析中一般以功率谱密度函数作为分析地震地面运动的随机模型^[18-19]。工程中常用的地震动随机激励模型有白噪声模型^[19]、Kanai-Tajimi 模型^[20]、李鸿晶模型^[21]等。白噪声模型不考虑场地类别等其他因素的影响, 数学表达式简洁, 容易获得协方差函数, 但将谱参数值恒等于一个常数, 并不能准确反映地震动的频谱特征。Kanai-Tajimi 模型在零频处无界且低频段夸大了频域能量分布, 导出的均方速度和均方位移无界, 只适用于中高频结构地震响应分析^[22]。李鸿晶等提出了一种改进的功率谱模型, 修正了金井清模型在零频处存在的奇异点, 既能够控制低频又能够抑制高频的能量分布, 且满足两次可积的条件, 导出的均方速度和均方位移均有界^[21], 故以该谱分析随机地震响应具有很好的工程应用价值。

目前, 国内外应用的结构抗震设计方法是基于振型叠加的反应谱法。对于设置了阻尼器的隔震结构, 由于隔震体系阻尼分布具有明显的非比例特征, 得到的耗能隔震结构的振型不交, 用现有方法

收稿日期: 2022-09-17; **修订日期:** 2023-02-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51468005); 广西研究生教育创新计划项目(YCSW2022450); 广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2019KY0387); 广西自然科学基金资助项目(2019GXNSFBA245071); 广西科技基地和人才专项(AD19245131)。

无法将结构响应精确分解为各响应模态的线性组合,因此无法建立精确的设计反应谱^[23]。而复模态法作为时域分析地震响应的常用方法可以将非比例系统精确解耦为独立的复模态变量方程^[19,24],虚拟激励法^[25]和传递函数法^[7]作为频域分析的两种代表性方法,计算所得响应谱矩表达式含积分项,需逐步积分计算确定响应谱矩值,导致计算结果不稳定。

无论是时域法还是频域法,以李鸿晶谱作为结构响应分析的激励功率谱,均较难获得响应谱矩解。因此,本文提出了一种简明的算法:首先,构建带支撑阻尼器隔震结构的运动方程,利用复模态法、虚拟激励法得到系统响应频域解的统一表达式;其次,通过简化李鸿晶谱与结构频率响应特征值函数获得响应功率谱、响应谱矩和响应方差的解析表达式,将其与传统的响应分析方法如虚拟激励法进行对比,验证了系统响应功率谱及0~2阶谱矩公式推导的合理性。

1 隔减震体系运动方程

1.1 结构运动方程

如图1所示为基础隔震层设置了带支撑六参数黏弹性阻尼器的n层建筑。图中 m_t, c_t, k_t 为基础隔震层的质量、阻尼和刚度; m_o, c_o, k_o 为上部结构的质量、阻尼和刚度矩阵; $x_t, \dot{x}_t, \ddot{x}_t$ 为隔震层相对于地面的位移、速度和加速度; $x_o, \dot{x}_o, \ddot{x}_o$ 为上部结构相对于隔震层的位移、速度和加速度列向量。在地震动 $\ddot{x}_g(t)$ 作用下建立运动方程为:

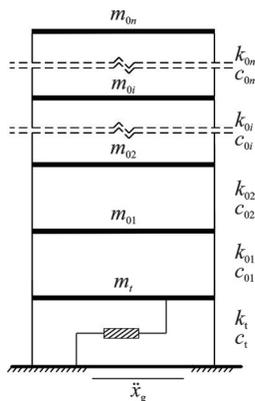


图1 隔减震体系计算简图

Fig.1 Calculation diagram of seismic vibration isolation system

$$m_o \ddot{x}_o + c_o \dot{x}_o + k_o x_o = -m_o I_0 (\ddot{x}_g + \ddot{x}_t) \quad (1)$$

$$M_0 (\ddot{x}_g + \ddot{x}_t) + I_0^T m_o \ddot{x}_o + c_t \dot{x}_t + k_t x_t + P_G(t) = 0 \quad (2)$$

式中 $M_0 = m_t + \sum_{i=1}^n m_{oi}$, $x_0 = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, $I_0 = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ 。

引入状态向量 $x = [x_t \ x_o^T]^T$, 将式(1), (2)整理成为一个运动方程:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x + I P_G(t) = -M_s \ddot{x}_g(t) \quad (3)$$

式中 $I = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$; $M_s = [M_0 \ m_{o1} \ \dots \ m_{on}]^T$;

$$M = \begin{bmatrix} m_t & m_{o1} & \dots & m_{on} \\ m_{o1} & m_{o1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{on} & & & m_{on} \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} k_t & & & \\ & k_{o1} + k_{o2} & -k_{o2} & \\ & -k_{o2} & & \\ & & & k_{on} \end{bmatrix}。$$

1.2 带支撑六参数黏弹性阻尼器的等效本构关系

六参数黏弹性阻尼器由弹簧单元、黏壶单元和2支标准Maxwell阻尼器并联组成,该模型能够反映材料的应力松弛规律和蠕变特性,本构方程易于扩阶,模型计算参数便于与实验数据进行拟合。在实际工程中,阻尼器往往需要与支撑串联安装,支撑刚度对结构减震效果有着明显的影响,因此考虑支撑刚度更加符合实际。将阻尼器与支撑串联设置在隔震层,建立等效阻尼器计算模型^[17]如图2所示。

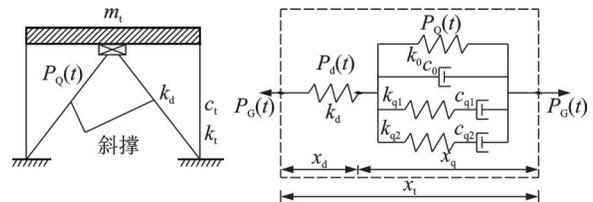


图2 隔震层处带支撑六参数黏弹性阻尼器计算模型

Fig.2 Calculation model of six-parameter viscoelastic damper with support at isolation layer

等效后,由力的平衡关系可得:

$$P_d(t) = k_d x_d \quad (4)$$

$$P_Q(t) = k_o x_q + c_o \dot{x}_q + p_1 + p_2 \quad (5)$$

$$P_G(t) = P_d(t) = P_Q(t) \quad (6)$$

式中 P_d 为支撑阻尼器的阻尼力; P_Q 为六参数阻尼器的阻尼力; p_1, p_2 分别为六参数阻尼器中的两个分支标准Maxwell阻尼器的阻尼力; k_o, c_o 为该阻尼器的平衡刚度和阻尼。

两分支标准Maxwell阻尼器的本构关系为:

$$p_1 + t_1 \dot{p}_1 = c_{q1} \dot{x}_q \quad (7)$$

$$p_2 + t_2 \dot{p}_2 = c_{q2} \dot{x}_q \quad (8)$$

式中 t_1, t_2 为两个分支标准Maxwell阻尼器的松弛时间。其中, $t_1 = c_{q1}/k_{q1}$, $t_2 = c_{q2}/k_{q2}$ 。

等效后,阻尼器位移、隔震层位移以及支撑位移之间存在:

$$x_q = x_t - x_d \quad (9)$$

由式(4),(6)和(9),得阻尼器位移为:

$$x_q = x_1 - P_G(t)/k_d \quad (10)$$

2 隔减震系统响应的频域统一解

2.1 复模态解耦

引入状态变量,令其为:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{x}^T \quad \dot{\mathbf{x}}^T \quad P_G \quad p_1 \quad p_2]^T \quad (11)$$

将式(11)的矩阵形式写为:

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{y} = \mathbf{n}\ddot{x}_g(t) \quad (12)$$

式中 $\mathbf{n} = -[\mathbf{o}_2^T \quad \mathbf{M}_s^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$,

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{o}_1 & \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_2 \\ \mathbf{C} & \mathbf{M} & \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_2 \\ -c_0 \mathbf{I}^T & \mathbf{o}_2^T & c_0/k_d & 0 & 0 \\ -c_{q1} \mathbf{I}^T & \mathbf{o}_2^T & c_{q1}/k_d & t_1 & 0 \\ -c_{q2} \mathbf{I}^T & \mathbf{o}_2^T & c_{q2}/k_d & 0 & t_2 \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_1 & -\mathbf{E} & \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_2 \\ \mathbf{K} & \mathbf{o}_2 & \mathbf{I} & \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_2 \\ -k_0 \mathbf{I}^T & \mathbf{o}_2^T & (k_d + k_0)/k_d & -1 & -1 \\ \mathbf{o}_2^T & \mathbf{o}_2^T & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{o}_2^T & \mathbf{o}_2^T & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N},$$

\mathbf{E} 为 $(n+1)$ 阶单位阵; \mathbf{o}_1 为 $(n+1)$ 阶零矩阵; \mathbf{o}_2 为 $(n+1) \times 1$ 阶的零向量; $N = 2n + 5$ 为扩阶变量的阶数。

由于式(3)隔减震系统属于非对称、非经典阻尼情形,实模态解耦方法已不适用。因此,先引入复模态变换:

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{z} \quad (13)$$

式中 \mathbf{U} 为右模态矩阵; \mathbf{z} 为响应变量。

根据左、右模态矩阵 \mathbf{V}, \mathbf{U} 与 $\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{K}}$ 的关系,整理得:

$$\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{q}\mathbf{z} = \boldsymbol{\eta}\ddot{x}_g(t) \quad (14)$$

式中 $\mathbf{q} = -(\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{U})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{U}$ 为隔减震系统的复特征值矩阵,且满足 $\mathbf{q} = \text{diag}(q_j)$, 其中 $j = 1, 2, \dots, 2n + 5$; $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{U})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T \mathbf{n}$ 。

式(14)所对应的分量形式可以表示为

$$\dot{z}_j - q_j z_j = \eta_j \ddot{x}_g(t), \quad j = 1, 2, \dots, 2n + 5 \quad (15)$$

通过引入状态变量进行复模态变换,结构运动方程、带支撑六参数黏弹性阻尼器本构方程形成的非对称、非经典阻尼的系统二阶微分方程解耦为 $2n + 5$ 个一阶微分方程,如此解耦过程,将复杂的多自由度系统的响应求解问题转化为解 N 个单自由度系统的响应求解问题。

在频域法中,虚拟激励法^[25]是行之有效的地震

响应求解方法。因此,式(15)的频域解表达式很容易获得,即

$$z_j(\omega) = \frac{\eta_j}{q_j + i\omega} \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (16)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, $S_{\ddot{x}_g}(\omega)$ 为李鸿晶激励功率谱。

2.2 响应频域解的统一表达式

由式(11),(13),以复模态方法解耦,运用虚拟激励法,通过右模态矩阵 \mathbf{U} 的第 i 行,第 j 列即 $u_{i,j}$ 获得了系统各系列响应频域解,表达式如下:

第 i 层(含隔震层)的位移频域解 $x_i(\omega)$ 和速度频域解 $\dot{x}_i(\omega)$, 阻尼器受力频域解 $P_G(\omega)$, 两分支标准 Maxwell 阻尼力频域解 $p_1(\omega), p_2(\omega)$ 为:

$$x_i(\omega) = \sum_{j=1}^N u_{i,j} z_j(\omega), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 \quad (17)$$

$$\dot{x}_i(\omega) = \sum_{j=1}^N u_{i+n+1,j} z_j(\omega), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 \quad (18)$$

$$P_G(\omega) = \sum_{j=1}^N u_{2n+3,j} z_j(\omega) \quad (19)$$

$$p_1(\omega) = \sum_{j=1}^N u_{2n+4,j} z_j(\omega) \quad (20)$$

$$p_2(\omega) = \sum_{j=1}^N u_{2n+5,j} z_j(\omega) \quad (21)$$

由式(17)和(18),该系统第 i 层(含隔震层)层间位移频域解 $\Delta x_i(\omega)$ 、层间速度响应频域解 $\Delta \dot{x}_i(\omega)$ 表达式为:

$$\Delta x_i(\omega) = \sum_{j=1}^N (u_{i+1,j} - u_{i,j}) z_j(\omega), \quad i = 2, \dots, n + 1 \quad (22)$$

$$\Delta \dot{x}_i(\omega) = \sum_{j=1}^N (u_{i+n+2,j} - u_{i+n+1,j}) z_j(\omega), \quad i = 2, \dots, n + 1 \quad (23)$$

$$\begin{cases} \Delta x_1(\omega) = \sum_{j=1}^N u_{1,j} z_j(\omega) \\ \Delta \dot{x}_1(\omega) = \sum_{j=1}^N u_{n+2,j} z_j(\omega) \end{cases} \quad (24)$$

由式(4),(9),结合式(19),(24),支撑位移频域解 $x_d(\omega)$, 阻尼器位移频域解 $x_q(\omega)$ 表达式为:

$$x_d(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{u_{2n+3,j}}{k_d} z_j(\omega) \quad (25)$$

$$x_q(\omega) = \sum_{j=1}^N (u_{1,j} - \frac{u_{2n+3,j}}{k_d}) z_j(\omega) \quad (26)$$

由式(5),(9),结合式(17)~(26),支撑位移变化率频域解 $\dot{x}_d(\omega)$, 阻尼器位移变化率频域解 $\dot{x}_q(\omega)$, 阻尼器受力变化率频域解 $\dot{P}_G(\omega)$ 和第 i 层(含隔震层)层间位移角频域解 $\theta_i(\omega)$ 表达式为:

$$\dot{x}_q(\omega) = -\frac{1}{c_0} \left[\sum_{j=1}^N (k_0 u_{1,j} + u_{2n+4,j} + u_{2n+5,j} - \frac{k_d + k_0}{k_d} u_{2n+3,j}) \right] z_j(\omega) \quad (27)$$

$$\dot{x}_d(\omega) = \frac{1}{c_0} \left[\sum_{j=1}^N (k_0 u_{1,j} + c_0 u_{n+2,j} + u_{2n+4,j} + u_{2n+5,j} - \frac{k_d + k_0}{k_d} u_{2n+3,j}) \right] z_j(\omega) \quad (28)$$

$$\dot{P}_G(\omega) = \frac{k_d}{c_0} \left[\sum_{j=1}^N (k_0 u_{1,j} + c_0 u_{n+2,j} + u_{2n+4,j} + u_{2n+5,j} - \frac{k_d + k_0}{k_d} u_{2n+3,j}) \right] z_j(\omega) \quad (29)$$

$$\theta_i(\omega) = \Delta x_i(\omega) / h_i \quad (30)$$

式中 h_i 为结构第 i 层的楼层高度。

综上所述, 结构各系列响应 $X_i(\omega)$ 的求解可转化为对不同模态特征向量 $u_{i,j}$ 的计算, $X_i(\omega)$ 可给出统一表示形式:

$$X_i(\omega) = \sum_{j=1}^N \kappa_{i,j} z_j(\omega) \quad (31)$$

式中 $\kappa_{i,j}$ 为隔减震系统系列响应模态系数。式(17), (18), (22), (23), (25)~(30)中 $x_i(\omega)$, $\dot{x}_i(\omega)$, $\Delta x_i(\omega)$, $\Delta \dot{x}_i(\omega)$, $x_d(\omega)$, $\dot{x}_d(\omega)$, $x_q(\omega)$, $\dot{x}_q(\omega)$ 的响应模态系数均可由式(31)统一表示。

3 功率谱二次分解

3.1 李鸿晶谱分解

由文献[21,26]知, 李鸿晶谱作为地震随机激励模型, 因其具有高、低频抑制项, 使得李鸿晶谱在零频处无奇异点, 因此, 导出的均方速度和均方位移均有界。李鸿晶谱密度函数表达式为:

$$S_{\dot{x}_k}(\omega) = \frac{(\frac{\omega}{\omega_l})^4}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_h})^2]^4 + (\frac{\omega}{\omega_l})^4} \cdot \frac{1 + 4\xi_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2})^2 + 4\xi_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}} S_0 \quad (32)$$

因表达式中含有频率变量 ω 的高阶项, 不易通过数值积分法直接获得响应相关函数的解析表达式, 故基于留数定律^[26], 对 ω 的高阶项进行降幂处理, 式(32)改写为:

$$S_{\dot{x}_k}(\omega) = S_0 S_l(\omega) S_g(\omega) \quad (33)$$

式中

$$S_l(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_l - h\omega^2)^4 + \omega^4} = \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m}}{\omega^2 + \omega_{l,m}^2} \quad (34)$$

$$S_g(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} = \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \quad (35)$$

式中 $h = \frac{\omega_l}{\omega_h^2}$; $a_i = -1 \mp 4h\omega_l i$, $i = 1, 2$;

$$\omega_{l,1}^2 = -\frac{(2\omega_l h - i) + \sqrt{a_1}}{2h^2},$$

$$\omega_{l,2}^2 = -\frac{(2\omega_l h - i) - \sqrt{a_1}}{2h^2},$$

$$\omega_{l,3}^2 = -\frac{(2\omega_l h + i) + \sqrt{a_2}}{2h^2},$$

$$\omega_{l,4}^2 = -\frac{(2\omega_l h + i) - \sqrt{a_2}}{2h^2};$$

$$c_{l,m} = \frac{\omega_{l,m}^4}{(\omega_{l,m}^2 - \omega_{l,p}^2)(\omega_{l,m}^2 - \omega_{l,k}^2)(\omega_{l,m}^2 - \omega_{l,j}^2)h^4},$$

($j, p, k, m = 1 \sim 4$ 且 $j \neq p \neq k \neq m$);

$$\omega_{g,r}^2 = -(1 - 2\xi_g^2)\omega_g^2 \mp 2\omega_g^2 \xi_g \sqrt{(\xi_g^2 - 1)}, r = 1, 2;$$

$$c_{g,r} = \frac{\omega_g^4 - 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega_{g,j}^2}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{g,j}^2}, j \neq r.$$

式(32)最终可化简为:

$$S_{\dot{x}_k}(\omega) = S_0 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \left(\frac{c_{l,m}}{\omega^2 + \omega_{l,m}^2} \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \right) \quad (36)$$

从数理角度对式(32)进行了简化处理, 将其分解为频率变量与谱参数平方和的线性组合。且从式(36)中可以直观地看出随着频率变量 ω 的逐渐变大, 李鸿晶谱的能量分布逐渐减小, 而它与式(32)的区别仅是表达形式的不同。

3.2 频率响应特征值函数分解

功率谱分析是随机振动理论在工程应用中最常用的方式, 即由输入功率谱(激励功率谱)求出结构响应功率谱^[19]。由式(31), 根据虚拟激励法知, 结构系统响应功率谱为:

$$S_X(\omega) = X_l(\omega) \cdot X_l^*(\omega) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \kappa_{l,k} \kappa_{l,j} z_k(\omega) z_j^*(\omega) \quad (37)$$

式中 “*” 为共轭符号。

将式(16)代入式(37)得:

$$S_X(\omega) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\kappa_{l,j} \eta_j}{q_j + i\omega} \frac{\kappa_{l,k} \eta_k}{q_k - i\omega} S_{\dot{x}_k}(\omega) = H_X(\omega) S_{\dot{x}_k}(\omega) \quad (38)$$

式中 $H_X(\omega)$ 为结构频率响应特征值函数。

根据等式的性质, $H_X(\omega)$ 可进一步化简为:

$$H_X(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j^2}{q_j^2 + \omega^2} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} \left(\frac{q_j}{q_j^2 + \omega^2} + \frac{q_k}{q_k^2 + \omega^2} \right) \quad (39)$$

式中 β_j, β_k 为响应模态参量系数, $\beta_j = \kappa_{l,j} \cdot \eta_j$, $\beta_k = \kappa_{l,k} \cdot \eta_k$, 化简过程见附录A。

由式(39)可知, 结构频率响应特征值函数 $H_X(\omega)$ 可以表述为 $1/(q_v^2 + \omega^2)$ 的线性组合, 它与结构自身的性质有关, 与隔减震系统的响应模态参量系数 β_v 和复特征值 $q_v (v=j, k)$ 以及频率变量 ω 的选取有关, 而与地震激励无关。

3.3 响应功率谱

将式(36), (39)代回到式(38)中, 得系统响应功率谱为:

$$S_X(\omega) = S_0 \sum_{j=1}^N \beta_j^2 A_j(\omega) + 2S_0 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} \times [q_j A_j(\omega) + q_k A_k(\omega)] \quad (40)$$

式中

$$A_v(\omega) = \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{(q_v^2 + \omega^2)(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)} \quad (41)$$

4 响应谱矩与响应方差

由随机振动理论^[19]知, 地震动响应 i 阶谱矩与响应单边功率谱的关系为:

$$\gamma_{X,i} = 2 \int_0^{\infty} \omega^i S_X(\omega) d\omega, \quad i=0, 1, 2 \quad (41)$$

将式(40)代入式(41)可得系统响应谱矩为:

$$\gamma_{X,i} = 2S_0 \left[\sum_{j=1}^N \beta_j^2 T_{j,i} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} (q_j T_{j,i} + q_k T_{k,i}) \right] \quad (42)$$

式中

$$T_{v,i} = \int_0^{\infty} \omega^i A_v(\omega) d\omega, \quad v=j, k \quad (43)$$

当 $i=0, 1$ 时, 即可得 $T_{v,0}, T_{v,1}$ (具体推导过程见附录A):

$$T_{v,0} = \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \left[\frac{1}{q_v^2 - \omega_{l,m}^2} \left(\frac{1}{\omega_{l,m}} - \frac{1}{q_v} \right) - \frac{1}{q_v^2 - \omega_{g,r}^2} \left(\frac{1}{q_v} - \frac{1}{\omega_{g,r}} \right) \right] \quad (44)$$

$$T_{v,1} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \left(\frac{\ln q_v^2 - \ln \omega_{l,m}^2}{q_v^2 - \omega_{l,m}^2} - \frac{\ln q_v^2 - \ln \omega_{g,r}^2}{q_v^2 - \omega_{g,r}^2} \right) \quad (45)$$

将 $T_{v,0}, T_{v,1}$ 分别代入式(42)即可得响应0阶谱

矩、1阶谱矩的解析表达式如下:

$$\gamma_{X,0} = 2S_0 \left[\sum_{j=1}^N \beta_j^2 T_{j,0} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} (q_j T_{j,0} + q_k T_{k,0}) \right] \quad (46)$$

$$\gamma_{X,1} = 2S_0 \left[\sum_{j=1}^N \beta_j^2 T_{j,1} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} (q_j T_{j,1} + q_k T_{k,1}) \right] \quad (47)$$

根据随机振动理论^[19]: 系统位移响应方差与系统位移响应0阶谱矩相等, 即 $\sigma_X^2 = \gamma_{X,0}$, 而响应2阶谱矩与响应变化率的方差相等。因此, 根据以上概述可将响应2阶谱矩表示为:

$$\gamma_{X,2} = \sigma_X^2 \quad (48)$$

5 算例

对一栋10层钢筋混凝土隔减震框架结构进行响应分析。抗震设防烈度为9度、II类场地类别, 结构层高均为 $h_i = 4.2$ m, 结构阻尼比 $\xi = 0.05$, 层间质量均为 5.5×10^5 kg, 层间刚度均为 1.8×10^8 N/m, 主体结构阻尼矩阵 c_0 采用 Rayleigh 阻尼, 比例系数分别为 $a_0 = 0.2024$ 和 $a_1 = 0.0093$ 。隔震层质量 $m_t = 5 \times 10^5$ kg, 隔震层刚度 $k_t = 0.68 \times 10^8$ N/m, 隔震层阻尼比 $\xi_b = 0.1$, 支撑刚度 $k_d = 1.5 k_t$ 。隔震层设置带支撑六参数黏弹性阻尼器, 阻尼器平衡刚度和阻尼分别为 $k_0 = 5 \times 10^5$ N/m, $c_0 = 5 \times 10^5$ N·s/m, 两分支标准 Maxwell 阻尼器的刚度和松弛时间分别为 $k_{q_1} = 4 \times 10^6$ N/m, $k_{q_2} = 4.5 \times 10^6$ N/m, $t_1 = 0.01$ s, $t_2 = 0.05$ s。跟据文献[21]选取康卓克基观测台观测的李鸿晶谱参数: $\omega_l = 2.889$ rad/s, $\xi_g = 0.454$, $\omega_h = 6.908$ rad/s, $S_0 = 3.99 \times 10^{-4}$ m²/s³, $\omega_g = 7.599$ rad/s。

5.1 功率谱验证分析

获得响应谱矩的前提是要先获得响应功率谱, 又因响应功率谱与激励功率谱存在一定的转化关系。现验证本文方法化简所得激励功率谱是否与原李鸿晶谱一致。图3是通过式(32), (36)获得的李鸿晶激励功率谱图, 曲线几乎完全吻合, 说明式(36)对李鸿晶谱表达式中高阶频率变量 ω 进行的降阶处理后并没有改变激励功率谱的物理特性, 且从图3可以直观地看出李鸿晶谱的峰值随频率变量 ω 的变化规律。同时, 表1给出了式(32)和(36)在同等频率上限、不同步长下的峰值大小和计算用时。从表1数据可知, 当 $\Delta\omega = 0.01$ rad/s 时, 两种方法同达

到稳定解。由于本文中的简化形式是一种有限项的级数求和,解的精度是相当的,既保证了计算精度又提高了计算效率。

图4~8是本文方法与虚拟激励法两种方法的系统位移功率谱 $S_x(\omega)$ 、速度功率谱 $S_v(\omega)$ 、支撑位移变化率功率谱 $S_{\dot{x}_s}(\omega)$ 、阻尼器位移变化率功率谱 $S_{\dot{x}_d}(\omega)$ 与层间位移角功率谱 $S_\theta(\omega)$ 的对比图。本文方法将各系列响应模态参量系数代入式(40)得到系统系列响应功率谱曲线,与附录B中式(B9)虚拟激励法得到的系统系列响应功率谱曲线吻合度较高,说明本文响应功率谱的推导过程具有合理性。由

式(40)可知,本文所得系统系列响应功率谱表达式均可表述为响应模态参量系数 β_v 、系统复特征值 q_v 、谱强度因子 S_0 以及 $A_v(\omega)$ 具有相同规律的组合,通过代入不同的响应模态参量系数即 β_v ,可以获得相应的响应功率谱。从图4~8中可以直观地看出响应功率谱的能量分布随频率变量 ω 的变化情况。

功率谱的二次分解简化了结构地震动响应分析,可使系统系列响应功率谱的形式保持一致,均可以表示为与系统复特征值有关的线性组合,仅是各响应模态参量系数不同,表达式简洁明了,且具有明确的物理含义。

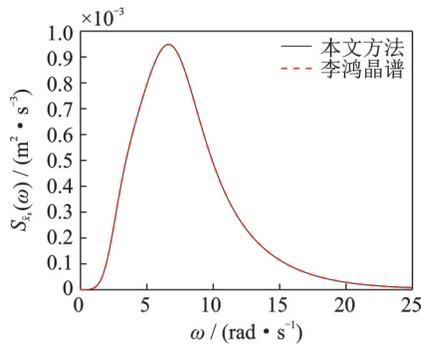


图3 地面加速度功率谱

Fig. 3 Power spectrum of ground acceleration

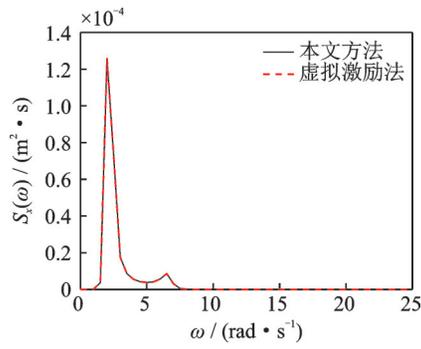


图4 第9层位移功率谱

Fig. 4 Power spectrum of displacement of 9th floor

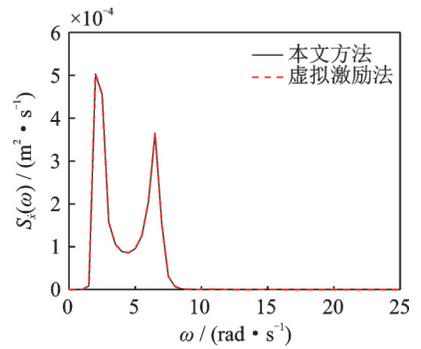


图5 第9层速度功率谱

Fig. 5 Power spectrum of velocity of 9th floor

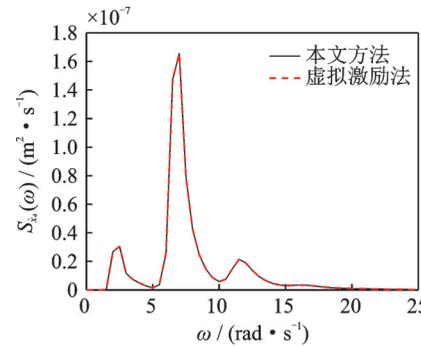


图6 支撑位移变化率功率谱

Fig. 6 Power spectrum of support displacement rate of change

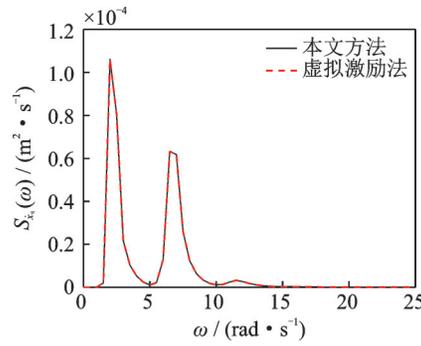


图7 阻尼器位移变化率功率谱

Fig. 7 Power spectrum of damper displacement rate of change

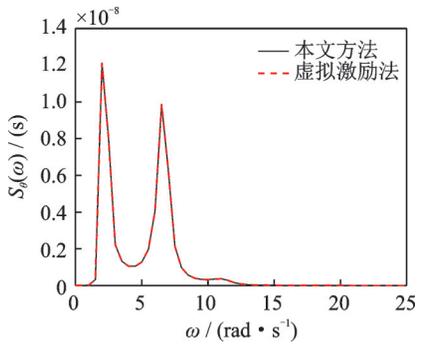


图8 第9层层间位移角功率谱

Fig. 8 Power spectrum of interlayer displacement angle of 9th floor

表1 地面加速度率谱

Tab. 1 Ground acceleration power spectrums

$\Delta\omega / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	$S_{\dot{x}_g, \max}(\omega) / (10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3})$	计算效率/s	
		本文方法	传统方法
1.0	9.3855	0.004	0.073
0.5	9.4735	0.006	0.168
0.25	9.4752	0.008	0.248
0.1	9.4851	0.012	0.340
0.05	9.4855	0.015	0.424
0.01	9.4858	0.027	0.503
0.001	9.4858	0.110	0.651

5.2 谱矩计算精度及效率分析

由于虚拟激励法在求解响应谱矩时需进行数值积分,在 $(0, +\infty)$ 内积分获得谱矩是不现实的,只能给定积分上限,考虑的积分精度不同,获得的响应谱矩值不同。由图3~8可知,卓越频率在25 rad/s时功率谱值衰减趋近0,因此为验证本文方法推导的响应谱矩解析表达式与虚拟激励法所得响应谱矩数值解是否一致,虚拟激励法积分频域上限取250 rad/s,此积分上限取值远大于图3~8中的卓越频率,虚拟激励法的积分步长的取值为:

① $\Delta\omega = 0.01$ rad/s, ② $\Delta\omega = 0.05$ rad/s,

③ $\Delta\omega = 0.15$ rad/s, ④ $\Delta\omega = 0.25$ rad/s。

图9~14反映了本文方法与虚拟激励法4种情

况下响应谱矩曲线的吻合程度。虚拟激励法③,④与本文方法的响应谱矩曲线有明显差距,而①,②更加逼近本文方法获得的响应谱矩,且①与本文方法的谱矩曲线吻合程度达到最高。对于算例中给定的参数,当虚拟激励法积分步长取②时,虚拟激励法的响应谱矩曲线已与本文方法的谱矩曲线吻合程度较高,因此,对于给定了积分频域上限250 rad/s时,选取的积分步长为 $\Delta\omega \leq 0.05$ rad/s,虚拟激励法位移谱矩值与本文方法位移谱矩值的误差几乎很小;选取的积分步长为 $\Delta\omega > 0.05$ rad/s,虚拟激励法位移谱矩值与本文方法位移谱矩值的误差较大。随着积分步长取值越来越小,虚拟激励法位移谱矩值就越逼近本文方法位移谱矩值。

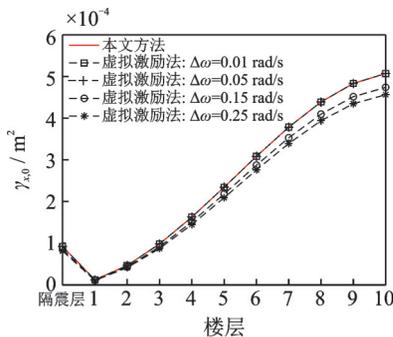


图9 结构位移0阶谱矩

Fig. 9 0-order spectral moment of displacement

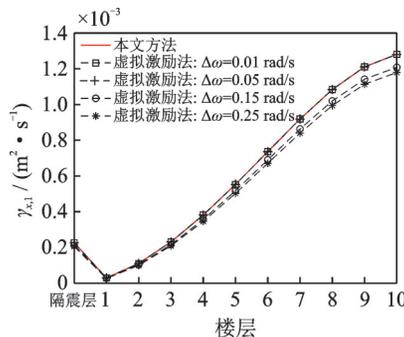


图10 结构位移1阶谱矩

Fig. 10 1-order spectral moment of displacement

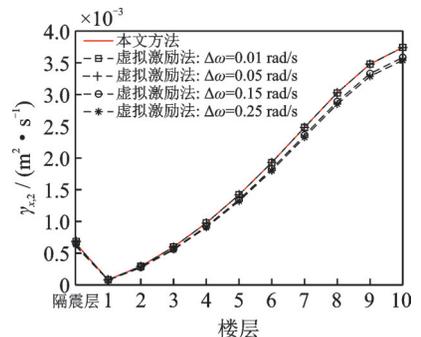


图11 结构位移2阶谱矩

Fig. 11 2-order spectral moment of displacement

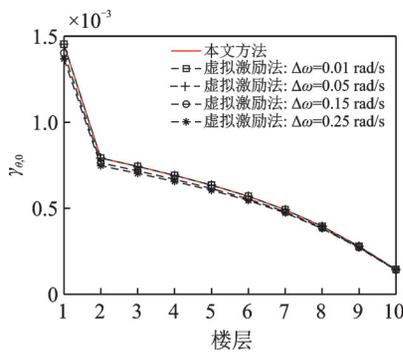


图12 层间位移角0阶谱矩

Fig. 12 0-order spectral moment of interstorey drift angle

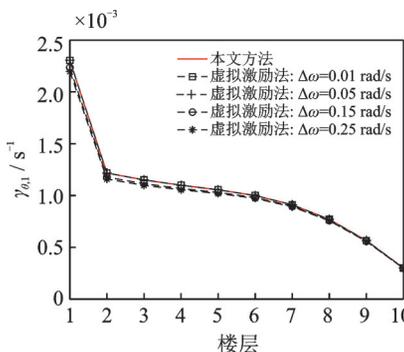


图13 层间位移角1阶谱矩

Fig. 13 1-order spectral moment of interstorey drift angle

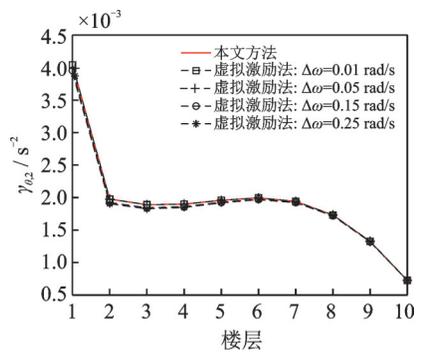


图14 层间位移角2阶谱矩

Fig. 14 2-order spectral moment of interstorey drift angle

表2给出了虚拟激励法固定积分步长 $\Delta\omega = 0.001$ rad/s,选取4种不同积分频域上限,阻尼器位移在这4种情况下与本文方法计算结果的误差对比;同时给出了两种方法在同一微机上获得阻尼器位移0~2阶谱矩的计算用时。表2中虚拟激励法⑤,⑥的阻尼器位移谱矩与本文方法的误差极小,而⑦,⑧的阻尼器位移谱矩与本文方法的结果有微小差距。虚拟激励法4种情况CPU耗时均高于本文方法用时,

由此可见,本文方法的计算效率得到极大提高。

5.3 带支撑阻尼器减震效果分析

通常支撑刚度越大,结构的响应则越小,房屋越安全。但为了更好地起到减震目的,同时考虑经济效果,实际情况下支撑刚度不可能取无限大,为研究系统响应方差随支撑刚度的变化过程,现取支撑刚度 $k_d = r_d k_1$, r_d 为支撑刚度与隔震层刚度的比值,

r_d 按照以下6种工况取值,分别为:0.1,0.5,1.5,5,10,25。表3为6种工况下得到的阻尼力方差 $\sigma_{P_0}^2$ 、阻尼器位移方差 $\sigma_{x_q}^2$ 、支撑位移方差 $\sigma_{x_d}^2$ 、隔震层相对地

面的位移方差 $\sigma_{x_i}^2$ 、第*i*层层间位移角方差最大值 $\sigma_{\theta_i, \max}^2$ 以及上部结构第*i*层相对隔震层位移方差最大值 $\sigma_{x_i, \max}^2$ 。

表2 阻尼器位移0~2阶谱矩计算效率及误差

Tab. 2 Calculation efficiency and accuracy of 0~2 spectral moments of damping displacement

计算方法	$\gamma_{x_q,0}/$ (10^{-5} m^2)	$\gamma_{x_q,1}/$ ($10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	$\gamma_{x_q,2}/$ ($10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)	计算效率/s	虚拟激励法与本文方法谱矩误差值		
					$\hat{\gamma}_{x_q,0}(10^{-5})$	$\hat{\gamma}_{x_q,1}(10^{-5})$	$\hat{\gamma}_{x_q,2}(10^{-5})$
本文方法	9.101254816785	2.2338642812214	6.5085895786325	0.081	—	—	—
⑤	9.101254816782	2.2338642812207	6.5085895786106	18.749	3×10^{-12}	7×10^{-12}	2.19×10^{-10}
⑥	9.100472504288	2.2336915207882	6.5082086673525	15.557	$7.82312497 \times 10^{-4}$	$1.72760433 \times 10^{-3}$	$3.80911280 \times 10^{-3}$
⑦	8.466653958785	2.0956583233424	6.2080003366861	12.739	0.634600858000	1.382059578790	3.005892419464
⑧	8.069711127381	2.0265654486208	6.0953377457189	10.478	1.031543689404	2.072988326006	4.132518329136

注:“—”表示无。⑤~⑧分别表示积分区间为:[0,250],[0,100],[0,50],[0,25] rad/s。

由表3数据可知,随着 r_d 的增大,提供的阻尼器受力方差与阻尼器位移方差逐渐增大,支撑位移方差逐渐减小;隔震层位移方差、层间位移角方差最大值与位移方差最大值是逐渐减小的,当 $r_d > 1.5$ 时,

$\sigma_{x_i}^2$, $\sigma_{\theta_i, \max}^2$, $\sigma_{x_i, \max}^2$ 降低的幅度很小,因此,对于本算例, $k_d = 1.5k_1$ 时,减震效果最佳。可见,进行消能支撑结构设计时,在结构变形满足抗震规范要求的情况下,适当选取合理的支撑刚度以提高经济效益。

表3 系统系列响应方差

Tab. 3 System series response variances

r_d	$\sigma_{P_0}^2/(10^8 \text{ N}^2)$	$\sigma_{x_q}^2/(10^{-5} \text{ m}^2)$	$\sigma_{x_d}^2/\text{m}^2$	$\sigma_{x_i}^2/(10^{-5} \text{ m}^2)$	$\sigma_{\theta_i, \max}^2/10^{-6}$	$\sigma_{x_i, \max}^2/(10^{-4} \text{ m}^2)$
0.1	3.0211	7.5020	6.53×10^{-6}	9.4184	5.3392	5.2202
0.5	3.8920	8.8969	3.07×10^{-7}	9.2334	5.2343	5.0923
1.5	4.0152	9.1013	4.21×10^{-8}	9.2085	5.2202	5.0714
5	4.0533	9.1689	4.16×10^{-9}	9.2005	5.2157	5.0643
10	4.0611	9.1831	1.05×10^{-9}	9.1988	5.2148	5.0628
25	4.0657	9.1916	1.70×10^{-10}	9.1979	5.2142	5.0618

6 结论

针对带支撑六参黏弹性阻尼器基础耗能隔震结构,基于李鸿晶谱的响应解析算法进行了研究,给出了隔减震体系较为简明的响应解。结果表明:

(1)将复杂的李鸿晶激励功率谱与结构频率响应特征值函数简化处理,分解的激励功率谱与李鸿晶谱的曲线吻合,说明了分解李鸿晶谱的合理性。而通过代入不同的响应模态系数得到对应的系统系列响应功率谱的曲线图吻合程度较高,充分说明了本文方法推导频率响应特征值函数的合理性。

(2)本文方法不仅得到了结构响应(隔减震系统位移、速度等)的简明解,还获得了阻尼器响应(阻尼器受力、阻尼器位移、支撑位移等)的简明解,通过与传统的此类问题的常用分析方法如虚拟激励法进行

对比分析,本文方法无论是计算精度还是计算效率,均有极大的提高。因此可以为隔震结构的隔震层参数选取、阻尼器的优化等提供理论依据,也有利于工程应用。

(3)支撑刚度的选取影响着阻尼器的减震效果。支撑刚度取值越大,阻尼器减震效果越好,但支撑刚度大到一定程度时,响应方差值基本趋于缓和,阻尼器减震效果提高不明显。因此,在结构变形满足抗震规范要求的情况下,适当选取合理支撑刚度以提高经济效益。

参考文献:

- [1] Amjadian M, Agrawal A K. Seismic response control of multi-story base-isolated buildings using a smart electromagnetic friction damper with smooth hysteretic be-

- havior[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 130: 409-432.
- [2] 丁洁民,涂雨,吴宏磊,等.减隔震组合技术在高烈度抗震设防区的应用研究[J].*建筑结构学报*,2019,40(2):77-87.
Ding Jiemin, Tu Yu, Wu Honglei, et al. Application research of seismic isolation system combined with energy-dissipation technology in high seismic intensity region [J]. *Journal of Building Structures*, 2019, 40 (2) : 77-87.
- [3] Li C D, Li T, Ban D W, et al. Equivalent damping of SDOF structure with Maxwell damper[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2018, 17(3) : 627-639.
- [4] 刘洁亚,黄小宁,王宁,等.主余震序列作用下基础隔震结构地震损伤研究[J].*振动、测试与诊断*,2021,41(6):1052-1058.
Liu Jieya, Huang Xiaoning, Wang Ning, et al. Seismic damage of base-isolated structure under main shock-after shock sequences[J]. *Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis*, 2021, 41(6) : 1052-1058.
- [5] Güler E, Alhan C. Performance limits of base-isolated liquid storage tanks with/without supplemental dampers under near-fault earthquakes[J]. *Structures*, 2021, 33: 355-367.
- [6] 陈瑞生,吴进标,刘彦辉,等.黏滞阻尼器-基础隔震混合体系优化研究[J].*振动与冲击*,2020,39(11):93-100.
Chen Ruisheng, Wu Jinbiao, Liu Yanhui, et al. Optimization of research for base-isolated structures with fluid viscous dampers[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(11): 93-100.
- [7] 李创第,邹万杰,葛新广,等.多自由度一般积分型粘弹性阻尼减震结构的随机响应与等效阻尼[J].*工程力学*,2013,30(4):136-145.
Li Chuangdi, Zou Wanjie, Ge Xinguang, et al. Random response and equivalent damping of MDOF dissipation structures with general integral model viscoelastic dampers[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(4) : 136-145.
- [8] Singh M P, Chang T S. Seismic analysis of structures with viscoelastic dampers[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(6) : 571-580.
- [9] 徐至钧,徐卓,赵尧钟,等.建筑结构隔震技术与应用[M].上海:同济大学出版社,2014.
Xu Zhijun, Xu Zhuo, Zhao Yaoshong, et al. *Seismic Isolation Technology and Application of Building Structure*[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2014.
- [10] Greco R, Marano G C. Identification of parameters of Maxwell and Kelvin-Voigt generalized models for fluid viscous dampers[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21(2) : 260-274.
- [11] Lewandowski R, Chorazyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers [J]. *Computers and Structures*, 2010, 88 (1-2) : 1-17.
- [12] 张婉洁,牛江川,申永军,等.含分数阶Bingham模型的阻尼减振系统时滞半主动控制[J].*力学学报*,2022,54(1):173-183.
Zhang Wanjie, Niu Jiangchuan, Shen Yongjun, et al. Time-delayed semi-active control of damping system with fractional-order bingham model[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54 (1) : 173-183.
- [13] Wang B, Chen L Q. Asymptotic stability analysis with numerical confirmation of an axially accelerating beam constituted by the standard linear solid model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 328(4-5) : 456-466.
- [14] Lu L Y, Lin G L, Shih M H. An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation[J]. *Engineering Structures*, 2012, 34: 111-123.
- [15] Mazza F, Vulcano A. Control of the earthquake and wind dynamic response of steel-framed buildings by using additional braces and/or viscoelastic dampers[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2011, 40(2) : 155-174.
- [16] 中华人民共和国住房和城乡建设部,中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局.建筑抗震设计规范:GB 50011—2010[S].北京:中国建筑工业出版社,2010.
Minsitry of Housing and Urban-Rural Development of People's Republic of China, General Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine of People's Republic of China. Code for seismic design of buildings: GB 50011—2010[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010.
- [17] 张敏,付熊,陈钰雪,等.带支撑粘弹性阻尼器耗能框架结构随机振动分析[J].*计算力学学报*,2021,38(1):37-45.
Zhang Min, Fu Xiong, Chen Yuxue, et al. Random vibration analysis of energy dissipation frame structure installing viscoelastic dampers with supports[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, 38 (1) : 37-45.
- [18] 何浩祥,范少勇,闫维明.时频非平稳地震动模型及结构随机振动应用[J].*振动、测试与诊断*,2019,39(6):1189-1197.
He Haoxiang, Fan Shaoyong, Yan Weiming. Time-fre-

- quency nonstationarity stochastic ground motion model and application in structural random vibration[J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2019, 39(6): 1189-1197.
- [19] 方同. 工程随机振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [20] Ge X G, Li C D, Azim I, et al. Structural dynamic responses of linear structures subjected to Kanai-Tajimi excitation[J]. Structures, 2021, 34: 3958-3967.
- [21] 李鸿晶, 陈辰. 一种平稳地震地面运动的改进金井清谱模型[J]. 工程力学, 2014, 31(2): 158-163.
Li Hongjing, Chen Chen. A modified Kanai-Tajimi spectral model for the stationary earthquake induced ground motion process[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(2): 158-163.
- [22] 刘美华, 邹万杰, 葛新广, 等. 基于欧进萍谱的广义 Maxwell 耗能结构随机响应简明解法[J]. 振动与冲击, 2022, 41(4): 124-133.
Liu Meihua, Zou Wanjie, Ge Xinguang, et al. A concise analytic solution to seismic response of structure with generalized Maxwell dampers under Ou Jinping spectrum excitation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(4): 124-133.
- [23] 柳国环, 练继建, 国巍, 等. 地震多点反应谱模型存在缺陷的改进与验证[J]. 振动、测试与诊断, 2015, 35(1): 30-35.
- Liu Guohuan, Lian Jijian, Guo Wei, et al. Defect, improvement and verification of seismic multi-supported response spectrum model[J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2015, 35(1): 30-35.
- [24] 孙攀旭, 杨红, 刘庆林. 基于动力特性的混合结构地震响应复模态叠加法[J]. 工程力学, 2020, 37(11): 69-82.
Sun Panxu, Yang Hong, Liu Qinglin. Complex mode superposition method of hybrid structure seismic responses based on dynamic characteristics[J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(11): 69-82.
- [25] 林家浩, 张亚辉, 赵岩. 虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(1): 1-31.
Lin Jiahao, Zhang Yahui, Zhao Yan. The pseudo-excitation method and its industrial applications in China and abroad[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(1): 1-31.
- [26] 葛新广, 龚景海, 李创第, 等. 功率谱二次正交化法在随机地震动响应的应用[J]. 振动工程学报, 2022, 35(3): 616-624.
Ge Xinguang, Gong Jinghai, Li Chuangdi, et al. Application of quadratic orthogonalization method of response power spectrum to random ground motion response[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(3): 616-624.

A concise solution method for the seismic isolation structure of the supported six-parameter damper based on Li Hongjing spectrum

HAN Hong, ZOU Wan-jie, LI Chuang-di, GE Xin-guang, JING Cheng-gui

(School of Civil Engineering, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China)

Abstract: Considering the complexity of solving the seismic response of the energy-dissipated isolated structure with six-parameter viscoelastic damper under the excitation of Li Hongjing spectrum, a concise solution that can obtain random seismic response is proposed. The analysis model of six-parameter viscoelastic damper with support is adopted, and the mathematical modeling of energy dissipation and isolation structure with viscoelastic damper is realized by differential constitutive equation. Combined with complex mode method and the pseudo excitation method (PEM), the unified expression of frequency domain solution for system series response (displacement, velocity and damper force) of vibration isolation system is obtained. Taking Li Hongjing spectrum as the excitation power spectrum, the excitation power spectrum and the eigenvalue function of structural frequency response are simplified, and the concise analytical solutions of the system response power spectrum, response spectral moment and response variance under the random excitation are obtained. An example is given to verify the accuracy and efficiency of the proposed method in analyzing the dynamic response of the system compared with the traditional response analysis method such as the PEM, and the influence of different support stiffness on the vibration reduction effect of the damper is discussed.

Key words: vibration isolation system; six-parameter viscoelastic damper with support; Li Hongjing spectrum; response spectral moment; response variance

作者简介: 韩红(1996—),女,硕士研究生。E-mail: 2845389539@qq.com。

通讯作者: 邹万杰(1974—),男,博士,副教授。E-mail: 705450818@qq.com。

附录 A 本文方法部分推导

式(39)的简化过程如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \kappa_{l,k} \eta_k \kappa_{l,j} \eta_j \left(\frac{1}{q_k + i\omega} \frac{1}{q_j - i\omega} + \frac{1}{q_j + i\omega} \frac{1}{q_k - i\omega} \right) = \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \kappa_{l,k} \eta_k \kappa_{l,j} \eta_j \frac{1}{q_k + q_j} \left(\frac{1}{q_k + i\omega} + \frac{1}{q_k - i\omega} + \frac{1}{q_j + i\omega} + \frac{1}{q_j - i\omega} \right) = \\ & 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\kappa_{l,k} \eta_k \kappa_{l,j} \eta_j}{q_k + q_j} \left(\frac{q_k}{q_k^2 + \omega^2} + \frac{q_j}{q_j^2 + \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (A1)$$

将式(40)等式右边的化简过程为:

$$S_1(\omega) = S_0 \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{\beta_j^2}{q_j^2 + \omega^2} \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= 2S_0 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} \left(\frac{q_j}{q_j^2 + \omega^2} + \frac{q_k}{q_k^2 + \omega^2} \right) = \\ & 2S_0 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} \left[\frac{q_j}{q_j^2 + \omega^2} \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)} + \frac{q_k}{q_k^2 + \omega^2} \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)} \right] \end{aligned} \quad (A3)$$

最终,式(40)可化为:

$$S_X(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = S_0 \sum_{j=1}^N \beta_j^2 A_j(\omega) + 2S_0 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \frac{\beta_k \beta_j}{q_k + q_j} [q_j A_j(\omega) + q_k A_k(\omega)] \quad (A4)$$

式中 $A_v(\omega) = \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)(q_v^2 + \omega^2)}$, $v = j, k$.

$T_{v,0}, T_{v,1}$ 的推导过程如下:

$$\begin{aligned} T_{v,0} &= \int_0^\infty A_v(\omega) d\omega = \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \int_0^\infty \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)(q_v^2 + \omega^2)} d\omega = \\ & \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,m}^2} - \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \right) \frac{1}{q_v^2 + \omega^2} d\omega = \\ & \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,m}^2} \frac{1}{q_v^2 + \omega^2} d\omega - \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \frac{1}{q_v^2 + \omega^2} d\omega \right) = \\ & \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \left[\frac{1}{q_v^2 - \omega_{l,m}^2} \left(\frac{1}{\omega_{l,m}} - \frac{1}{q_v} \right) - \frac{1}{q_v^2 - \omega_{g,r}^2} \left(\frac{1}{q_v} - \frac{1}{\omega_{g,r}} \right) \right] \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\begin{aligned} T_{v,1} &= \int_0^\infty \omega A_v(\omega) d\omega = \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \int_0^\infty \frac{\omega c_{l,m} c_{g,r}}{(\omega^2 + \omega_{l,m}^2)(\omega^2 + \omega_{g,r}^2)(q_v^2 + \omega^2)} d\omega = \\ & \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,m}^2} - \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \right) \frac{1}{q_v^2 + \omega^2} d\omega^2 = \\ & \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,m}^2} \frac{1}{q_v^2 + \omega^2} d\omega^2 - \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \frac{1}{q_v^2 + \omega^2} d\omega^2 \right) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^4 \frac{c_{l,m} c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \omega_{l,m}^2} \left(\frac{\ln q_v^2 - \ln \omega_{l,m}^2}{q_v^2 - \omega_{l,m}^2} - \frac{\ln q_v^2 - \ln \omega_{g,r}^2}{q_v^2 - \omega_{g,r}^2} \right) \end{aligned} \quad (A6)$$

附录 B 隔减震系统虚拟激励法公式推导

响应功率谱和响应谱矩分析:

针对式(10)作虚拟变换,得:

$$x_q(\omega) = x_t(\omega) - P_G(\omega)/k_d \quad (B1)$$

式(7),(8)进行虚拟变换可以得到:

$$p_1(\omega) = \frac{c_{q_1} i\omega}{1 + t_1 i\omega} \left[x_t(\omega) - \frac{P_G(\omega)}{k_d} \right] \quad (B2)$$

$$p_2(\omega) = \frac{c_{q_2} i\omega}{1 + t_2 i\omega} \left[x_t(\omega) - \frac{P_G(\omega)}{k_d} \right] \quad (B3)$$

对式(5)作虚拟变换:

$$P_G(\omega) = (k_0 + c_0 i\omega)x_q(\omega) + p_1(\omega) + p_2(\omega) \quad (B4)$$

将式(B2)和(B3)代入式(B4),整理得:

$$P_G(\omega) = \frac{k_d(k_0 + c_0 i\omega + \frac{c_{q1} i\omega}{1 + t_1 i\omega} + \frac{c_{q2} i\omega}{1 + t_2 i\omega})}{k_d + k_0 + c_0 i\omega + \frac{c_{q1} i\omega}{1 + t_1 i\omega} + \frac{c_{q2} i\omega}{1 + t_2 i\omega}} x_1(\omega) = \frac{k_d \alpha}{k_d + \alpha} \mathbf{I}^T \mathbf{x}(\omega) \quad (B5)$$

式中 $\alpha = k_0 + c_0 i\omega + \frac{c_{q1} i\omega}{1 + t_1 i\omega} + \frac{c_{q2} i\omega}{1 + t_2 i\omega}$ 。

针对式(3),引入虚拟激励 $\ddot{x}_g(t) = \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t}$,则:

$$(-M\omega^2 + C i\omega + K)\mathbf{x}(\omega) + IP_G(\omega) = -M_s \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (B6)$$

式(B5)和式(B6)两个方程含有两个未知量,即 $\mathbf{x}(\omega)$, $P_G(\omega)$,因此,可以很容易解出隔减震系统位移频域解:

$$\mathbf{x}(\omega) = \frac{-M_s \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t}}{-M\omega^2 + C i\omega + K + I \frac{k_d \alpha}{k_d + \alpha} \mathbf{I}^T} \quad (B7)$$

由式(B1),(B6)和(B7),得阻尼器位移响应:

$$x_q = \mathbf{I}^T \mathbf{x}(\omega) - P_G(\omega)/k_d \quad (B8)$$

则响应变化率功率谱表达式为:

$$S_{\dot{x}}(\omega) = X(\omega) X^*(\omega) \quad (B9)$$

式中 X 为隔减震系统响应。

至此,结构位移功率谱 $S_x(\omega)$ 、阻尼器受力功率谱 $S_{P_c}(\omega)$ 、支撑位移功率谱 $S_{x_d}(\omega)$ 、阻尼器位移功率谱 $S_{x_q}(\omega)$ 和层间位移角功率谱 $S_\theta(\omega)$ 均可由式(B9)获得。

隔减震系统位移功率谱变化率 $S_{\dot{x}}(\omega)$ 、阻尼器受力变化率功率谱 $S_{\dot{P}_c}(\omega)$ 、支撑位移变化率功率谱 $S_{\dot{x}_d}(\omega)$ 、阻尼器位移变化率功率谱 $S_{\dot{x}_q}(\omega)$ 的表达式为:

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \quad (B10)$$

由响应谱矩与响应功率谱的关系,得响应0~2阶谱矩为:

$$\beta_{X,i}(\omega) = 2 \int_0^\infty \omega^i S_X(\omega) d\omega, \quad i = 0, 1, 2 \quad (B11)$$

层间位移频域解的矩阵形式为:

$$\Delta \mathbf{x}(\omega) = [x_b(\omega), x_1(\omega) - x_b(\omega), x_2(\omega) - x_1(\omega), \dots, x_n(\omega) - x_{n-1}(\omega)]^T \quad (B12)$$

因此,层间响应0~2阶谱矩表达式为:

$$\beta_{\Delta X,i}(\omega) = 2 \int_0^\infty \omega^i S_{\Delta X}(\omega) d\omega, \quad i = 0, 1, 2 \quad (B13)$$