

隐变量模型及其在贝叶斯运营模态分析的应用

朱伟¹, 李宾宾^{1,2,3}, 谢炎龙⁴, 陈笑宇¹

(1. 浙江大学伊利诺伊大学厄巴纳香槟校区联合学院, 浙江 海宁 314400;

2. 浙江大学平衡建筑研究中心, 浙江 杭州 310058; 3. 浙江大学建筑设计研究院有限公司, 浙江 杭州 310058;

4. 深圳大学土木与交通工程学院, 广东 深圳 518060)

摘要: 贝叶斯 FFT 算法是运营模态分析的新一代算法, 以其准确性高、计算速度快、可有效进行不确定性度量等优点受到广泛关注。然而, 现有贝叶斯 FFT 算法针对不同情况(稀疏模态、密集模态、多步测试等)需采用不同优化算法, 且编程实现极为复杂。为此, 本文旨在提出针对不同情况的贝叶斯 FFT 算法的统一框架, 并实现模态参数的高效求解; 视结构模态响应为隐变量, 建立贝叶斯模态识别单步测试和多步测试的隐变量模型框架; 针对提出的隐变量模型运用期望最大化算法实现各种情况下模态参数的统一贝叶斯推断, 利用隐变量解耦模态参数优化过程, 采用 Louis 等式间接求取似然函数的 Hessian 矩阵。通过两个实际工程测试案例, 并与现有方法对比, 验证所提方法的准确性和高效性。分析结果表明, 本文所提算法与现有方法结果相同, 但其推导简单、易编程, 尤其对于密集模态识别问题具有明显的计算优势。本文为贝叶斯模态识别建立起统一的隐变量模型框架, 在很大程度上简化原本繁琐且冗长的推导过程, 提高计算效率, 同时也为应用变分贝叶斯、吉布斯采样等算法求解贝叶斯模态识别问题提供了可能。

关键词: 运营模态分析; 参数识别; 隐变量模型; 期望最大化; 不确定性

中图分类号: TU311.3; U441+.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)09-1476-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.09.004

引言

由于数据采集相对简便且干扰正常运营, 运营模态分析已逐步发展为土木工程结构振动测试的重要手段。该方法利用结构在环境振动下的响应数据识别模态参数(自振频率、阻尼比和振型等), 识别结果反映结构在正常运营状态下的动力学特征, 为结构健康监测^[1]、振动控制^[2]和设计验证^[3]等工作的开展提供了基础工具。

基于贝叶斯统计的运营模态识别方法可在实现模态参数估计的同时量化识别不确定性。它将模态参数视为随机变量, 参数识别结果以后验概率分布形式给出, 该后验分布正比于先验分布和似然函数的乘积。目前已开发出时域算法^[4-5]、功率谱密度算法^[6]和贝叶斯 FFT 算法^[7]等模态识别方法。贝叶斯 FFT 算法得到了最广泛的关注, 被应用于稀疏模态^[8]、密集模态^[9]、多步测试^[10]和时间异步数据^[11]等各种实际工况。

贝叶斯 FFT 算法采用 Laplace 逼近, 即用高斯

分布逼近后验分布, 将均值选作模态参数的点估计, 以协方差矩阵表征识别不确定性^[12]。由于在运营模态分析中数据量一般较大, 根据中心极限定理, Laplace 逼近可以较准确地求解模态参数的后验概率分布。贝叶斯 FFT 算法通过数值优化算法最大化似然函数, 然后采用解析求导获得似然函数的二阶导数矩阵(Hessian 矩阵), 进而求得模态参数的协方差矩阵^[13]。该方法易于理解, 但其编程实现极为复杂, 尤其是密集模态条件下计算效率大打折扣。

运营模态分析只利用结构振动响应数据, 实验模态分析却可同时利用输入、输出信息, 从而更准确地识别结构模态参数。受此启发, 如果能够先识别输入荷载, 进而可把运营模态分析近似转化为实验模态分析。需指出地是, 这种条件下获得的输入荷载只是估计结果且具有较大不确定性, 并不能直接套用实验模态分析方法。为此, 本文将运营模态分析中未被测量的输入荷载视作“隐变量”, 并应用隐变量模型理论^[14-15]考虑输入荷载估计的不确定性, 从而简化贝叶斯 FFT 算法中后验均值和 Hessian 矩阵的求解。实际上隐变量模型在土木工程中早有应

收稿日期: 2022-10-09; **修订日期:** 2022-12-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(青年项目)(51908494); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2021XZZX040); 国家重点研发计划资助项目(2019YFB2102702)。

用:例如,KULLAA^[16]将温、湿度等当作隐变量用以消除环境因素对桥梁模态频率的影响,NAIR等^[17]使用混合高斯模型对结构损伤识别中的特征向量进行概率建模。上述工作均从数据分析角度直接应用不同隐变量模型,并未涉及与物理模型的结合,无法解释实际工程问题中构建和求解隐变量模型的具体意义。

本文首先介绍统计学习中隐变量模型框架及常用的期望最大化算法;然后从结构动力学的基本物理关系出发将贝叶斯FFT算法中的概率模型归结为隐变量模型,针对单步测试和多步测试提出求解贝叶斯FFT后验均值和协方差矩阵的方法;最后,本文以单步测试和多步测试的两个工程实例验证上述方法的正确性和有效性。

1 隐变量模型概述

为解释观察到的现象,常用方法是构建参数模型 $m(\mathbf{u}, \theta)$,建立输入向量 \mathbf{u} 和输出向量 \mathbf{m} 的函数关系,其中 θ 为参数向量。由于建模误差和测量误差难以避免,实际观测向量 \mathbf{y} 和模型输出 \mathbf{m} 之间必然存在差异,即:

$$\mathbf{y} = m(\mathbf{u}, \theta) + \epsilon \quad (1)$$

式中 ϵ 为误差向量。

为建立与式(1)对应的概率分布模型,随机嵌入方法^[18]被广泛采用,即首先通过最大熵原理^[19]给定误差 ϵ 的概率分布,并据此构建似然函数 $f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)$,然后给定参数 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$ (反映研究人员对未知参数的知识和理解),进而获得联合概率分布模型:

$$p(\mathbf{y}, \theta|\mathbf{u}) = f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)\pi(\theta) \quad (2)$$

给定测量数据 \mathbf{y} ,贝叶斯定理提供了计算参数 θ 后验分布的方法:

$$p(\theta|\mathbf{y}, \mathbf{u}) = z^{-1} f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)\pi(\theta) \quad (3)$$

式中 $z = \int f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)\pi(\theta) d\theta$ 为归一化常数,常被称为“证据函数”,广泛应用于模型选择问题^[20]。

由于仪器数量有限、数据缺失或无法直接获取感兴趣的物理量,并非所有输入向量 \mathbf{u} 或观测向量 \mathbf{y} 中的变量都能被实际测量。此时,引入隐变量,式(1)可写成:

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1\} = m(\{\mathbf{u}, \mathbf{x}_2\}, \theta) + \epsilon \quad (4)$$

式中 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 表示未被观测到的隐变量,记作 $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ 。应用随机嵌入方式,可以获得隐变量模型:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta|\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)\pi(\theta) \quad (5)$$

式中 概率分布 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)$ 一般被称作完全似然函数,表征了隐变量 \mathbf{x} 和观测值 \mathbf{y} 与输入向量 \mathbf{u} 的相互关系。其与似然函数 $f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)$ 的关系为:

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta) d\mathbf{x} \quad (6)$$

为了区分,在隐变量模型中似然函数 $f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)$ 又被称作非完全似然函数。

在隐变量模型(5)中,给定测量数据 \mathbf{y} ,参数 θ 的后验概率分布 $p(\theta|\mathbf{y}, \mathbf{u})$ 仍需通过式(3)求解。但由于需首先利用式(6)求得非完全似然函数,其后验推断过程往往更为复杂。近年来,针对隐变量模型,新的推断算法不断被提出,如期望最大化^[21]、变分贝叶斯^[22]和吉布斯采样^[23]等。这些算法极大促进了隐变量模型在实际工程中的应用。在贝叶斯参数辨识中,期望最大化算法适用于Laplace逼近,要求大样本和参数具备全局可辨识性;变分贝叶斯可用于解决小样本推断问题,且可规避Hessian矩阵的计算难题;吉布斯采样具有广泛的适用性,但计算效率偏低。已有经验表明,在大样本条件下三种算法的计算结果极为接近。本文将贝叶斯FFT算法中的概率模型转化为隐变量模型,通过挖掘隐变量模型的优势,利用期望最大化算法实现模态参数后验均值和协方差矩阵的求解。

2 期望最大化算法

根据中心极限定理,在数据量较大条件下,参数 θ 的后验概率分布 $p(\theta|\mathbf{y}, \mathbf{u})$ 可用高斯分布近似,即Laplace逼近。对于该高斯分布,其均值为极大后验估计量 θ_{MAP} ,协方差矩阵 \hat{C} 由负对数后验函数在 $\theta = \theta_{\text{MAP}}$ 处Hessian矩阵的逆矩阵给出,即:

$$\theta_{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} L(\theta) = \arg \max_{\theta} \ln [f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)\pi(\theta)] \quad (7)$$

$$\hat{C} = \left[- \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \Big|_{\theta = \theta_{\text{MAP}}} \right]^{-1} \quad (8)$$

式中 $L(\theta)$ 表示对数后验分布函数;“ $\arg \max_{\theta} [\cdot]$ ”表示最大值运算;“ $[\cdot]^{-1}$ ”表示矩阵的求逆运算。期望最大化算法天然适用于Laplace逼近,本节将对该算法进行详细介绍。

在隐变量模型中,由于非完全似然函数通常是观测值和未知参数的复杂函数,因此求解 θ_{MAP} 和 \hat{C} 十分困难。在这方面,期望最大化算法提供了一种系统且易于处理的方法:采用迭代计算估计 θ_{MAP} 。设定初始值 $\theta^{(0)}$,期望最大化算法迭代有以下两个

步骤:

(1) E步:给定输入数据 \mathbf{u} , 观测数据 \mathbf{y} 和当前参数估计值 $\theta^{(l)}$, 计算完整数据对数后验分布函数 $\mathcal{L}(\theta) = \ln[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta)\pi(\theta)]$ 的条件期望:

$$Q(\theta|\theta^{(l)}) = E_x[\mathcal{L}(\theta)] = \int \mathcal{L}(\theta) f(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{u}, \theta^{(l)}) d\mathbf{x} \quad (9)$$

式中 “ $E_x[\cdot]$ ” 表示针对隐变量 \mathbf{x} 的期望运算;

(2) M步:最大化上述 $Q(\theta|\theta^{(l)})$, 并令:

$$\theta^{(l+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta|\theta^{(l)}) \quad (10)$$

重复执行上述两步直至收敛。

此外, 对于后验协方差矩阵 \hat{C} 的求取, LOUIS 等式^[24]给出了式(8)中函数 $L(\theta)$ 的 Hessian 矩阵的求解公式:

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta \partial \theta^T} + E_x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial Q}{\partial \theta^T} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad (11)$$

通常在期望最大化算法 M 步最大化 Q 函数时已经得到函数 Q 关于 θ 的一阶导数, 因此上式第二、三项可直接利用其结果, 另外函数 Q 对参数 θ 的二阶求导一般较 $L(\theta)$ 对参数 θ 的二阶求导更为简便。因此, 通过式(11)计算 Hessian 矩阵相比于直接法往往效率更高。

期望最大化算法充分利用“分而治之”的思想, 将原问题分解为更易于求解的子问题。特别是当概率模型属于指数分布族时, E 步变为求解充分统计量的期望, 在 M 步中函数 Q 为关于未知参数 θ 二次函数, 其最优解可解析获得^[25]。贝叶斯 FFT 算法的概率模型属于指数分布族, 可利用期望最大化算法实现高效求解。在文献[21]中已经应用期望最大化算法实现单步测试贝叶斯 FFT 算法的极大后验估计 θ_{MAP} , 本文将进一步应用公式(11)完成后验协方差估计 \hat{C} , 并拓展其在多步测试中的应用。

3 贝叶斯 FFT 模态识别

运营模态分析只利用结构的动力响应, 而缺少相应激励信息, 因此在运用隐变量模型进行概率建模时很自然地会将激励或与之相关的物理量视作隐变量。本节将详细讨论在频域内构建运营模态分析中, 两类测试的隐变量模型和期望最大化算法求解的过程。

3.1 单步测试

单步测试是指用 n 个拾振器同时测量结构 n 个测点的动力响应, 且其位置不随时间改变, 是结构健康监测、动力测试中最常用的方法。

3.1.1 隐变量模型

假定采样频率为 f_s (单位: Hz), 采样时长为 T (单位: s), 测得的结构动力响应记为 $\{\hat{\mathbf{y}}_j\} \in \mathbb{R}^n$ ($j = 0, \dots, N-1; N = Tf_s$), 则其对应频域数据表达为

$$\hat{\mathcal{F}}_k = \frac{1}{\sqrt{Nf_s}} \sum_{j=0}^{N-1} \{\hat{\mathbf{y}}_j\} e^{-2\pi i j k / N}, \text{ 其中 } \hat{\mathcal{F}}_k \text{ 为频率 } f_k = kf_s / N$$

处的离散傅里叶变换值, i 为虚数单位。应用模态叠加法^[26], 对结构自振频率附近一个频带内的频域数据进行概率建模:

$$\hat{\mathcal{F}}_k = \Phi \eta_k + \epsilon_k \quad (12)$$

式中 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为振型矩阵 (m 为所选频带内模态阶数, 一般不超过 3 个); $\epsilon_k \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ 为噪声项。模态响应表达为 $\eta_k = \mathbf{h}_k \mathbf{p}_k \in \mathbb{C}^{m \times 1}$, 其中 $\mathbf{h}_k = \text{diag}(h_{1k} \ h_{2k} \ \dots \ h_{mk}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 为频响函数矩阵, $\mathbf{p}_k \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ 为模态激励。在假定线性时不变系统和经典阻尼的情况下, 频响函数可表示为:

$$h_{ik} = \frac{(2\pi i f_k)^{-q}}{(1 - \beta_{ik}^2) - 2\zeta_i \beta_{ik} i}, \beta_{ik} = \frac{f_i}{f_k} \quad (13)$$

式中 f_i 和 ζ_i 分别表示结构在所选频带内的第 i 阶自振频率和阻尼比; q 等于 0, 1 和 2 分别对应加速度、速度和位移数据。

贝叶斯 FFT 方法假定模态激励 \mathbf{p}_k 和噪声项 ϵ_k 分别服从相互独立的复高斯分布, 即 $\mathbf{p}_k \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{S})$ 和 $\epsilon_k \sim \mathcal{CN}(0, S_e \mathbf{I}_n)$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $S_e \in \mathbb{R}$ 为相应的功率谱密度, \mathbf{I}_n 表示维度为 n 的单位矩阵。给定测量频域数据 $\hat{\mathcal{F}}_k$ ($k = 1, \dots, N_f; N_f$ 为所选频带内 FFT 点数), 为识别未知参数 $\theta = \{\mathbf{f}, \boldsymbol{\zeta}, \Phi, \mathbf{S}, S_e\}$ ($\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m]^T$, $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_m]^T$), 贝叶斯 FFT 方法假定先验 $\pi(\theta)$ 为均匀分布, 然后基于 Laplace 逼近原理, 通过直接优化获得极大后验估计 θ_{MAP} , 对未知参数逐一进行二阶求导获得 Hessian 矩阵并以其伪逆作为协方差矩阵^[13] (下文称直接法)。

本文应用隐变量模型, 将模态响应 η_k 视作隐变量, 可得其完整数据对数后验分布函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \ln & \left[f(\eta_k, \hat{\mathcal{F}}_k | \theta) \pi(\theta) \right] = \\ & -(m+n) N_f \ln \pi(\theta) - n N_f \ln |S_e| - \\ & S_e^{-1} \sum_{k=1}^{N_f} \left[(\hat{\mathcal{F}}_k - \Phi \eta_k)^* (\hat{\mathcal{F}}_k - \Phi \eta_k) \right] - \\ & \sum_{k=1}^{N_f} \left[\eta_k^* \mathbf{H}_k^{-1} \eta_k + \ln |\mathbf{H}_k| \right] \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\mathbf{H}_k = \mathbf{h}_k \mathbf{S} \mathbf{h}_k^*$ 。另外, 基于复高斯分布的性质, 条件分布 $p(\eta_k | \hat{\mathcal{F}}_k, \theta)$ 仍为复高斯分布, 其均值和协方差矩阵分别为 $\mathbf{P}_k^{-1} \Phi^T \hat{\mathcal{F}}_k$ 和 $S_e \mathbf{P}_k^{-1}$, 其中 $\mathbf{P}_k = S_e \mathbf{H}_k^{-1} + \Phi^T \Phi$ 。下面在利用期望最大化算法求解

时应用这一结论。另外需要指出的是,本文曾考虑将模态激励 \boldsymbol{p}_k 视作隐变量,但发现求解过程更为复杂,且在计算效率上也无优势。因此,本文最终选择模态响应 $\boldsymbol{\eta}_k$ 为隐变量,从而简化推导过程。

3.1.2 期望最大化算法求解

在本小节中,将针对隐变量模型式(14)应用期望最大化算法实现模态参数的高效求解。

根据本文第2节介绍,在E步中求取式(14)对条件分布 $p(\boldsymbol{\eta}_k|\hat{\mathcal{F}}_k, \boldsymbol{\theta})$ 的期望构建Q函数,并在M步中通过优化未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 最大化Q函数,最后利用Louis等式计算Hessian矩阵。受篇幅所限,且公式较为冗长,本文省略推导过程,主要结果如表1所示。

表1 单步测试模态识别期望最大化算法伪代码

Tab. 1 Pseudocode of expectation-maximization algorithm for single-setup modal identification

输入: 频带数据 $\hat{\mathcal{F}}_k$;最大迭代次数 $nIter$;收敛标准 ϵ
1 初始化: 给定初始值 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, $t=0$;
2 while $t < nIter$ and $(\boldsymbol{\theta}^{(t+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(t)})/\boldsymbol{\theta}^{(t)} \geq \epsilon$ do
3 E步: 求期望 $Q(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^{(t)}) = E_{\boldsymbol{\eta}_k \hat{\mathcal{F}}_k, \boldsymbol{\theta}^{(t)}}[\mathcal{L}]$
其中 $\{\boldsymbol{\eta}_k \hat{\mathcal{F}}_k, \boldsymbol{\theta}\} \sim \mathcal{CN}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_k, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k)$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = P_k^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\hat{\mathcal{F}}_k$,
$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k = S_e P_k^{-1}$, $P_k = S_e H_k^{-1} + \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}$;
4 M步: 求解 $\partial Q(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^{(t)})/\partial \boldsymbol{\theta} = 0$ 得到 $\boldsymbol{\theta}^{(t+1)}$;
$\boldsymbol{M}_{2k} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k + \hat{\boldsymbol{\mu}}_k \hat{\boldsymbol{\mu}}_k^*$;
$\boldsymbol{\Phi}^{(t+1)} = \sum \text{Re}(\hat{\mathcal{F}}_k \hat{\boldsymbol{\mu}}_k) \left[\sum_{k=1}^{N_f} \text{Re}(\boldsymbol{M}_{2k}) \right]^{-1}$;
$S^{(t+1)} = N_f^{-1} \sum \text{Re}(\boldsymbol{h}_k^{-1} \boldsymbol{M}_{2k} \boldsymbol{h}_k^{-*})$;
$S_e^{(t+1)} = n^{-1} N_f^{-1} \sum \text{tr}(\text{Re}(\hat{\mathcal{F}}_k \hat{\mathcal{F}}_k^* - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{M}_{2k} \boldsymbol{\Phi}^T))$;
利用MATLAB fminsearch函数优化求得 $\boldsymbol{f}^{(t+1)}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}^{(t+1)}$;
5 更新 $\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \boldsymbol{\theta}^{(t+1)}$, $t = t + 1$;
6 end while
7 计算Hessian矩阵 $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2 L(\boldsymbol{\theta}) _{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{\text{MAP}}} =$
$[E_1 + E_2 + E_3] _{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{\text{MAP}}}$
其中 $E_1 = -\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, $E_2 = \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}$,
$E_3 = E_{\boldsymbol{\eta}_k \hat{\mathcal{F}}_k, \boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]$;
8 求解协方差矩阵 $\hat{C} = [-\nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2 L(\boldsymbol{\theta}) _{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{\text{MAP}}}]^{-1}$; % “+” 伪逆
输出: 模态参数后验估计 $\boldsymbol{\theta}_{\text{MAP}}$ 及其不确定性 \hat{C}

相比于直接法,由于隐变量 $\boldsymbol{\eta}_k$ 的引入,除频率和阻尼比外,其他未知参数在M步可以以解析解的形式依次被更新,避免了直接法中原有的大量迭代步,特别是对参数量巨大的振型(正比于数据通道总数)而言,有效地提高了优化效率。在求解Hessian矩阵时,由于 $p(\boldsymbol{\eta}_k|\hat{\mathcal{F}}_k, \boldsymbol{\theta})$ 是复高斯分布且其均值与协方差矩阵在E步构建Q函数已求得,因此对Q函

数求二阶导数较直接法对似然函数求二阶导更为简单。另外,需要说明的是,本文提出的隐变量模型计算框架理论上适用于多阶模态参数的同时识别,矩阵求导规则的应用更进一步统一了推导过程,因此无需如文献[8-9]所示明确区分稀疏模态和密集模态。

3.2 多步测试

在实际工程中,考虑到经济成本及现场测试环境,多步模态测试方式也广泛被采用,即通过在不同测点反复使用一定数目(少量)的传感器来分布式测量具有较大自由度数目的结构,从而获得结构的全局振型。

3.2.1 隐变量模型

多步测试中每个测步的数据建模过程与单步测试基本相同,但模态参数受温湿度等因素影响往往体现出一定的时变性,因此本文建模时直接考虑这一影响,假定频率、阻尼比等模态参数在不同测步内取不同值,但在同一测步内保持不变,同时振型不随时间而变以获得全局振型。具体而言,假定某次测试共有 n_s 个测步,结构自振频率附近一个频带内的第 r 测步频域数据可建模为:

$$\hat{\mathcal{F}}_k^{(r)} = C_r \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}_k^{(r)} + \boldsymbol{\epsilon}_k^{(r)} \quad (15)$$

式中 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为全局振型矩阵; $C_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n}$ 为传感器位置矩阵(n_r 表示测步 r 的传感器总数),如果第 i 个传感器测量全局振型的第 j 个自由度,那么 C_r 的 (i, j) 元素为1,否则为0;其余参数与式(12)具有相同含义。模态响应 $\boldsymbol{\eta}_k^{(r)} = \boldsymbol{h}_k^{(r)} \boldsymbol{p}_k^{(r)} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ 包含模态激励 $\boldsymbol{p}_k^{(r)} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ 和频响函数矩阵 $\boldsymbol{h}_k^{(r)} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 信息,频响函数的表达式与式(13)相同,反映频率 $f^{(r)}$ 和阻尼比 $\boldsymbol{\zeta}^{(r)}$ 的影响。

与单步测试类似,假定模态激励 $\boldsymbol{p}_k^{(r)}$ 和噪声项 $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(r)}$ 分别服从相互独立的复高斯分布,即 $\boldsymbol{p}_k^{(r)} \sim \mathcal{CN}(0, S^{(r)})$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(r)} \sim \mathcal{CN}(0, S_e^{(r)} \mathbf{I}_n)$,视模态响应 $\boldsymbol{\eta}_k^{(r)}$ 为隐变量并引入均匀分布先验,可得完整数据对

数后验分布函数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{r=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{N_f} \mathcal{L}_k^{(r)}$,其中:

$$\mathcal{L}_k^{(r)} = -(n_r + m) \ln \pi(\boldsymbol{\theta}) - n_r \ln S_e^{(r)} -$$

$$S_e^{(r)-1} \left[\left(\hat{\mathcal{F}}_k^{(r)} - \boldsymbol{\Phi}_r \boldsymbol{\eta}_k^{(r)} \right)^* \left(\hat{\mathcal{F}}_k^{(r)} - \boldsymbol{\Phi}_r \boldsymbol{\eta}_k^{(r)} \right) \right] - \ln |H_k^{(r)}| - \boldsymbol{\eta}_k^{(r)*} H_k^{(r)-1} \boldsymbol{\eta}_k^{(r)} \quad (16)$$

式中 N_{f_r} 表示第 r 测步所选频带内FFT数据点数,并引入局部振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_r = C_r \boldsymbol{\Phi}$ 以简化表达式。

多步模态测试未知参数集包含 $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{f}^{(r)}, \boldsymbol{\zeta}^{(r)}, S^{(r)}, S_e^{(r)}, \boldsymbol{\Phi}, r=1, \dots, n_s\}$,总数量为

$n_s(m+1)^2 + nm$ 。当多步测试自由度 n 和测步数 n_s 较大时,庞大的未知参数数量给贝叶斯模态参数识别造成巨大困难。对于密集模态问题 ($m \geq 2$),由于模态之间的相互干扰,已有直接法^[10]更是难以收敛。本文将基于上述多步模态测试的隐变量模型,应用期望最大化算法实现模态参数的极大后验估计和协方差矩阵快速求解。

3.2.2 期望最大化算法求解

基于 3.1.2 节单步测试期望最大化算法,本节将提出针对多步测试的模态参数识别算法。对比公式 (16) 和 (14) 可以看出,多步模态测试的对数后验分布函数仅比单步测试情况多一层关于测步数 r 的求和,所以其期望最大化算法 E 步和 M 步与单步测试基本相同。值得注意的是,多步测试模型估计的振型参数是全局振型 Φ ,但是 Q 函数却是关于局部振型 Φ_r 构建的,因此在 M 步获取全局振型 Φ 的解析更新形式时需要采用复合函数求导。另外关于后验协方差矩阵 \hat{C} 的求取,仍然可以使用公式 (11) 间接求取 Hessian 矩阵。多步测试模态参数识别期望最大化算法的伪代码如表 2 所示。

4 实例分析

本节将以工程实例验证本文提出的模态识别算法,并通过与现有贝叶斯 FFT 算法对比验证其准确性和高效性。

4.1 单步测试

本小节以位于浙江省海宁市的某上承式钢筋混凝土拱桥(如图 1 所示)现场测试为例验证本文单步测试模态识别方法。

该桥跨度 27 m,宽 5 m。如图 1(b) 所示,沿桥两侧等间距布置 4 个三向伺服式加速度计,其内置 24 位采集仪,外接大容量电池为其供电,以 GPS 形式进行同步。测试时间为 15 min,采样频率为 100 Hz。舍弃刚度过大的沿桥方向数据,共测量 16 个自由度。相应的功率谱密度(PSD)和奇异值谱(SV)如图 2 所示,PSD 图中,不同颜色的线代表不同自由度的功率谱密度;SV 图中,不同颜色的线代表功率谱密度矩阵的各个特征值,并以中括号形式给出了每个模态所选频带范围,奇异值谱绘制了功率谱密度矩阵的特征值随频率的变化情况,最大特征值的峰值代表结构模态的可能位置,在结构频率附近明显大于其他特征值的特征值数量代表了频带内包含的模态数(通常不超过 3 个)。频带的选取需综合考虑统计误差和模型误差,当所选频带过窄时实际采用

表 2 多步测试模态识别期望最大化算法伪代码

Tab. 2 Pseudocode of expectation-maximization algorithm for multi-setup modal identification

输入:	频带数据 $\hat{\mathcal{F}}_k^{(r)}$; 传感器位置矩阵 C_r ; 最大迭代次数 $nIter$; 收敛标准 ϵ
1	初始化: 给定初始值 $\theta^{(0)}$, $t=0$;
2	while $t < nIter$ and $(\theta^{(t+1)} - \theta^{(t)}) / \theta^{(t)} \geq \epsilon$ do
3	E 步: 求期望 $Q(\theta \theta^{(t)}) = E_{\{\eta_k^{(r)} \hat{\mathcal{F}}_k^{(r)}, \theta\}}[\mathcal{L}]$ 其中 $\{\eta_k^{(r)} \hat{\mathcal{F}}_k^{(r)}, \theta\} \sim \mathcal{CN}(\hat{\mu}_k^{(r)}, \hat{\Sigma}_k^{(r)})$, $\hat{\mu}_k^{(r)} = P_k^{-1} \Phi_r^T \hat{\mathcal{F}}_k^{(r)}$, $\hat{\Sigma}_k^{(r)} = S_e^{(r)} P_k^{-1}$, $P_k = S_e^{(r)} H_k^{(r)-1} + \Phi_r^T \Phi_r$;
4	M 步: 求解 $\partial Q(\theta \theta^{(t)}) / \partial \theta = 0$ 得到 $\theta^{(t+1)}$; $M_{2k}^{(r)} = \hat{\Sigma}_k^{(r)} + \hat{\mu}_k^{(r)} \hat{\mu}_k^{(r)*}$; $A_r = S_e^{(r)-1} C_r^T C_r$, $B_r = \sum_{k=1}^{N_p} \text{Re}(M_{2k}^{(r)})$; $P = \sum_{r=1}^{n_s} \left[S_e^{(r)-1} \sum_{k=1}^{N_p} \text{Re}(C_r^T \hat{\mathcal{F}}_k^{(r)} \hat{\mu}_k^{(r)*}) \right]$ for $i = 1:n$ do $\Phi^{(t+1)}(i,:) = P(i,:) \left[\sum_{r=1}^{n_s} (A_r(i,i) B_r) \right]^{-1}$ end for $S_e^{(r)(t+1)} = N_{fr}^{-1} \sum \text{Re}(h_k^{(r)-1} M_{2k}^{(r)} h_k^{(r)-*})$; $S_e^{(r)(t+1)} = n_r^{-1} N_{fr}^{-1} \sum \text{tr} \left\{ \text{Re}(\hat{\mathcal{F}}_k^{(r)} \hat{\mathcal{F}}_k^{(r)*} - \Phi_r M_{2k}^{(r)} \Phi_r^T) \right\}$; 利用 MATLAB fminsearch 函数优化求得 $f^{(r)(t+1)}$ 和 $\xi^{(r)(t+1)}$;
5	更新 $\theta^{(t)} = \theta^{(t+1)}$, $t = t + 1$;
6	end while
%	计算 Hessian 矩阵 $\nabla_{\theta}^2 L(\theta) _{\theta = \theta_{MAP}}$
7	for $r = 1:n_s$ do 利用表 1 算法计算各测步对应 Hessian 矩阵 $\nabla_{\theta}^2 L_r _{\theta^{(r)} = \theta_{MAP}^{(r)}}$; $K_r = I_m \otimes C_r$; % “ \otimes ” Kronecker product $\nabla_{\theta}^2 L(\Pi_{X_r}, \Pi_{X_r}) = \nabla_{\theta}^2 L_r(I_{X_r}, I_{X_r})$; $\nabla_{\theta}^2 L(\Pi_{\phi}, \Pi_{\phi}) = \sum_r K_r^T \nabla_{\theta}^2 L_r(I_{\phi_r}, I_{\phi_r}) K_r$; $\nabla_{\theta}^2 L(\Pi_{X_r}, \Pi_{\phi}) = \sum_r \nabla_{\theta}^2 L_r(I_{X_r}, I_{\phi_r}) K_r$; % Π_{ϕ} , Π_{X_r} , I_{ϕ_r} 和 I_{X_r} 分别对应振型和其他模态参数在全局 % 参数向量 θ 和测步参数向量 $\theta^{(r)}$ 中的索引
8	end for
9	$\nabla_{\theta}^2 L(\Pi_{\phi}, \Pi_{X_r}) = \nabla_{\theta}^2 L(\Pi_{X_r}, \Pi_{\phi})^T$;
10	求解协方差矩阵 $\hat{C} = [-\nabla_{\theta}^2 L(\theta) _{\theta = \theta_{MAP}}]^{-1}$;
输出:	模态参数后验估计 θ_{MAP} 及其不确定性 \hat{C}

数据有限进而造成较高的统计误差,但当频带过宽时则易引起模型误差,因为本文模型假定模态激励和测量噪声在所选频带内满足白噪声假定。实际操作时,可以最大特征值与其他特征值的交接处作为选取频带的边界。

实际结构各个方向的激励大小可能存在显著差异,加之测量噪声对低频段影响,可能导致某些方向

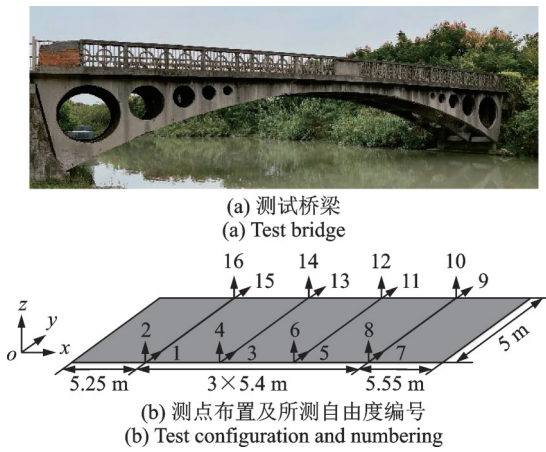


图 1 海宁拱桥测试及测点布置

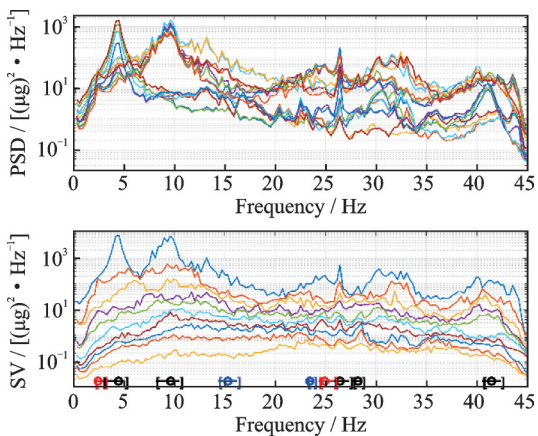


图 2 海宁拱桥的功率谱密度和奇异值谱

的响应被掩盖。如图 2 中 0~5 Hz 的两阶模态,前一阶模态的峰值明显被后一阶模态掩盖。为了解决此问题,本文仅采用一个方向的数据识别这些模态。图 2 奇异值谱中以圆圈代表各阶频率的初始值,其中黑色代表使用全部测量通道数据进行模态分析,共 5 个;红色代表只用 z 方向(竖桥向),共 2 个;蓝色代表只用 y 方向(横桥向),共 2 个。

因竖桥向和横桥向的刚度相差较大,本文所选频段皆为稀疏模态。由于期望最大化算法结果与直接法结果在所考虑数值精度内完全相同,而直接法结果的正确性已被反复验证^[7],所以本文方法的合理性也可因此得到证明。本文只列出由期望最大化算法求得的 9 阶模态,如表 3 所示。

变异系数为标准差除以均值,代表了模态参数的识别不确定性。表 3 给出的变异系数为采用 Louis 等式计算所得。耗时定义为针对某阶模态同一电脑运行两种方法 10 次的平均时间。对于单个稀疏模态,本文方法与直接法计算效率近似,但在总计算时间上比直接法节省约 5.4 s。

模态振型的识别结果如图 3 所示。各阶模态以模态振型的形态命名,如 TY1 表示 y 方向平动一阶, R3 表示扭转三阶。括号中为振型识别的变异系数,

表 3 海宁拱桥模态参数识别结果

Tab. 3 Identified modal parameters of Haining Arch Bridge

模态	频率		阻尼比		耗时	
	识别结果/Hz	变异系数/%	识别结果/%	变异系数/%	直接法/s	本文方法/s
1	2.53	3.60	8.63	6.33	1.71	1.93
2	4.27	1.70	5.21	4.04	4.22	4.69
3	9.28	1.60	5.96	3.99	5.61	6.11
4	15.37	1.20	2.49	6.09	4.07	4.28
5	23.43	0.95	1.53	15.61	4.28	1.50
6	24.65	1.30	3.18	6.89	5.37	4.22
7	26.40	0.14	0.23	6.90	2.53	2.99
8	28.16	0.52	1.04	8.59	1.66	1.79
9	41.45	0.72	2.08	7.62	6.88	3.42

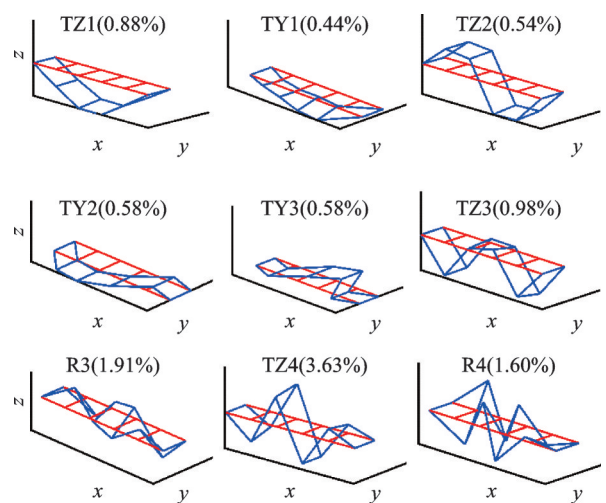


图 3 海宁拱桥的振型识别结果

Fig. 3 Identified mode shapes of Haining Arch Bridge

定义为振型后验协方差矩阵迹的平方根^[12]。需要指出的是,振型 TZ1, TZ3, TY2 和 TY3 因激励过小被其他模态掩盖而取单个方向的数据分析。结果中缺少一阶和二阶扭转振动可能是因为在测试时间内未被环境激励充分激发。

4.2 多步测试

本小节以浙江大学海宁国际校区钟楼(如图 4 所示)为例验证本文多步测试模态识别方法。该建筑呈立方体形,长宽均为 4 m,共计 8 层。使用 8 个三向伺服式加速度计分 5 个测步对其进行测试,共计 120 个自由度。

各测步加速度计放置在螺旋向上的楼梯处,图 5 展示了各个测步测点的布置位置,图中数字代表高度,单位为 m。测步 1 布置在最上面两层的四个角落(即图中 F-7 和 F-8 的 4 个方块),其余四个测步沿旋转楼梯平台布置。测步 1 的 8 个位置分别作为其他四个测步的参考点位置,保证其与每个测步至少有一个振型值不为零的公共测点,以便集成全局振型。

每个测步测试 15 min,加上在每两个测步之间



图4 浙江大学海宁国际校区钟楼

Fig. 4 Bell Tower at Zhejiang University, Haining International Campus

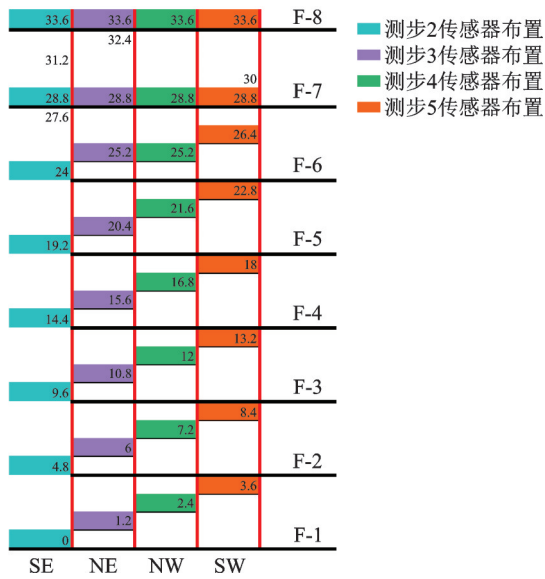


图5 钟楼各测步测点布置图

Fig. 5 Test configuration of Bell Tower in each test step

移动和调节仪器等工作,该测试大约花费3h。测步1采集数据的功率谱密度和奇异值谱如图6所示,所选频带和初始频率值以中括号和圆圈表示。与单步测试算例相同,黑色代表使用全部测量通道数据进行模态分析,共5个;红色代表仅采用z方向(竖向)数据,共1个。由于结构在水平x和y方向的刚度和质量分布相似,所以产生了明显的密集模态,体现在奇异值谱中同一共振频带内有超过一个特征值明显大于其他特征值,如所选的第1,4和6个频带,均包含两阶模态。

本文方法与直接法识别的后验均值在所考虑精度内完全一样,故此处只列出本文期望最大化算法识别到的9阶模态,如表4和图7所示,各阶模态以模态振型的形态命名。可以看出频率和阻尼比均体现出一定的时变特性,由于识别误差的影响,阻尼比的变化范围相对更大。需要指出的是,模态参数的时变特性和识别变异系数实际上表征了两种不同的不确定性,即偶然不确定性和认知不确定性。前者

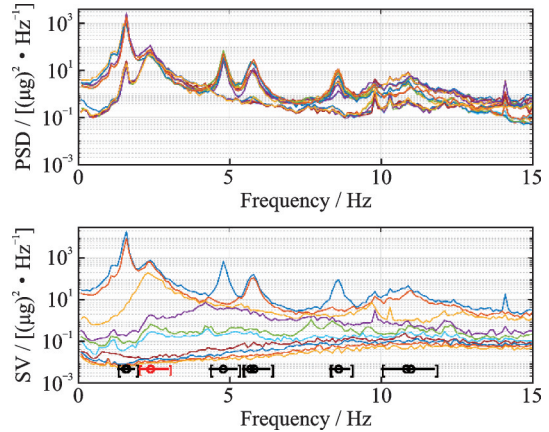


图6 钟楼的PSD和SV谱(测步1)

Fig. 6 PSD and SV spectrum of Bell Tower (setup 1)

表4 钟楼模态参数识别结果

Tab. 4 Identified modal parameters of Bell Tower

模态参数	模态名称	测步				
		1	2	3	4	5
频率/ Hz	X1	1.55	1.54	1.54	1.54	1.54
	Y1	1.60	1.58	1.59	1.58	1.58
	Z1	2.39	2.40	2.30	2.27	2.23
	R1	4.80	4.81	4.80	4.79	4.79
	X2	5.75	5.72	5.70	5.70	5.71
	Y2	5.77	5.74	5.72	5.72	5.71
	R2	8.58	8.56	8.56	8.55	8.54
	X3	10.72	10.67	10.70	10.65	10.52
	Y3	10.77	10.85	10.92	10.77	10.64
阻尼比/ %	X1	1.89	1.61	1.47	1.61	1.54
	Y1	1.16	1.85	1.67	1.67	1.43
	Z1	7.51	11.72	10.07	6.26	7.20
	R1	0.92	1.11	1.00	1.50	1.09
	X2	1.59	1.65	2.05	1.96	2.43
	Y2	1.58	1.68	1.97	2.17	2.19
	R2	1.06	1.23	1.65	1.42	1.36
	X3	4.43	3.79	3.42	3.97	4.38
	Y3	6.00	4.60	5.01	4.88	4.51

属于结构的自身属性,难以有效降低,例如变化的温度可以导致结构弹性模量改变,进而引起结构频率的时变特性;后者表征在特定模型假设和给定数据下识别量的变异性,可通过改变模型、增加数据等方式有效降低其影响。

另外本文以第1,2阶密集模态和第3阶稀疏模态的阻尼比识别变异系数为例进行不确定性分析,结果如表5所示。可以看出,两种方法计算结果极为接近(相差小于1%)。对于稀疏模态,变异系数计算时间相近,均为7s左右;但对于密集模态,本文所提方法有明显优势,计算时间仅为直接法的1/3左右。

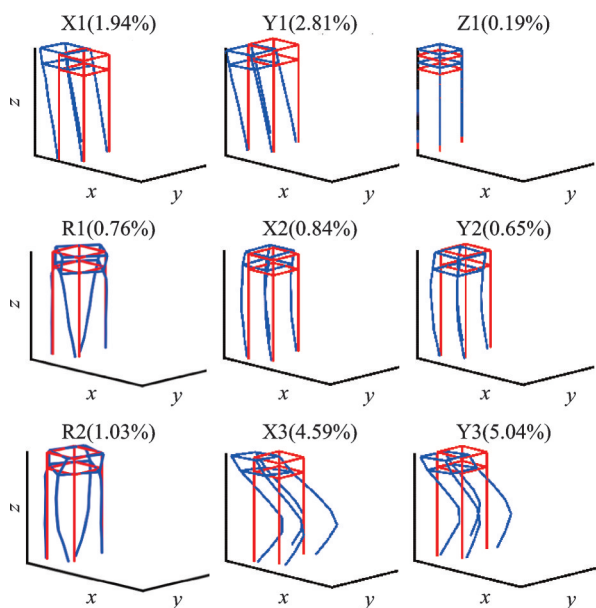


图 7 钟楼的振型识别结果

Fig. 7 Identified mode shapes of Bell Tower

表 5 阻尼比识别不确定性

Tab. 5 Identification uncertainty of damping ratio

测步	直接法			本文方法		
	X1	Y1	R1	X1	Y1	R1
1	8.73	10.56	7.61	8.73	10.54	7.61
2	9.29	8.68	7.20	9.29	8.71	7.20
3	9.79	9.23	7.44	9.79	9.23	7.44
4	9.31	9.09	6.71	9.30	9.08	6.71
5	9.40	9.63	7.24	9.37	9.64	7.24
耗时/s	32.42		7.21	10.45		7.42

5 结 论

本文构建了贝叶斯运营模态识别的隐变量模型框架,应用期望最大化算法求解了模态参数的极大后验估计和后验协方差矩阵,为模态识别单步测试和多步测试提供了统一的贝叶斯推断方法。通过理论分析和实验验证,可得出以下结论:

(1)隐变量模型为贝叶斯运营模态分析提供了清晰的统一框架,将结构模态响应视作隐变量,经合理处理可极大降低模态参数识别难度;

(2)期望最大化算法为已有贝叶斯FFT模态识别算法提供了替代解法,两者对稀疏模态的识别效果相当,但前者在密集模态条件下表现更优。

本文应用Laplace逼近原理,采用期望最大化算法求解运营模态,识别隐变量模型。除此之外,变分贝叶斯和吉布斯采样等也常用于隐变量模型推断,这将在以后做进一步探究。

参考文献:

[1] 茅建校,桂桂,王浩,等.大跨度斜拉桥模态参数长期追踪及其变异性分析[J].振动工程学报,2024,37(1):52-59.
MAO Jianxiao, GUI Gui, WANG Hao, et al. Long-term tracking and variability analysis of modal parameters of a long-span cable-stayed bridge[J]. Journal of Vibration Engineering, 2024,37(1):52-59.

[2] 杨超,陈政清,华旭刚,等.超长拉索多模态控制的黏滞阻尼器参数优化研究[J].振动工程学报,2021,34(6):1124-1132.
YANG Chao, CHEN Zhengqing, HUA Xugang, et al. Parameters optimization of viscous dampers for multi-modal control of ultra-long stay cables[J]. Journal of Vibration Engineering, 2021,34(6):1124-1132.

[3] 陈辉,张衡,李焯君,等.测量模态不确定的梁式结构随机有限元模型修正[J].振动工程学报,2019,32(4):653-659.
CHEN Hui, ZHANG Heng, LI Yejun, et al. Stochastic finite element model updating of beam structure based on uncertain measurement modes[J]. Journal of Vibration Engineering, 2019,32(4):653-659.

[4] YUEN K V, KATAFYGIOTIS L S. Bayesian time-domain approach for modal updating using ambient data[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(3):219-231.

[5] YUEN K V, KUOK S C. Bayesian methods for updating dynamic models[J]. Applied Mechanics Reviews, 2011, 64(1):010802.

[6] KATAFYGIOTIS L S, YUEN K V. Bayesian spectral density approach for modal updating using ambient data[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2010, 30(8):1103-1123.

[7] AU S K. Operational Modal Analysis[M]. Singapore: Springer, 2017.

[8] AU S K. Fast Bayesian FFT method for ambient modal identification with separated modes[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2011, 137(3):214-226.

[9] AU S K. Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, part I: posterior most probable value[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 26(1):60-75.

[10] ZHANG F L, AU S K, LAM H F. Assessing uncertainty in operational modal analysis incorporating multiple setups using a Bayesian approach[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2015, 22(3):395-416.

[11] ZHU Y C, AU S K. Spectral characteristics of asynchronous data in operational modal analysis[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2017, 24(11):e1981.

- [12] YUEN K V, KATAFYGLOTIS L S. Bayesian fast Fourier transform approach for modal updating using ambient data[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2023, 6(2): 81-95.
- [13] AU S K. Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, part II : posterior uncertainty [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 26(1):76-90.
- [14] EVERIT B S. *An Introduction to Latent Variable Models*[M]. Dordrecht: Springer, 1984.
- [15] BLEI D M. Build, compute, critique, repeat: data analysis with latent variable models[J]. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 2014, 1(1):203-232.
- [16] KULLAA J. Eliminating environmental or operational influences in structural health monitoring using the missing data analysis[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2008, 20(11):1351-1360.
- [17] NAIR K K, KIREMIDJIAN A S. Time series based structural damage detection algorithm using Gaussian mixtures modeling[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2007, 129(3):285-293.
- [18] BECK J L. Bayesian system identification based on probability logic[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2010, 17(7):825-847.
- [19] JAYNES E T. *Probability Theory: The Logic of Science*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [20] DEMPSTER A P, LAIRD N M, RUBIN D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B: Methodological*, 1977, 39(1):1-38.
- [21] LI B B, AU S K. An expectation-maximization algorithm for Bayesian operational modal analysis with multiple (possibly close) modes[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 132: 490-511.
- [22] LI B B, DER KIUREGHIAN A. Operational modal identification using variational Bayes[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 88: 377-398.
- [23] LI B B, DER KIUREGHIAN A, AU S K. A Gibbs sampling algorithm for structural modal identification under seismic excitation[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2018, 47(14): 2735-2755.
- [24] LOUIS T A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm[J]. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B: Methodological*, 1982, 44(2): 226-233.
- [25] BERNARDO J M, SMITH A F. *Bayesian Theory*[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- [26] CHOPRA A K. *Dynamics of Structures*[M]. Pearson Education India, 2007.

Latent variable model and its application to Bayesian operational modal analysis

ZHU Wei¹, LI Bin-bin^{1,2,3}, XIE Yan-long⁴, CHEN Xiao-yu¹

(1.ZJU-UIUC Institute, Zhejiang University, Haining 314400, China;

2.Center for Balance Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

3.The Architectural Design and Research Institute of Zhejiang University Co., Ltd., Hangzhou 310058, China;

4.College of Civil and Transportation Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: As a method for operational modal analysis (OMA), the Bayesian FFT algorithm has garnered significant attention for its high accuracy and efficiency, as well as its ability of uncertainty quantification. However, different cases of OMA (e.g. well-separated mode, closely-spaced modes, and multi-setup OMA) require different optimization strategy, and it is tedious in computer coding. A new framework is proposed in this paper to unify the above-mentioned cases of OMA, and the implement is simplified as a consequence. Regarding the structural modal response as a latent variable, the single-setup and multi-setup Bayesian OMA is cast as latent variable models, which have been deeply investigated in statistics. An expectation-maximization (EM) algorithm is developed for both single-setup and multi-setup OMA. The introduction of latent variables decouples the parameter optimization in EM, and Louis identity is employed to calculate the Hessian matrix. Two field tests are applied to verify the performance of the proposed approach, with a comparison to the existing algorithm. Consistent results are obtained, and a great advantage in efficiency is observed in the case of closely-spaced modes. The proposed latent variable model unifies the cases of Bayesian OMA, with the advantage of simplified implementation and fast computation. It also paves a way for a further improvement of Bayesian OMA, e.g. with the approach of variational Bayes or Gibbs sampling.

Key words: operational modal analysis; parameter identification; latent variable model; expectation maximization; uncertainty

作者简介: 朱 伟(1998—),男,硕士。E-mail:weiz.20@intl.zju.edu.cn。

通讯作者: 谢炎龙(1988—),男,博士,副研究员。E-mail:yanlongxie@szu.edu.cn。