

非平稳地震激励下惯容耗能结构动力响应解析法

李创第¹, 王瑞勃¹, 葛新广², 江丽富¹

(1. 广西科技大学土木建筑工程学院, 广西 柳州 545006; 2. 柳州工学院土木建筑工程学院, 广西 柳州 545616)

摘要: 针对惯容减震系统在非平稳地震激励下动力响应研究不足的问题, 提出设有混联 I 型惯容减震系统的多自由度耗能结构动力响应时变方差的解析解法。根据惯容减震系统的本构关系、结构的动力方程及非平稳地震激励, 综合利用复模态法和虚拟激励法, 将惯容耗能结构解耦为一阶系统, 以便获得结构位移、速度、层间剪力等响应量的统一解。采用二次式分解法将统一解的时变功率谱密度函数转化为惯容耗能结构复模态特征值、模态系数、时变模态强度系数和含有圆频率平方项的二次式乘积的线性组合。在此基础上, 利用非平稳模态谱矩在无限积分区间有解析解的特征, 推导出非平稳地震激励下耗能结构响应时变方差的解析解。通过采用突加型白噪声激励对结构动力响应进行分析, 验证了所提动力响应功率谱和时变方差的正确性。同时, 基于突加型 Kanai-Tajimi 模型的框架结构动力响应研究, 分析了惯容系统参数对减震效果的影响。所提方法可适用于线性结构在其他非平稳调制函数的地震动下的响应分析。

关键词: 惯容减震系统; 非平稳地震激励; 功率谱二次式分解法; 时变方差; 解析解法

中图分类号: TU311.3; O324 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)11-1862-13

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.11.007

引言

惯容器作为实用有效的被动控制装置, 在结构中可采用与传统消能装置相同的安装方式。在外部激励作用下, 惯容器通过两端点之间的加速度差值产生作用力, 从而降低结构的动力响应^[1-3]。IKAGO 等^[4]提出了调谐黏性质量阻尼器 (Tuned Viscous Mass Damper, TVMD), 并验证了单自由度结构中 TVMD 在谐波地震激励下抗震的有效性。LAZAR 等^[5]将惯容-弹簧-阻尼 3 个元件相互连接构成调谐惯容阻尼器 (Tuned Inerter Damper, TID), 经研究表明 TID 在地震激励作用下能够达到极好的减震效果。LI 等^[6]探索了调谐黏性质量阻尼器 (TVMD)、调谐惯容阻尼器 (TID) 和调谐质量阻尼器 (Tuned Mass Damper, TMD) 3 种控制系统在白噪声激励下对结构响应的影响, 同时基于不同控制目标对 3 种控制系统进行了优化设计。DE DOMENICO 等^[7]以双过滤白噪声激励作为地震加速度, 研究了基础隔震结构中调谐惯容质量阻尼器 (Tuned Mass Damper Inerter, TMDI) 的抗震性能, 研究表明 TMDI 的抗震效果比 TMD 更好, 同时能够避免长周期地震作用下可能发生的共振行为。为进一步加强惯容器的振动控制效果, 国内外学者将

惯容元件、耗能元件和弹簧元件连接协同工作构成惯容减震系统, 其中经典的惯容减震系统有: 串联型惯容减震系统^[8]、混联 I 型惯容减震系统 (SPIS-I)^[9]和混联 II 型惯容减震系统 (SPIS-II)^[10]。文献 [11-12] 对 3 种惯容减震系统在平稳随机地震激励作用下的耗能增效现象进行了研究, 阐明了耗能增效理论并推导了与之相关的解析表达式。为促进惯容减震系统在工程中的应用, 文献 [13-14] 对其振动控制性能和参数设计^[15]也进行了研究, 研究表明, 惯容减震系统可以显著降低结构的动力响应, 在结构的振动控制中具有良好的应用前景。

上述研究基于平稳地震激励 (如白噪声激励、Kanai-Tajimi 激励、双过滤白噪声激励等), 虽简化了分析过程, 但平稳地震激励与实际地震过程存在一定差异。实际地震过程具有明显的非平稳特性, 故拟合地震的随机模型应呈非平稳状态。目前已经提出了多种拟合非平稳随机过程的功率谱模型^[16-18], 其中, PRIESTLEY^[18]提出的演变功率谱模型, 用“频率”和“能量”的概念解释了演变随机过程的时变均方能量分布, 该模型在地震工程的动力响应分析中尤为重要。演变功率谱模型可分为均匀调制非平稳^[19-21]和完全非平稳^[22]两类。其中, 均匀调制非平稳的谱密度函数等于与时间 t 相关的调制函数和与圆频率 ω 相关的平稳地震激励谱密度函数的

乘积。现有的调制函数主要包括阶跃型调制函数^[21]、余弦型调制函数^[21-23]、Shinozuka-Sato 调制函数^[22-23]及 Iyengar 型调制函数^[23]等。时域法和频域法是求解非平稳随机结构动力响应的主要方法。方同等^[20,22]利用复模态法和杜哈梅积分,求解了响应及激励的协方差,分析了结构基于非平稳激励的动力响应。由于现存的地震激励模型以功率谱形式存在,采用时域法分析结构随机响应时,需对地震激励的功率谱密度函数进行转换,增加了计算量。文献[24-26]从频域角度提出虚拟激励法,通过构造虚拟激励,将求解非平稳响应功率谱密度函数的问题转化为确定性外荷载作用下的瞬态响应分析,简化了计算过程。响应的功率谱密度函数和时变方差是非平稳随机响应分析的重要参数。虚拟激励法计算响应时变方差是在已知响应功率谱的前提下,对其在整个频率范围内进行积分,为获得准确的结果需取较大的积分上限值和非常小的积分步长,导致计算效率较低。葛新广等^[27]在研究平稳地震过程中提出功率谱二次式分解法,该方法能避开平稳激励下响应谱矩和方差的复杂计算,但并未研究非平稳激励下耗能结构的动力特性。

本文为研究设有惯容减震系统的耗能结构在非平稳地震作用下的动力特性,同时为提高时变方差的计算效率和计算精度,以设有混联 I 型惯容减震系统的耗能结构为例,对均匀调制非平稳随机地震激励下的结构响应做完整的推导,并获得功率谱及时变方差的解析解。应用多自由度数值算例及框架结构算例,证明了本文所求动力响应解析解的有效性,对参数及减震效果也进行了分析。

1 动力方程

惯容减震系统^[8-9](简称惯容系统)由阻尼、弹簧、惯容 3 种力学元件连接组成,将其设置于多自由度结构中构成惯容耗能结构,该结构在地震加速度 \ddot{x}_g 作用下的动力方程为:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + I_1 F_s = -MI\ddot{x}_g \quad (1)$$

式中 M, K 及 C 分别表示结构的质量矩阵、抗侧刚度矩阵及阻尼矩阵; $M = \text{diag}[m_i]$, 其中 m_i 为结构第 i 层的质量 ($i = 1, 2, \dots, n$); $K_{n \times n} =$

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -K_n & K_n \end{bmatrix}, \text{其中 } K_n \text{ 为结构第}$$

n 层抗侧刚度; C 依据 Rayleigh 阻尼模型计算, $C = aM + bK$, 其中 a, b 为 Rayleigh 系数; x, \dot{x} 及 \ddot{x} 分别表示结构的位移向量、速度向量及加速度向量; $I_1,$

F_s 及 I 分别表示惯容系统的影响向量、惯容力向量及常数向量。

混联 I 型惯容系统设置于结构第 i 层的构造简图如图 1 所示。

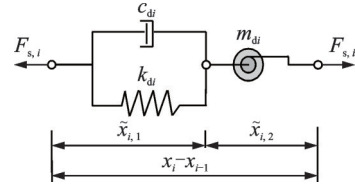


图 1 混联 I 型惯容系统第 i 层的构造简图

Fig. 1 Schematic layout of SPIS-I in the i th storey

式(1)中的惯容力为:

$$F_{s,1} = k_{d1}\tilde{x}_{1,1} + c_{d1}\dot{\tilde{x}}_{1,1} = m_{d1}\ddot{\tilde{x}}_{1,2}, \quad \tilde{x}_{1,1} + \tilde{x}_{1,2} = x_1 \quad (2)$$

$$F_{s,i} = k_{di}\tilde{x}_{i,1} + c_{di}\dot{\tilde{x}}_{i,1} = m_{di}\ddot{\tilde{x}}_{i,2}, \quad \tilde{x}_{i,1} + \tilde{x}_{i,2} = x_i - x_{i-1} \quad (3)$$

式中 $F_{s,1}$ 和 $F_{s,i}$ 分别为首层和第 i 层的惯容力; $\tilde{x}_{i,1}$ 和 $\tilde{x}_{i,2}$ 分别为惯容系统中弹簧元件和惯容元件两端的相对位移,二者之和等于结构的层间位移。 k_{di}, c_{di} 及 m_{di} 分别表示结构第 i 层惯容系统的刚度系数、阻尼系数及惯容系数。

将式(2)和(3)用矩阵形式表示为:

$$F_s = K_d \tilde{x}_1 + C_d \dot{\tilde{x}}_1 = M_d \ddot{\tilde{x}}_2 \quad (4)$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = I_1^T x \quad (5)$$

式中 C_d, K_d 及 M_d 分别表示惯容系统的阻尼系数矩阵、刚度系数矩阵及惯容系数矩阵; \tilde{x}_1 为弹簧元件的位移向量, $\tilde{x}_1 = [\tilde{x}_{1,1} \dots \tilde{x}_{i,1} \dots \tilde{x}_{n,1}]^T$; \tilde{x}_2 为惯容元件的位移向量, $\tilde{x}_2 = [\tilde{x}_{1,2} \dots \tilde{x}_{i,2} \dots \tilde{x}_{n,2}]^T$ 。

根据式(4)和(5),惯容系统的各参数矩阵与结构加速度矩阵 \ddot{x} 之间的关系为:

$$M_d \ddot{\tilde{x}}_1 + K_d \tilde{x}_1 + C_d \dot{\tilde{x}}_1 = M_d I_1^T \ddot{x} \quad (6)$$

将式(6)代入式(1),动力方程为:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + I_1(K_d \tilde{x}_1 + C_d \dot{\tilde{x}}_1) = -MI\ddot{x}_g \quad (7)$$

2 非平稳结构响应统一解

2.1 复模态分析

混联 I 型惯容减震系统被设置于多自由度结构中,构成非对称、非经典阻尼系统,需运用复模态法^[20,22,28]对式(7)解耦,现引入状态变量 y :

$$y = [x \quad \dot{x} \quad \tilde{x}_1 \quad \dot{\tilde{x}}_1]^T \quad (8)$$

联立式(6),(7)和(8),状态方程为:

$$M_0 \dot{y} + K_0 y = a\ddot{x}_g \quad (9)$$

式中 M_0 和 K_0 为 $4n \times 4n$ 阶矩阵,其值分别为:

$$M_0 = \begin{bmatrix} C & M & I_1 C_d & o_1 \\ o_1 & -M_d I_1^T & o_1 & M_d \\ M & o_1 & o_1 & o_1 \\ o_1 & o_1 & M_d & o_1 \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} K & o_1 & I_1 K_d & o_1 \\ o_1 & o_1 & K_d & C_d \\ o_1 & -M & o_1 & o_1 \\ o_1 & o_1 & o_1 & -M_d \end{bmatrix},$$

$\alpha = [-MI \ o_2 \ o_2 \ o_2]^T$, M_0 , K_0 及 α 中包含的 o_1 为 $n \times n$ 阶零矩阵, o_2 为 $n \times 1$ 阶零矩阵。

式(9)中存在右模态矩阵 U 、左模态矩阵 V 及特征值矩阵 p , 三者具有以下关系:

$$p = -(V^T M_0 U)^{-1} V^T K_0 U \quad (10)$$

复模态变换:

$$y = Uz \quad (11)$$

式中 z 为模态变量。

联立式(6), (10)和(11), 并在方程两边乘以 V^T 可得:

$$\dot{z} - pz = \eta \ddot{x}_g \quad (12)$$

式中 η 为模态系数矩阵, $\eta = V^T \alpha / (V^T M_0 U)$ 。

式(12)的分量形式为:

$$\dot{z}_k - p_k z_k = \eta_k \ddot{x}_g; \quad k = 1, 2, \dots, 4n \quad (13)$$

式中 p_k 为振动特征值, 其值为复数, 实部为负。

2.2 均匀调制非平稳地震激励下的结构响应

工程上具有多种非平稳地震激励, PRIESTLEY^[18]提出的演变功率谱密度模型用“频率”与“能量”的概念解释了演变随机过程的时变均方能量分布, 其谱密度函数 $\Phi_{\ddot{x}_g}(\omega, t)$ 可表示为:

$$\Phi_{\ddot{x}_g}(\omega, t) = a(\omega, t) a^*(\omega, t) S_{\ddot{x}_g}(\omega) = |a(\omega, t)|^2 S_{\ddot{x}_g}(\omega) \quad (14)$$

式中 $S_{\ddot{x}_g}(\omega)$ 为平稳随机过程的谱密度函数; $a(\omega, t)$ 为调制函数, $a^*(\omega, t)$ 为 $a(\omega, t)$ 的共轭项。

式(14)中调制函数 $a(t)$ 取单位阶跃函数:

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (15)$$

根据虚拟激励法^[24-26], $\ddot{x}_g(\omega, t)$ 可表示为:

$$\ddot{x}_g(\omega, t) = \sqrt{\Phi_{\ddot{x}_g}(\omega, t)} e^{i\omega t} \quad (16)$$

将式(16)代入式(13), 求解非齐次线性方程, 获得模态变量 z_k :

$$z_k(\omega, t) = \eta_k \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} \int_0^t e^{p_k(t-\tau)} a(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \quad (17)$$

化简式(17)得:

$$z_k(\omega, t) = I_k(\omega, t) \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} \quad (18)$$

由式(15), (17)及(18)得 $I_k(\omega, t)$ 为:

$$I_k(\omega, t) = \eta_k \int_0^t e^{p_k(t-\tau)} a(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau = \eta_k \frac{e^{i\omega t} - e^{p_k t}}{i\omega - p_k} \quad (19)$$

联立式(8), (9)及(18), 获得结构各层相对地面的位移及速度分别为:

$$x_i(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4n} u_{i,k} z_k(\omega, t); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20a)$$

$$\dot{x}_i(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4n} u_{n+i,k} z_k(\omega, t); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20b)$$

式中 $u_{i,k}$ 表示 U 第 i 行第 k 列的元素。

层间位移及层间速度分别为:

$$\Delta x_i(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4n} (u_{i,k} - u_{i-1,k}) z_k(\omega, t); \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (21a)$$

$$\Delta \dot{x}_i(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4n} (u_{n+i,k} - u_{n+i-1,k}) z_k(\omega, t); \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (21b)$$

式中 $\Delta x_1 = x_1$, $\Delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1$, 其中 x_1 和 \dot{x}_1 分别为结构第1层的层间位移和层间速度。

层间剪力为:

$$V_1(\omega, t) = K_1 \sum_{k=1}^{4n} u_{1,k} z_k(\omega, t); \quad i = 1 \quad (22a)$$

$$V_i(\omega, t) = K_i \sum_{k=1}^{4n} (u_{i,k} - u_{i-1,k}) z_k(\omega, t); \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (22b)$$

层间位移角为:

$$\theta_1(\omega, t) = \frac{1}{h_1} \sum_{k=1}^{4n} u_{1,k} z_k(\omega, t); \quad i = 1 \quad (23a)$$

$$\theta_i(\omega, t) = \frac{1}{h_i} \sum_{k=1}^{4n} (u_{i,k} - u_{i-1,k}) z_k(\omega, t); \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (23b)$$

式中 h 表示层高。

由式(20)~(23)可知, 在非平稳随机激励下耗能结构的动力响应(位移、速度、层间位移、层间速度、层间剪力及层间位移角)表达式相似, 可统一表示为:

$$\bar{X}_l(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4n} \kappa_{l,k} z_k(\omega, t); \quad l = 1, 2, \dots, 6 \quad (24)$$

式中 $\bar{X}_l(\omega, t)$ 为响应量; $\kappa_{l,k}$ 为各响应分量对应的模态系数: $\kappa_{1,k}$ 为位移模态系数, $\kappa_{2,k}$ 为速度模态系数, $\kappa_{3,k}$ 为层间位移模态系数, $\kappa_{4,k}$ 为层间速度模态系数, $\kappa_{5,k}$ 为层间剪力模态系数, $\kappa_{6,k}$ 为层间位移角模态系数。

3 结构动力响应功率谱

由随机振动理论^[22]可知, 结构动力响应的自功率谱密度函数为:

$$S_{\bar{X}_i, \bar{X}_i}(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4n} \sum_{j=1}^{4n} \kappa_{l,k} \kappa_{l,j} z_k(\omega, t) z_j^*(\omega, t) \quad (25)$$

式中 $z_j^*(\omega, t)$ 与 $z_k(\omega, t)$ 互为共轭。

将式(18)代入式(25):

$$S_{\bar{X}_i, \bar{X}_i}(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4n} \sum_{j=1}^{4n} \kappa_{l,k} \kappa_{l,j} A_{jk}(\omega, t) S_{\bar{X}_k}(\omega) \quad (26)$$

其中:

$$A_{jk}(\omega, t) = I_k(\omega, t) I_j^*(\omega, t) \quad (27)$$

存在恒等式:

$$\sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_l b_j = \sum_{l=1}^N d_l b_l + \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=l+1}^N (d_l b_j + b_l d_j) \quad (28)$$

依据式(28)将式(26)分解为:

$$S_{\bar{X}_i, \bar{X}_i}(\omega, t) = S_{\bar{X}_k}(\omega) \times \left[\sum_{j=1}^{4n} \kappa_j^2 A_{jj}(\omega, t) + \sum_{j=1}^{4n-1} \sum_{k=j+1}^{4n} \kappa_j \kappa_k (A_{jk}(\omega, t) + A_{kj}(\omega, t)) \right] \quad (29)$$

依据式(27)和(19)对参数 $A_{jj}(\omega, t)$ 及 $A_{jk}(\omega, t) + A_{kj}(\omega, t)$ 进行求解,将其转化为包含复模态特征值和圆频率平方项的二次式,具体过程见附录 A,结果为:

$$A_{jj}(\omega, t) = \eta_j^2 \frac{a_{1j}(t) + a_{2j}(t) \cos(\omega t)}{p_j^2 + \omega^2} \quad (30)$$

$$A_{jk}(\omega, t) + A_{kj}(\omega, t) =$$

$$\frac{2\eta_j \eta_k}{p_k + p_j} \left\{ a_{5jk} \left[\frac{\omega \sin(\omega t)}{p_k^2 + \omega^2} - \frac{\omega \sin(\omega t)}{p_j^2 + \omega^2} \right] + [a_{3jk} + a_{4jk} \cos(\omega t)] \left(\frac{p_k}{p_k^2 + \omega^2} + \frac{p_j}{p_j^2 + \omega^2} \right) \right\} \quad (31)$$

式中 $a_{1j}(t) = 1 + e^{2p_j t}$; $a_{2j}(t) = -2e^{p_j t}$; $a_{3jk} = 1 + e^{(p_k + p_j)t}$; $a_{4jk} = -e^{p_k t} - e^{p_j t}$; $a_{5jk} = e^{p_k t} - e^{p_j t}$ 。

参数 $a_{1j}(t)$, $a_{2j}(t)$, $a_{3jk}(t)$, $a_{4jk}(t)$, $a_{5jk}(t)$ 仅与复振动特征值 p_j 和时间 t 有关,与平稳地震激励参数无关,故将以上参数称之为时变模态强度系数。将时变模态强度系数、复振动特征值 p_j 及模态系数 η_j 等代入式(29),即可得到动力响应功率谱密度函数的二次式分解。

4 结构动力响应时变方差

由随机振动理论^[22]可知,动力响应时变方差 $M_{\bar{X}_i, 0}$ 与响应 0 阶谱矩相同,动力响应变化率的时变方差 $M_{\dot{\bar{X}}_i, 0}$ 与 2 阶谱矩结果一致,耗能结构动力响应的时变方差表达式为:

$$M_{\bar{X}_i, 0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\bar{X}\bar{X}}(\omega, t) d\omega \quad (32a)$$

$$M_{\dot{\bar{X}}_i, 0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{\bar{X}}\dot{\bar{X}}}(\omega, t) d\omega \quad (32b)$$

式中 $M_{\bar{X}_i, 0}$ 为动力响应的时变方差(0 阶谱矩); $M_{\dot{\bar{X}}_i, 0}$ 为动力响应变化率的时变方差(2 阶谱矩)。

将式(29)代入式(32a)得:

$$M_{\bar{X}_i, 0} = 2 \sum_{j=1}^{4n} \kappa_j^2 \eta_j^2 \int_0^{\infty} S_{\bar{X}_k}(\omega) A_{jj}(\omega, t) d\omega + 2 \sum_{j=1}^{4n-1} \sum_{k=j+1}^{4n} \kappa_j \kappa_k \int_0^{\infty} S_{\bar{X}_k}(\omega) [A_{jk}(\omega, t) + A_{kj}(\omega, t)] d\omega \quad (33)$$

对式(33)进行简化^[29]:

$$M_{\bar{X}_i, 0} = 2 \sum_{j=1}^{4n} \kappa_j^2 \eta_j^2 (a_{1j} \beta_{1j} + a_{2j} \beta_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{4n-1} \sum_{k=j+1}^{4n} \frac{\kappa_j \kappa_k \eta_j \eta_k}{p_k + p_j} [a_{3jk} (p_j \beta_{1j} + p_k \beta_{1k}) + a_{4jk} (p_j \beta_{2j} + p_k \beta_{2k}) + a_{5jk} (\beta_{3k} - \beta_{3j})] \quad (34)$$

其中:

$$\beta_{1j}(t) = \int_0^{\infty} S_{\bar{X}_k}(\omega) \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} d\omega \quad (35a)$$

$$\beta_{2j}(t) = \int_0^{\infty} S_{\bar{X}_k}(\omega) \frac{\cos(\omega t)}{p_j^2 + \omega^2} d\omega \quad (35b)$$

$$\beta_{3j}(t) = \int_0^{\infty} S_{\bar{X}_k}(\omega) \frac{\omega \sin(\omega t)}{p_j^2 + \omega^2} d\omega \quad (35c)$$

由式(35a)~(35c)可知, $\beta_{1j}(t)$, $\beta_{2j}(t)$, $\beta_{3j}(t)$ 与时间 t 、复振动特征值 p_j 和平稳随机过程的谱密度函数 $S_{\bar{X}_k}(\omega)$ 有关,本文将其称为非平稳模态谱矩。

5 算例验证

5.1 突加白噪声激励下惯容耗能结构动力分析

某 6 层结构中设有混联 I 型惯容系统,如图 2 所示。主体结构的质量 $m_1 = m_2 = 4.25 \times 10^5$ kg, 3~6 层质量 $m_3 \sim m_6 = 3.00 \times 10^5$ kg; 抗侧刚度 $k_1 = k_2 = 2.58 \times 10^7$ N/m, 3~6 层刚度 $k_3 \sim k_6 = 1.45 \times 10^7$ N/m; 阻尼依据 Rayleigh 阻尼计算即 $C = aM + bK$, 其中 $a = 0.13885$, $b = 0.014298$, 表示 Rayleigh 阻尼常数。混联 I 型惯容系统中的参数分别有惯容系数 $m_d = \mu_d m_1$ 、刚度系数 $k_d = \kappa_d K_1$ 和阻尼系数 $c_d = 2\xi_d m_d \sqrt{k_d/m_d}$ (m_1 和 K_1 为结构第一层的质量和刚度; μ_d , κ_d 和 ξ_d 分别表示惯质比、刚度比和名义阻尼比)。

假定 $\mu_d = 0.04$, $\kappa_d = 0.1927$ 和 $\xi_d = 0.043$ 以验证上述所求响应功率及时变方差的正确性,即混联 I 型惯容系统的惯容系数 $m_d = 1.7 \times 10^4$ kg, 刚度系

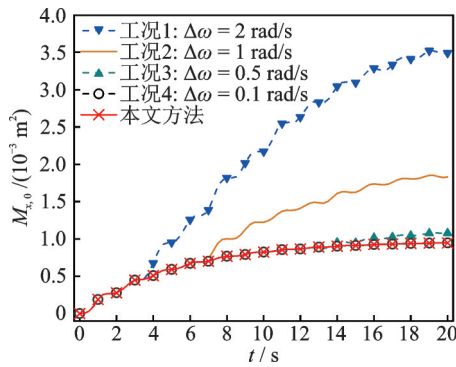


图 4 位移时变方差

Fig. 4 Time-varying variance of displacement

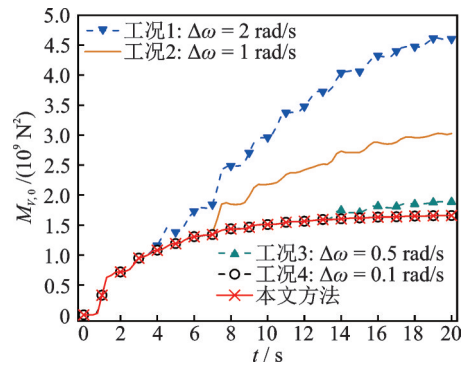


图 8 层间剪力时变方差

Fig. 8 Time-varying variance of interlayer shear force

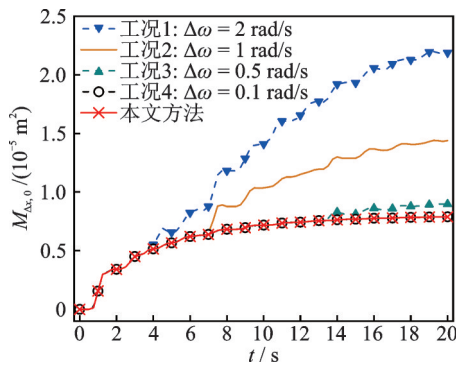


图 5 层间位移时变方差

Fig. 5 Time-varying variance of interlayer displacement

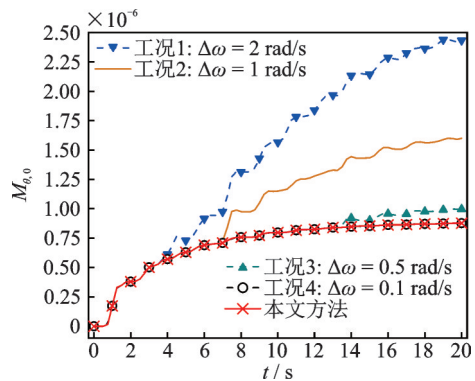


图 9 层间位移角时变方差

Fig. 9 Time-varying variance of interlayer deflection angle

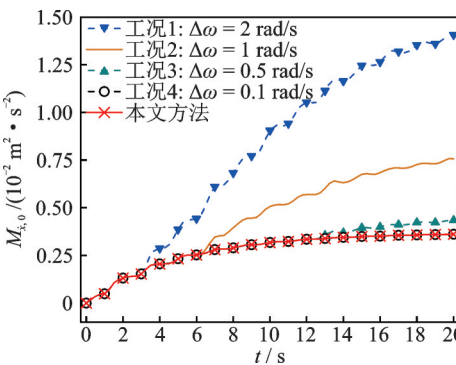


图 6 速度时变方差

Fig. 6 Time-varying variance of velocity

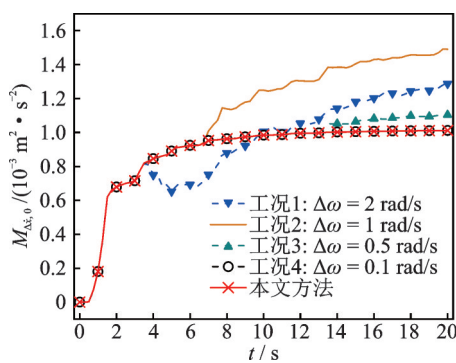


图 7 层间速度时变方差

Fig. 7 Time-varying variance of interlayer velocity

工况下,传统方法与本文方法结果较为接近,且随时间 t 的增大偏差逐渐增大,两种结果不完全相同。在 $\Delta\omega = 0.1$ rad/s 工况下,频率域 ω 被 5000 等分,时间域 t 被 80 等分,传统方法与本文方法结果完全一致。经分析可知,传统方法所求结果的计算精度与积分步长 $\Delta\omega$ 的取值密切相关, $\Delta\omega$ 取值越小,越逼近本文结果,由此反映了本文方法所求各响应的时变方差正确、有效且精度较高。由于传统方法及本文方法都是在响应功率谱的基础上对时变方差进行求解,且两种方法所得结果最终相同,再次证明了本文推导的响应功率谱表达式合理。

5.2 框架结构的动力响应分析

为进一步研究本文方法的实用性,采用与文献 [30] 相似的 10 层框架结构进行分析,如图 10 所示。结构中柱子尺寸为 $600\text{ mm} \times 600\text{ mm}$,梁横截面尺寸为 $300\text{ mm} \times 700\text{ mm}$,楼板厚 10 mm 。结构跨度 6 m ,层高为 3 m ,梁、板、柱均采用 C30 混凝土,材料弹性模量 $E = 3.0 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$,假设楼板为刚性,结构各层间的抗侧刚度等于各柱的抗侧刚度之和,单个柱的抗侧刚度为 $12EI/h^3$ 。结构竖向荷载主要由结构自重、楼板的铺装自重 (1.0 kN/m^2)、楼板自重 (2.5 kN/m^2) 及竖向活荷载 (2.0 kN/m^2) 构成。各节点质量依据集中质量法进行计算,荷载从属宽度为

存在较大偏差。传统方法在 $\Delta\omega = 1$ rad/s 工况下,上述响应时变方差的准确性及计算精度有一定提升,两种方法之间的偏差相对减小。在 $\Delta\omega = 0.5$ rad/s

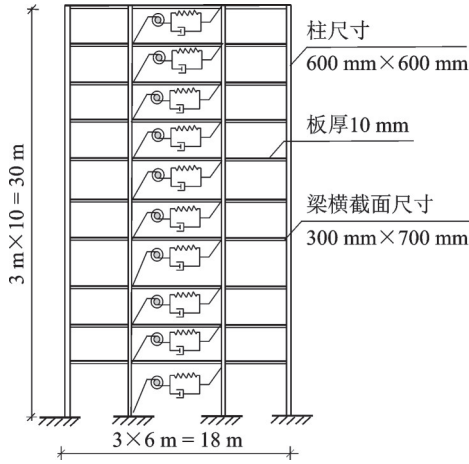


图10 耗能框架结构

Fig. 10 Energy-dissipation frame structure

6.0 m,活荷载系数为0.5,恒荷载系数为1.0,阻尼比为0.05。将混联I型惯容系统设置于多层框架结构中,各层设置惯容系统的型号相同。现对混联I型惯容耗能框架结构的动力响应进行研究。

为分析框架结构基于均匀调制非平稳函数的动力特性,取调制函数为阶跃性调制函数,平稳地震激励选用考虑了基岩土层的过滤作用且具有明确频谱特性的Kanai-Tajimi平稳随机激励。依据文献[31]中提出的Kanai-Tajimi模型,参数取值分别为 $S_0=5.75 \text{ cm}^2/\text{s}^4/\text{Hz}$, $\omega_g^2=242.0 \text{ s}^{-2}$, $\xi_g=0.63988$,Kanai-Tajimi模型的谱密度函数为:

$$S_{\dot{x}_g}(\omega) = S_0 \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \quad (38)$$

获得突加型Kanai-Tajimi激励下响应时变方差的前提是已知响应功率谱,响应功率谱与激励功率谱之间存在一定的关系,2.2节对调制函数进行了处理,现对式(38)进行简化,结果如下式所示:

$$S_{\dot{x}_g}(\omega) = S_0 \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \quad (39)$$

式中 $\omega_{g,1}^2 = -(1 - 2\xi_g^2)\omega_g^2 + 2i\omega_g^2\xi_g\sqrt{(\xi_g^2 - 1)}$;
 $\omega_{g,2}^2 = -(1 - 2\xi_g^2)\omega_g^2 - 2i\omega_g^2\xi_g\sqrt{(\xi_g^2 - 1)}$;
 $c_{g,1} = \frac{\omega_g^4 - 4\xi_g^2\omega_g^2\omega_{g,1}^2}{\omega_{g,2}^2 - \omega_{g,1}^2}$;
 $c_{g,2} = \frac{\omega_g^4 - 4\xi_g^2\omega_g^2\omega_{g,2}^2}{\omega_{g,1}^2 - \omega_{g,2}^2}$ 。

5.2.1 响应功率谱正确性分析

响应功率谱可显示耗能结构响应随频率及时间的振动特性,现对框架结构的动力响应功率谱进行分析。采用与5.1节相同的惯质比、刚度比和阻尼比验证本节框架结构响应功率谱的正确性。将式(39)代入式(29),即可获得混联I型耗能框架结构基于突加型Kanai-Tajimi激励的层间剪力功率谱 $S_V(\omega, t)$ 、层间位移角功率谱 $S_\theta(\omega, t)$ 、位移功率谱 $S_x(\omega, t)$ 、层间位移功率谱 $S_{\Delta x}(\omega, t)$ 及速度功率谱 $S_{\dot{x}}(\omega, t)$ 。图11为两种方法所求结构顶层的各响应功率谱的对比。由图11可知,本文方法与传统方法所求 $S_x(\omega, t)$, $S_{\Delta x}(\omega, t)$, $S_{\dot{x}}(\omega, t)$, $S_V(\omega, t)$ 及

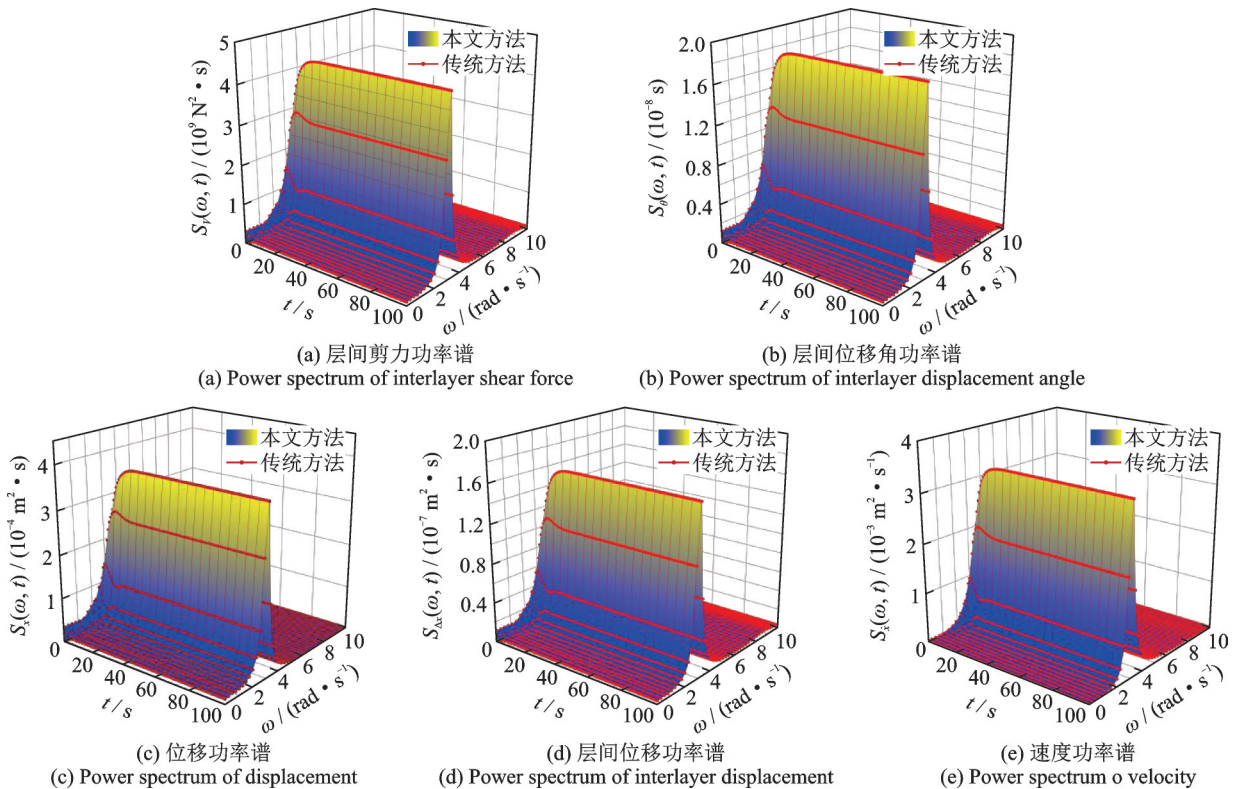


图11 基于突加型Kanai-Tajimi激励的响应功率谱

Fig. 11 Response power spectrum based on sudden-additive Kanai-Tajimi excitation

$S_\theta(\omega, t)$ 同样受时间 t 与频率 ω 的共同影响,且两种方法所求各响应的功率谱峰值与变化趋势完全一致,由此反映了所求结果的正确性,同时也表明本文方法同样适用于突加型 Kanai-Tajimi 激励的动力响应分析。其次,由图 11 可知,响应功率谱 $S_x(\omega, t)$, $S_{\Delta x}(\omega, t)$, $S_x(\omega, t)$, $S_V(\omega, t)$ 及 $S_\theta(\omega, t)$ 在频率 $\omega = 3 \text{ rad/s}$ 及时间 $t = 20 \text{ s}$ 左右出现最大值,随后受到突加型地震激励的影响趋于平稳。

5.2.2 响应时变方差分析

在已知响应功率谱的前提下,依据式 (35a)~(35c) 求解了基于突加型 Kanai-Tajimi 激励的 $\beta_{1,j}$, $\beta_{2,j}$ 和 $\beta_{3,j}$, 计算过程见附录 B, 结果为:

$$\beta_{1,j}(t) = \frac{\pi S_0}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - p_j^2} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\omega_{g,r}} \right) \quad (40a)$$

$$\beta_{2,j}(t) = \frac{\pi S_0}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - p_j^2} \left(\frac{e^{-p_j t}}{p_j} - \frac{e^{-\omega_{g,r} t}}{\omega_{g,r}} \right) \quad (40b)$$

$$\beta_{3,j}(t) = \frac{\pi S_0}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - p_j^2} (e^{-p_j t} - e^{-\omega_{g,r} t}) \quad (40c)$$

将式 (40a)~(40c) 代入式 (34), 即可获得基于突加型 Kanai-Tajimi 地震激励的响应时变方差解析解。图 12~17 分别为结构顶层各响应时变方差基于本文方法与虚拟激励法(取不同积分步长 $\Delta\omega$) 的对比图。由图 12~17 可知, 随积分步长 $\Delta\omega$ 的减小,

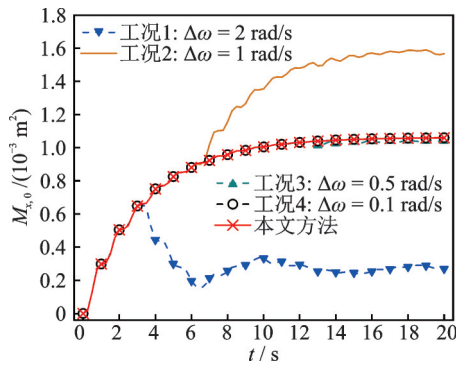


图 12 位移时变方差

Fig. 12 Time-varying variance of displacement

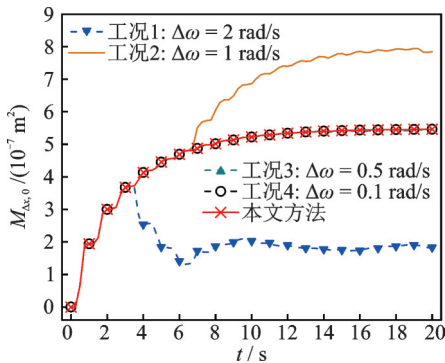


图 13 层间位移时变方差

Fig. 13 Time-varying variance of interlayer displacement

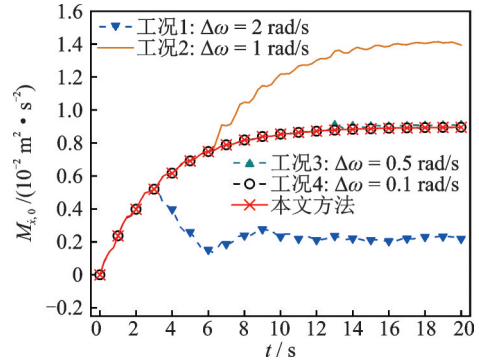


图 14 速度时变方差

Fig. 14 Time-varying variance of velocity

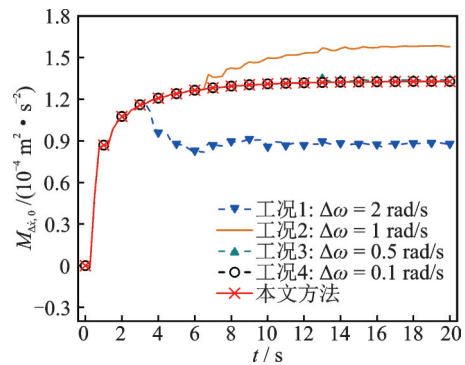


图 15 层间速度时变方差

Fig. 15 Time-varying variance of interlayer velocity

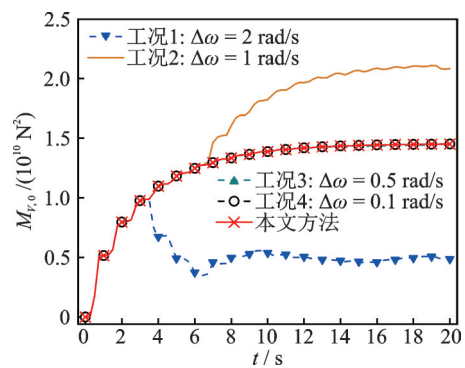


图 16 层间剪力时变方差

Fig. 16 Time-varying variance of interlayer shear force

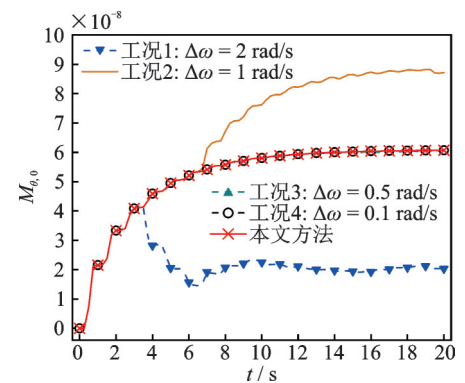


图 17 层间位移角时变方差

Fig. 17 Time-varying variance of interlayer displacement angle

传统方法(虚拟激励法)所获得的位移、层间位移、速度、层间速度、层间剪力和层间位移角的时变方差越逼近本文结果。传统方法在 $\Delta\omega \leq 0.5$ rad/s工况下所求结果与本文所求结果完全相同,由此表明了本文所求各响应时变方差的正确性。此外,借助MATLAB工具,传统方法依据式(32a)~(32b)计算响应时变方差,在工况 $\Delta\omega=2$ rad/s, $\Delta\omega=1$ rad/s, $\Delta\omega=0.5$ rad/s和 $\Delta\omega=0.1$ rad/s下分别耗时150.23, 287.845, 497.137, 537.92 s,而本文方法耗时54.01 s,由此反映了本文方法在保证计算精度的同时也提高了计算效率。

5.2.3 参数及减震效果分析

上文验证了本文方法所求框架结构在突加型Kanai-Tajimi激励下的响应方差正确有效,为研究惯容系统主要参数对减震效果的影响,基于式(40a)~(40c)及(34),通过改变惯质比 μ_d 、刚度比 κ_d 及阻尼比 ξ_d 分析位移方差及速度方差的变化趋势。 μ_d 的取值范围为0.001~0.4, κ_d 取值范围为0.001~0.06, ξ_d 的取值范围为0.01~1。

图18展示了惯质比、刚度比和阻尼比在 $t=20$ s时对结构顶层的位移方差和速度方差的影响。由图18(a)和(b)可知,阻尼比 $\xi_d=0.2$ 时,位移方差和速度方差随惯质比的增大而逐渐减小,位移方差和速度方差随刚度比的增大先减小后增大,且在 $\kappa_d=0.02$ 左右出现极小值。由图18(c)和(d)可知,惯质比 $\mu_d=0.4$ 时,位移方差和速度方差随阻尼比的增大逐渐增大,随刚度比的增大先减小后增大。分析表明,位移方差和速度方差在其中两个参数的共同作用下出现极小值,此时减震效果较好。

图18改变参数使位移方差和速度方差同时出现极小值,此时惯质比 μ_d 、刚度比 κ_d 及阻尼比 ξ_d 分别为0.4,0.023及0.2,依据式(40a)~(40c)和(34),对比该情形下耗能结构与无控结构的响应量(位移、速度、层间位移和层间剪力)如图19所示。由图19可知,在结构中设置混联I型惯容系统可使结构顶层的位移、速度、层间位移及层间剪力显著减小,各响应最大值分别减小26.71%,31.15%,26.09%及31.16%。

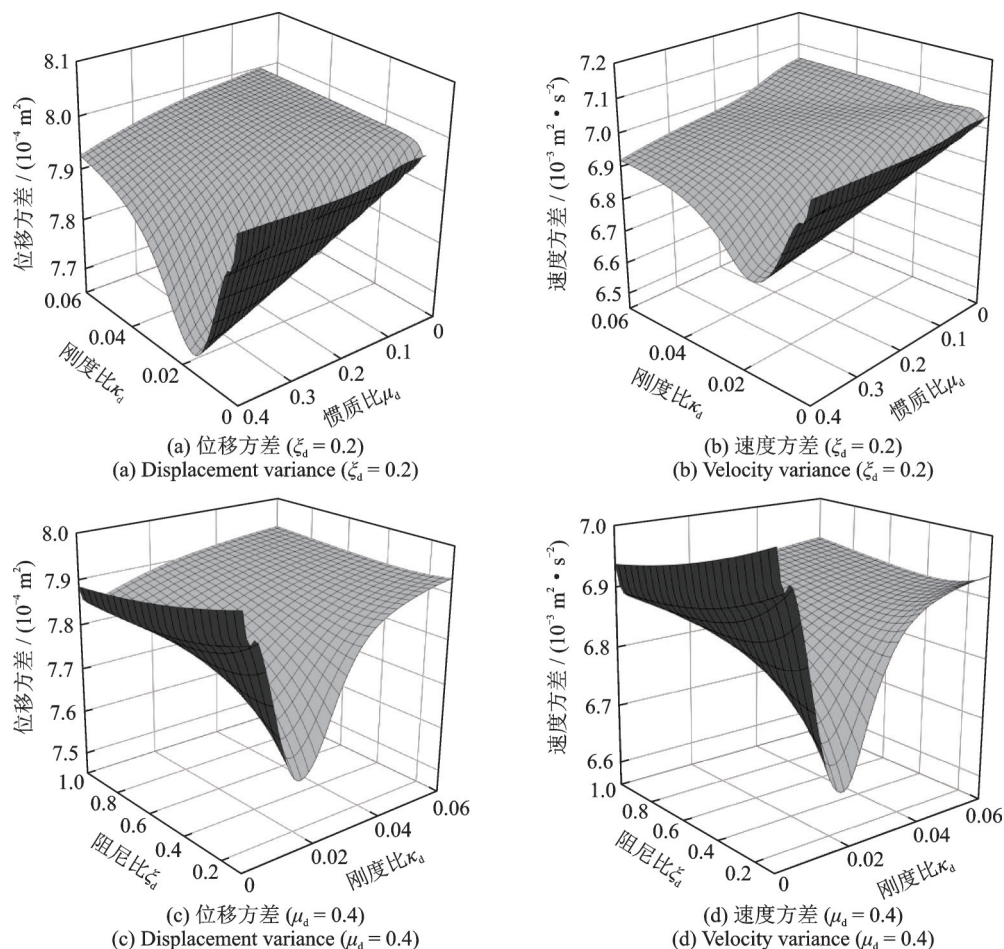


图 18 对结构响应方差的影响

Fig. 18 Influence of the parameters on the structural response variance

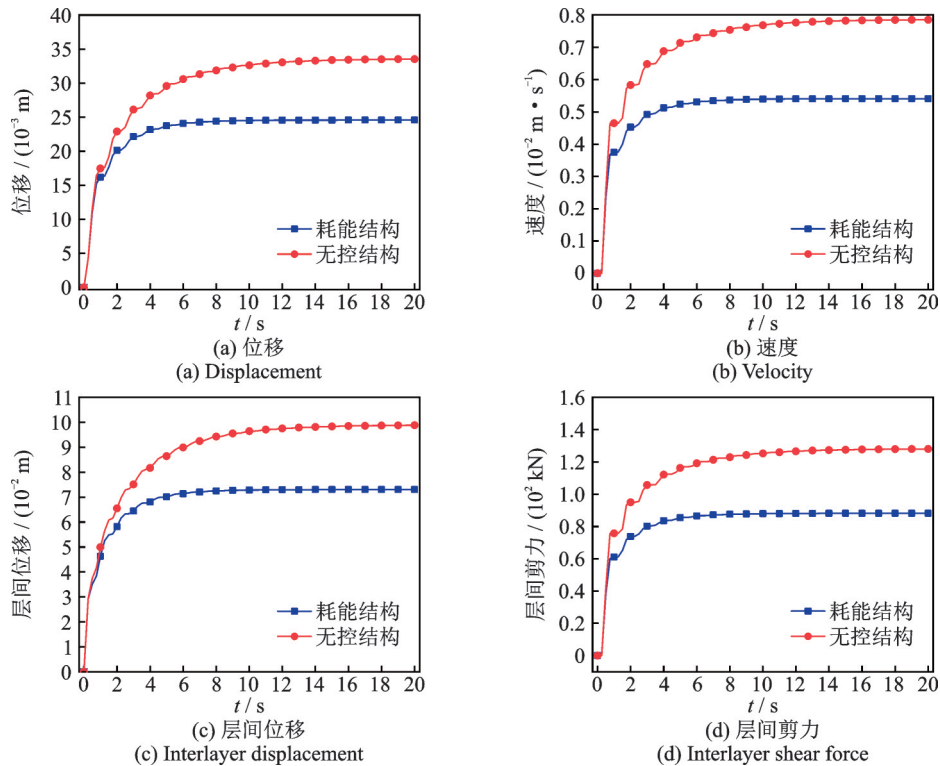


图 19 减震效果分析

Fig. 19 Analysis of damping effects

6 结 论

本文研究了混联 I 型惯容耗能结构在均匀调制非平稳随机地震激励作用下的动力响应,为进一步了解结构的振动特性,推导了结构响应时变功率谱及时变方差的解析解。基于解析解的表达式,借助与动力学相关的数值算例及框架结构的算例,验证了本文结果的正确性,分析了参数对减震效果的影响。所得结论如下:

(1) 将非平稳地震激励下的响应时变功率谱密度函数二次式分解转化为由振动特征值,模态系数及时变模态强度系数等参数构成的线性组合,给定模态响应系数可得到与之对应的响应时变功率谱,具有明确的物理意义。

(2) 经本文方法的运算,将求解响应时变方差的积分问题转化为求解非平稳模态谱矩 β_{ij} 问题。非平稳模态谱矩 β_{ij} 的积分运算存在原函数,进而可获得响应时变方差的解析解,简化了计算过程。响应的时变方差可应用于分析结构在地震激励下的可靠度、安全性及舒适性。

(3) 通过动力学数值算例与框架结构算例分析表明,本文与虚拟激励法所求响应时变功率谱完全一致,验证了本文方法的准确性。本文所求响应时变方差与虚拟激励法最精确的值相同,且计算效率

较高,即在提高精度的同时也提高了计算效率。

(4) 通过参数对位移时变方差、速度时变方差和减震效果的影响分析表明,改变惯质比、刚度比及阻尼比,动力响应方差出现极小值,此时混联 I 型惯容系统具有良好的减震性能。

参考文献:

- [1] 李壮壮, 申永军, 杨绍普, 等. 基于惯容-弹簧-阻尼的结构减振研究[J]. 振动工程学报, 2018, 31(6): 1061-1067.
LI Zhuangzhuang, SHEN Yongjun, YANG Shaopu, et al. Study on vibration mitigation based on inerter-spring-damping structure[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(6): 1061-1067.
- [2] 刘畅, 李春祥, 曹黎媛. 基于拓扑布置的超高层建筑 TTMDI 风致振动控制[J]. 振动与冲击, 2022, 41(9): 244-252.
LU Chang, LI Chunxiang, CAO Liyuan. Wind-induced vibration control of super high-rise building TTMDI system based on topological layout[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(9): 244-252.
- [3] LI Z C, XU K, MA R S, et al. A novel lever-arm tuned mass damper inerter (LTMDI) for vibration control of long-span bridges[J]. Engineering Structures, 2023, 293: 116662.
- [4] IKAGO K, SAITO K, INOUE N. Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous

- mass damper[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2012, 41(3): 453-474.
- [5] LAZAR I F, NEILD S A, WAGG D J. Using an inerter-based device for structural vibration suppression[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2014, 43(8): 1129-1147.
- [6] LI Y F, LI S Y, CHEN Z Q. Optimal design and effectiveness evaluation for inerter-based devices on mitigating seismic responses of base isolated structures[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2021, 20(4): 1021-1032.
- [7] DE DOMENICO D, RICCIARDI G. Optimal design and seismic performance of tuned mass damper inerter (TMDI) for structures with nonlinear base isolation systems[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2018, 47(12): 2539-2560.
- [8] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. *工程力学*, 2019, 36(10): 8-27.
ZHANG Ruifu, CAO Yanru, PAN Chao. Inerter system and its state-of-the-art[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(10): 8-27.
- [9] KRENK S, HØGSBERG J. Tuned resonant mass or inerter-based absorbers: unified calibration with quasi-dynamic flexibility and inertia correction[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2016, 472(2185): 20150718.
- [10] 李创第, 江丽富, 王瑞勃, 等. 单自由度混联 II 型惯容系统随机地震动响应分析[J]. *应用数学和力学*, 2023, 44(3): 260-271.
LI Chuangdi, JIANG Lifu, WANG Ruibo, et al. Responses of SDOF structures with SPIS- II dampers under random seismic excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, 44(3): 260-271.
- [11] ZHANG R F, ZHAO Z P, PAN C, et al. Damping enhancement principle of inerter system[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2020, 27(5): e2523.
- [12] 潘超, 韩笑, 张瑞甫, 等. 基于最大耗能增效原则的惯容减震系统解析设计公式[J]. *工程力学*, 2023, 40(4): 91-101.
PAN Chao, HAN Xiao, ZHANG Ruifu, et al. Closed-form design formula for inerter system based on the principle of maximum damping enhancement[J]. *Engineering mechanics*, 2023, 40(4): 91-101.
- [13] 张瑞甫, 张璐琦, 潘超, 等. 考虑正常使用功能的非线性黏滞阻尼惯容系统多指标减震控制[J]. *工程科学与技术*, 2023, 55(5): 14-22.
ZHANG Ruifu, ZHANG Luqi, PAN Chao, et al. Multi-objective seismic control effect of inerter system with nonlinear viscous damping considering functionality of buildings[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2023, 55(5): 14-22.
- [14] 潘超, 刘媛, 张瑞甫, 等. 惯容减震系统性能成本控制解析设计方法[J]. *建筑结构学报*, 2022, 43(11): 107-116.
PAN Chao, LIU Yuan, ZHANG Ruifu, et al. Performance-cost design method of inerter system based on closed-form formulae[J]. *Journal of Building Structures*, 2022, 43(11): 107-116.
- [15] 潘超, 张瑞甫, 王超, 等. 单自由度混联 II 型惯容减震体系的随机地震响应与参数设计[J]. *工程力学*, 2019, 36(1): 129-137.
PAN Chao, ZHANG Ruifu, WANG Chao, et al. Stochastic seismic response and design of structural system with series-parallel- II inerter system[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(1): 129-137.
- [16] WANG D, FAN Z L, HAO S W, et al. An evolutionary power spectrum model of fully nonstationary seismic ground motion[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2018, 105: 1-10.
- [17] 何浩祥, 丁佳伟, 闫维明. 地震动全非平稳时频谱统计模型及其在结构分析中的应用[J]. *振动工程学报*, 2021, 34(6): 1257-1267.
HE Haoxiang, DING Jiawei, YAN Weiming. Statistical model of time-frequency spectrum of earthquake and application in structural vibration analysis[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2021, 34(6): 1257-1267.
- [18] PRIESTLEY M B. Evolutionary spectra and non-stationary processes[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 1965, 27(2): 204-229.
- [19] 霍慧, 陈国海, 王文培, 等. 平稳/非平稳激励下中厚圆柱壳随机振动响应的基准解[J]. *力学学报*, 2022, 54(3): 762-776.
HUO Hui, CHEN Guohai, WANG Wenpei, et al. Benchmark solutions of random vibration responses for moderately thick cylindrical shells under stationary/non-stationary excitations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(3): 762-776.
- [20] 方同, 孙木楠, 张天舒. 相关演变随机激励下响应演变谱矩阵的表达式[J]. *应用力学学报*, 2008, 25(3): 351-354.
FANG Tong, SUN Munan, ZHANG Tianshu. General expression of response evolutionary spectrum matrix due to correlated evolutionary random excitations[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2008, 25(3): 351-354.
- [21] 李创第, 王博文, 昌明静. 广义 Maxwell 阻尼耗能系统非均匀响应精细积分精确格式[J]. *桂林理工大学学报*, 2021, 41(4): 783-790.
LI Chuangdi, WANG Bowen, CHANG Mingjing. Precise integration scheme for nonuniform response of energy dissipation system with generalized Maxwell damping [J]. *Journal of Guilin University of Technology*, 2021,

- 41(4): 783-790.
- [22] 方同. 工程随机振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [23] 李创第, 王博文, 昌明静. 一般线性黏弹性阻尼器保护系统非均匀与完全非平稳地震响应解析分析[J]. 振动工程学报, 2022, 35(5): 1084-1100.
- LI Chuangdi, WANG Bowen, CHANG Mingjing. Analytical analysis of non-uniform and completely nonstationary seismic response of a general linear viscoelastic damper protection system[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(5): 1084-1100.
- [24] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [25] XING Chenxi, WANG Hao, XU Zidong, et al. Stochastic analysis of a large-span continuous girder high-speed railway bridge under fully non-stationary earthquake[J]. Applied Sciences, 2022, 12(24): 12684.
- [26] 张步云, 戴涛, TAN Chin-An, 等. 悬架系统振动特性的非平稳虚拟激励法研究[J]. 振动、测试与诊断, 2022, 42(2): 227-234.
- ZHANG Buyun, DAI Tao, TAN Chin-An, et al. Non-stationary pseudo excitation method for analyzing vibration characteristics of suspension system[J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2022, 42(2): 227-234.
- [27] 葛新广, 龚景海, 李创第, 等. 功率谱二次正交化法在随机地震动响应的应用[J]. 振动工程学报, 2022, 35(3): 616-624.
- GE Xinguang, GONG Jinghai, LI Chuangdi, et al. Application of quadratic orthogonalization method of response power spectrum to random ground motion response[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(3): 616-624.
- [28] 邹万杰, 刘美华, 李创第, 等. 基于胡聿贤谱的带支撑广义 Maxwell 阻尼隔震结构随机响应分析[J]. 力学学报, 2022, 54(9): 2601-2615.
- ZOU Wanjie, LIU Meihua, LI Chuangdi, et al. Seismic response analysis of generalized Maxwell damping isolated structure with braces under Hu Yuxian spectrum excitation[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(9): 2601-2615.
- [29] 葛新广. 分数导数型阻尼耗能结构地震动响应的分析方法研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2022.
- GE Xinguang. Research on analysis methods for seismic response of energy dissipative structure with dampers modeled by fractional derivative[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2022.
- [30] CHEN M, LIANG X J, YANG Z W, et al. Analytical Study on the random seismic responses of an asymmetrical suspension structure[J]. Buildings, 2023, 13(6): 1435.
- [31] HOUSNER G W. Characteristics of strong-motion earthquakes[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1947, 37(1): 19-31.

Analytical solution for dynamic response of inertial energy dissipation structures under non-stationary seismic excitation

LI Chuang-di¹, WANG Rui-bo¹, GE Xin-guang², JIANG Li-fu¹

(1.School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China;

2.School of Civil Engineering and Architecture, Liuzhou Institute of Technology, Liuzhou 545616, China)

Abstract: Due to the lack of research on the dynamical response of the inerter system based on non-stationary seismic excitation, an analytical solution for the time-varying variance of the dynamical response of a multi-degree-of-freedom energy-consuming structure with series-parallel layout I inerter system (SPIS- I) is proposed. According to the constitutive relationship of the SPIS- I , the dynamic equations of the energy dissipation structure, and the impulsive non-stationary seismic excitation, we decouple the inertial energy dissipation structure into first-order systems using complex modal analysis and the virtual excitation method. It is convenient to obtain the unified solution of the structural response quantities such as displacement, velocity, inter-story shear force, etc. The quadratic decomposition method is used to transform the time-varying power spectral density function of the unified solution into a linear combination of the complex modal eigenvalues of the inertial-capacitated energy-consuming structure, the modal coefficients, the time-varying modal strength coefficients, and the quadratic product containing the squared term of the circular frequency. On this basis, an analytical solution for the time-varying variance of the response of the energy-consuming structure under non-stationary seismic excitation is derived by utilizing the characteristics that the non-stationary modes spectral moments have an analytical solution in the infinite integration interval. The accuracy of the proposed dynamic response power spectrum and time-varying variance is verified by using the sudden white noise excitation to analyze the dynamic response of the structure. At the same time, the dynamic response of the frame structure based on the sudden Kanai-Tajimi model is studied, and the influence of the parameters of the inertial system on the damping effect is analyzed. The proposed method can be applied to analyze the seismic response of linear structures under other non-stationary modulation functions.

Key words: inertial damping system; non-stationary seismic excitation; quadratic decomposition method of power spectrum; time-varying variance; analytical solution

作者简介: 李创第(1964—),男,博士,教授。E-mail:lichuangdi1964@163.com。

通讯作者: 葛新广(1977—),男,博士,讲师。E-mail:gxgzlr.2008@163.com。

附录A 时变模态强度系数及 $A_{kj}(\omega, t)$ 和 $A_{jj}(\omega, t)$ 的推导

依据式(27)及(19)推导 $A_{kj}(\omega, t)$ 和 $A_{jj}(\omega, t)$,其中 $A_{jj}(\omega, t)$ 的表达式为:

$$A_{jj}(\omega, t) = [1 - e^{\rho_j t + i\omega t} - e^{\rho_j t - i\omega t} + e^{2\rho_j t}] \frac{\eta_j^2}{\rho_j^2 + \omega^2} \quad (\text{A1})$$

欧拉公式:

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t), \quad e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (\text{A2})$$

运用欧拉公式可将式(A1)简化为:

$$A_{jj}(\omega, t) = \eta_j^2 \frac{a_{1j}(t) + a_{2j}(t) \cos(\omega t)}{\rho_j^2 + \omega^2} \quad (\text{A3})$$

同理 $A_{kj}(\omega, t)$ 为:

$$\begin{aligned} A_{kj}(\omega, t) = & \eta_k \eta_j [1 - e^{\rho_k t + i\omega t} - e^{\rho_k t - i\omega t} + e^{(\rho_k + \rho_j)t}] \cdot \frac{1}{i\omega - \rho_j - i\omega - \rho_k} = \\ & - \frac{\eta_k \eta_j}{\rho_k + \rho_j} \frac{1}{\rho_j^2 + \omega^2} \cdot [1 - e^{(\rho_j - i\omega)t} - e^{(\rho_k + i\omega)t} + e^{(\rho_k + \rho_j)t}] (-\rho_j - i\omega) - \\ & \frac{\eta_j \eta_k}{\rho_k + \rho_j} \frac{1}{\rho_k^2 + \omega^2} [1 - e^{(\rho_j - i\omega)t} - e^{(\rho_k + i\omega)t} + e^{(\rho_k + \rho_j)t}] (-\rho_k + i\omega) \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

$A_{jk}(\omega, t)$ 与 $A_{kj}(\omega, t)$ 推导过程相同,故运用欧拉公式推导 $A_{jk}(\omega, t) + A_{kj}(\omega, t)$:

$$\begin{aligned} A_{jk}(\omega, t) + A_{kj}(\omega, t) = & - \frac{\eta_j \eta_k}{\rho_k + \rho_j} \frac{1}{\rho_k^2 + \omega^2} [\rho_k (e^{(\rho_k - i\omega)t} + e^{(\rho_k + i\omega)t} + e^{(\rho_j + i\omega)t} + e^{(\rho_j - i\omega)t} - 2 - 2e^{(\rho_k + \rho_j)t}) + \\ & i\omega (e^{(\rho_k - i\omega)t} - e^{(\rho_k + i\omega)t} + e^{(\rho_j + i\omega)t} - e^{(\rho_j - i\omega)t})] - \frac{\eta_j \eta_k}{\rho_k + \rho_j} \frac{1}{\rho_j^2 + \omega^2} [\rho_j (e^{(\rho_k - i\omega)t} + e^{(\rho_k + i\omega)t} + \\ & e^{(\rho_j + i\omega)t} + e^{(\rho_j - i\omega)t} - 2 - 2e^{(\rho_k + \rho_j)t}) + i\omega (e^{(\rho_k + i\omega)t} - e^{(\rho_k - i\omega)t} + e^{(\rho_j - i\omega)t} - e^{(\rho_j + i\omega)t})] = \\ & \frac{\eta_j \eta_k}{\rho_k + \rho_j} \frac{2}{\rho_k^2 + \omega^2} [\rho_k (1 + e^{(\rho_k + \rho_j)t}) - \rho_k (e^{\rho_k t} + e^{\rho_j t}) \cos(\omega t) - (e^{\rho_k t} - e^{\rho_j t}) \omega \sin(\omega t)] + \\ & \frac{\eta_j \eta_k}{\rho_k + \rho_j} \frac{2}{\rho_j^2 + \omega^2} [\rho_j (1 + e^{(\rho_k + \rho_j)t}) - \rho_j (e^{\rho_k t} + e^{\rho_j t}) \cos(\omega t) - (e^{\rho_k t} - e^{\rho_j t}) \omega \sin(\omega t)] = \\ & \frac{2\eta_j \eta_k}{\rho_k + \rho_j} \times \left\{ [a_{3jk} + a_{4jk} \cos(\omega t)] \left(\frac{\rho_k}{\rho_k^2 + \omega^2} + \frac{\rho_j}{\rho_j^2 + \omega^2} \right) + a_{5jk} \left[\frac{\omega \sin(\omega t)}{\rho_k^2 + \omega^2} - \frac{\omega \sin(\omega t)}{\rho_j^2 + \omega^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

附录B 基于Kanai-Tajimi模型的非平稳模态谱矩

将式(39)代入式(35)中, $\beta_{1,j}(t)$, $\beta_{2,j}(t)$ 和 $\beta_{3,j}(t)$ 的推导过程如下:

$$\begin{aligned} \beta_{1,j}(t) = & S_0 \sum_{r=1}^2 \int_0^\infty \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \frac{1}{\rho_j^2 + \omega^2} d\omega = S_0 \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \rho_j^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\rho_j^2 + \omega^2} - \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \right) d\omega = \\ & \frac{\pi S_0}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \rho_j^2} \left(\frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\omega_{g,r}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

$$\begin{aligned} \beta_{2,j}(t) = & S_0 \sum_{r=1}^2 \int_0^\infty \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \frac{\cos(\omega t)}{\rho_j^2 + \omega^2} d\omega = S_0 \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \rho_j^2} \int_0^\infty \left[\frac{\cos(\omega t)}{\rho_j^2 + \omega^2} - \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \right] d\omega = \\ & \frac{\pi S_0}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \rho_j^2} \left(\frac{e^{-\rho_j t}}{\rho_j} - \frac{e^{-\omega_{g,r} t}}{\omega_{g,r}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

$$\begin{aligned} \beta_{3,j}(t) = & S_0 \sum_{r=1}^2 \int_0^\infty \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \frac{\sin(\omega t)}{\rho_j^2 + \omega^2} d\omega = S_0 \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \rho_j^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sin(\omega t)}{\rho_j^2 + \omega^2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \right] d\omega = \\ & \frac{\pi S_0}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega_{g,r}^2 - \rho_j^2} (e^{-\rho_j t} - e^{-\omega_{g,r} t}) \end{aligned} \quad (\text{B3})$$