

P 波作用下土体孔隙尺寸及结构非均匀效应对圆形衬砌动力特性的影响

丁海滨^{1,2,3}, 刘志云^{1,2,3}, 李 鹏⁴, 陈常科^{1,2,3}, 童立红^{1,2,3}, 徐长节^{1,2,3}

(1. 华东交通大学轨道交通基础设施性能监测与保障国家重点实验室, 江西 南昌 330013;

2. 江西省地下空间技术开发工程研究中心, 江西 南昌 330013;

3. 华东交通大学江西省岩土工程基础设施安全与控制重点实验室, 江西 南昌 330013;

4. 中交二公局第三工程有限公司, 陕西 西安 710016)

摘要: 基于应变梯度非局部 Biot 理论, 以深埋圆形衬砌为研究对象, 利用波函数展开法和饱和土与衬砌间的边界条件, 得到隧道衬砌在 P 波作用下的动力响应解析解。研究了不同入射 P 波频率下, 非局部参数与尺寸因子对动应力集中系数(DSCF)的影响规律。结果表明, 入射波频率较低时, 非局部参数和尺寸因子对 DSCF 几乎没有影响, 随着入射波频率的增大, 非局部参数和尺寸因子对 DSCF 的影响会越来越明显, 且非局部参数与 DSCF 呈负相关, 尺寸因子与 DSCF 呈正相关; 衬砌内动应力最大处均出现在衬砌右侧; 随着频率的增加, 衬砌内 DSCF 沿径向呈现明显的波动, 非局部参数和尺寸因子对衬砌内环向应力的分布模式影响不大。

关键词: 应变梯度非局部 Biot 理论; 隧道衬砌; 非局部参数; 尺寸因子; 动应力集中系数

中图分类号: TU435; U451 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)11-1959-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.11.016

引 言

随着中国地下工程的快速发展, 其安全问题也日益突出, 而地震、工程爆破是影响地下工程安全问题的主要因素。钻爆法施工过程中会产生巨大的爆破能量, 这些能量以弹性波的形式传播, 且能量大、频率高, 对隧道的安全有极大的威胁。当地下结构遭受损坏时, 修复工作将面临巨大的困难, 因此, 研究隧道衬砌在弹性波作用下的动力响应对于抗震设计具有重要意义。

国内外已有众多学者针对弹性波作用下圆形衬砌的动态响应问题开展了大量的研究, 其中 PAO 等^[1]开创性地将动应力集中系数引入全空间中以评估弹性波入射条件下隧道的动力响应。随后, LEE 等^[2]研究了平面 SV 波在弹性半空间中不同深度空腔的散射和衍射问题。YI 等^[3-4]采用波函数展开法, 用弹簧连接模拟围岩与衬砌间的接触, 研究了 P 波作用下围岩和刚度等参数对圆形隧道衬砌动力响应的影响。王长柏等^[5]考虑无限弹性介质中深埋隧道的双层衬砌情况, 分析了围岩及双层衬砌的结构参数对隧道内/外衬砌动力响应的影响。

以上研究均将土体视为单相介质, 然而, 由于地下水的影响, 衬砌周围土体大多处于饱和状态。由 BIOT^[6]提出的经典饱和和孔隙介质动力理论, 因其形式简单、物理意义明确和易于试验测得相关参数等特点, 在各个领域得到了广泛应用。许多学者应用 Biot 理论^[6]研究了饱和多孔弹性介质中洞室对弹性波的散射及衍射问题。李伟华等^[7-8]利用拉普拉斯变换解决了瞬态波作用下围岩和衬砌的应力与位移的时域解。由于地下结构形状复杂多样, 陆建飞等^[9]利用复变函数方法, 求解出不规则形状洞室弹性波的散射波场。同时, 也有学者采用这种方法分析了无量纲波数和隧道内/外半径比对围岩及衬砌动力响应的影响^[10]。范凯祥等^[11]考虑饱和土中的双层衬砌情况, 并用傅里叶技术求出了平面瑞利波的波场和频域内复合式衬砌的孔压集中因子、动应力集中系数的解析解。DING 等^[12]基于 Biot 理论, 采用波函数展开法, 对饱和土中复合衬砌问题进行了研究。

从以往的研究来看, 对饱和孔隙介质的研究主要基于经典 Biot 理论, 但 Biot 理论没有考虑到孔隙尺寸对饱和孔隙介质中弹性波散射和衍射的影响。然而, 在高频的情况下, 孔隙尺寸效应会对弹性波的

收稿日期: 2023-12-29; **修订日期:** 2024-01-27

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2023YFC3009400); 国家自然科学基金资助项目(52208344, 52278350); 江西省自然科学基金资助项目(20224BAB214068); 国家重点实验室开放基金资助项目(HJGZ2022204)。

散射和衍射产生明显的影响。为此, TONG等^[13]考虑孔隙尺寸效应的影响, 并通过引入非局部参数, 对经典的 Biot 理论进行改进, 从而提出了非局部 Biot 理论。徐长节等^[14-15]基于非局部 Biot 理论, 研究了在深埋和浅埋情况下的衬砌内边界和外边界的动力响应问题。DING 等^[16]基于非局部 Biot 理论, 分析了频率、非局部参数和入射波角度等参数对双层衬砌隧道的动力响应影响。KIMURA 等^[17]在波速试验中发现, 孔隙介质中波除了具有负色散效应外, 还具有正色散效应, 已有的理论不能对这一现象作出解释。为此, TONG 等^[18]提出应变梯度非局部 Biot 理论, 这一理论既能反映土体的孔隙尺寸效应, 又能反映土体的结构非均匀效应, 并通过试验成功预测饱和孔隙介质中波速的正、负色散效应。基于该理论, DING 等^[19]利用波函数展开法, 分析了瑞利波作用下的非局部参数和尺寸因子对其波场的影响。

综上所述, 本文基于应变梯度非局部 Biot 理论, 开展 P 波作用下饱和孔隙介质中的非局部参数和尺寸因子对圆形衬砌动力响应的影响规律研究。本文的研究为弹性波作用下更加准确地预测隧道动力响应提供理论依据, 为隧道结构抗震设计奠定基础。

1 计算模型及波场求解

1.1 计算模型

P 波与隧道衬砌相互作用的计算模型如图 1 所示, 图中 r 和 θ 分别表示极径和极角。假设深埋圆形衬砌为无限长圆柱形洞室, 衬砌周围介质为饱和土, 因此该问题属于平面应变问题, R_2 和 R_1 分别表示衬砌的内径和外径。假设 P 波从左到右水平入射到衬砌的外表面上。

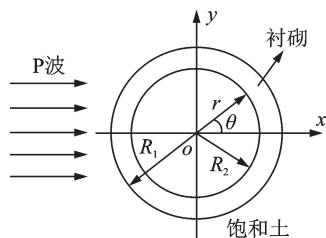


图1 计算模型

Fig. 1 Calculation model

该入射波势函数为:

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (1)$$

式中 φ_0 表示入射波的振幅; k_1 表示 P 波波数; ω 表示入射波圆角频率; t 表示时间。

式(1)在柱坐标系中可以表示为:

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(k_1 r) \cos(n\theta) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

式中 $J_n(k_1 r)$ 为第一类 n 阶贝塞尔函数, i 为虚数, n 为正整数。当 $n=0$ 时, $\epsilon_n=1$; 当 $n \geq 1$ 时, $\epsilon_n=2$ 。

1.2 饱和土中波场求解

在应变梯度非局部 Biot 理论中, 既考虑了土体的孔隙尺寸效应, 又考虑了土体的结构非均匀效应, 其运动方程如下^[18]:

$$\begin{cases} (1 - l_1^2 \nabla^2) [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda_c + \mu) \nabla \epsilon - \alpha M \nabla \xi] = \\ (1 - l_0^2 \nabla^2) (\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}}) \\ (1 - l_1^2 \nabla^2) (\alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + M \nabla \nabla \cdot \mathbf{w}) = \\ \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + m \ddot{\mathbf{w}} + b \dot{\mathbf{w}} \end{cases} \quad (3)$$

本构关系为:

$$\begin{cases} (1 - l_0^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = (1 - l_1^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^l \\ \sigma_{ij}^l = 2\mu \epsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda_c \epsilon - \alpha M \xi) \\ P_f = -\alpha M \epsilon + M \xi \\ \epsilon = \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \xi = -\nabla \cdot \mathbf{w} \end{cases} \quad (4)$$

式中 l_0 为非局部参数(代表孔隙尺寸效应); l_1 为尺寸因子(代表结构非均匀效应)^[18]; $\nabla \cdot$ 为散度算子, ∇ 为梯度算子; ∇^2 为拉普拉斯算子, 对于平面应变问题, 拉普拉斯算子的表达式为 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; ξ 为

弯曲因子; σ_{ij} 为考虑孔隙尺寸及土体结构非均匀效应影响的土骨架总应力; σ_{ij}^l 为经典 Biot 理论中的总应力; ϵ_{ij} 和 ϵ 分别为土骨架的应变张量和体积应变; δ_{ij} 为 Kronecker 符号; μ 为土体剪切模量; $\lambda_c = \lambda + \alpha M^2$, 其中, λ 为拉梅常数, α 和 M 为 Biot 参数; P_f 表示流体压力; ξ 为单位体积下饱和孔隙介质中流体体积的变化量; \mathbf{u}, \mathbf{w} 分别为 x 和 y 方向上的平面位移, 其中, \mathbf{u} 表示土骨架的位移, \mathbf{w} 表示液体相对于土骨架的位移; ρ_f 为饱和土中液体的密度; ρ 为饱和土的平均密度, 且 $\rho = (1 - n_0) \rho_s + n_0 \rho_f$, 其中 ρ_s 为土壤固体颗粒的密度; $m = \rho_f / n_0$, 其中 n_0 为饱和多孔介质中的孔隙率; $b = \eta / k$, 其中 η 为流体黏度系数, 高频下 $\eta = \eta_0 F(\zeta)$, $F(\zeta)$ 为频率修正系数^[13], η_0 为低频下的流体黏滞系数, k 为渗透系数。

将 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \cdot e^{-i\omega t}$, $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} \cdot e^{-i\omega t}$ 代入式(2)并略去时间相关项得:

$$\begin{cases} (1 - l_1^2 \nabla^2) [\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + (\lambda_c + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \alpha M \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}] = \\ -(1 - l_0^2 \nabla^2) (\rho \omega^2 \bar{\mathbf{u}} + \rho_f \omega^2 \bar{\mathbf{w}}) \\ (1 - l_1^2 \nabla^2) (\alpha M \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + M \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}) = \\ -\rho_f \omega^2 \bar{\mathbf{u}} - \left(m \omega^2 + \frac{j\eta}{k} \omega \right) \bar{\mathbf{w}} \end{cases} \quad (5)$$

式中 j 为虚数。

根据 Helmholtz 分解原理,土骨架位移 \bar{u} 和流体对固体的相对位移 \bar{w} 分别表示为:

$$\bar{u} = \nabla \varphi_s + \nabla \times \psi_s, \quad \bar{w} = \nabla \varphi_f + \nabla \times \psi_f \quad (6)$$

式中 φ_s 和 ψ_s 分别为 \bar{u} 的标量势和矢量势函数;
 φ_f 和 ψ_f 分别为 \bar{w} 的标量势和矢量势函数。

将式(6)中标量势函数和矢量势函数分别代入式(5)中得:

$$\begin{cases} [-(\lambda_c + 2\mu)l_1^2 \nabla^4 \varphi_s - \alpha M l_1^2 \nabla^4 \varphi_f + (\lambda_c + 2\mu - \rho l_0^2 \omega^2) \nabla^2 \varphi_s + (\alpha M - \rho l_0^2 \omega^2) \nabla^2 \varphi_f] = \\ -\rho \omega^2 \varphi_s - \rho_f \omega^2 \varphi_f \\ (-\alpha M l_1^2 \nabla^4 \varphi_s - M l_1^2 \nabla^4 \varphi_f + \alpha M \nabla^2 \varphi_s + M \nabla^2 \varphi_f) = \\ -\rho_i \omega^2 \varphi_s - (m\omega^2 + \frac{j\eta}{k} \omega) \varphi_f \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} [l_1^2 \mu \nabla^4 \psi_s + (\rho l_0^2 \omega^2 - \mu) \nabla^2 \psi_s + \rho_i l_0^2 \omega^2 \nabla^2 \psi_f] = \\ \rho \omega^2 \psi_s + \rho_f \omega^2 \psi_f \\ \rho_i \omega^2 \psi_s + (m\omega^2 + \frac{j\eta}{k} \omega) \psi_f = 0 \end{cases} \quad (8)$$

根据式(7)和(8)可得:

$$\begin{cases} \nabla^4 \varphi_s + a_1 \nabla^2 \varphi_s + b_1 \varphi_s = A (\nabla^2 \varphi_f + c_1 \varphi_f) \\ \nabla^2 \varphi_s + a_2 \varphi_s = B (\nabla^4 \varphi_f + b_2 \nabla^2 \varphi_f + c_2 \varphi_f) \\ \nabla^4 \psi_s + a_3 \nabla^2 \psi_s + b_3 \psi_s = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\rho l_0^2 \omega^2 - (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) l_1^2}, b_1 = \frac{(\alpha \rho_f \omega^2 - \rho \omega^2)}{(\lambda + 2\mu) l_1^2}, \\ c_1 &= \frac{\alpha (m\omega^2 + j\eta \omega/k) - \rho_f \omega^2}{\rho_i l_0^2 \omega^2}, \\ A &= \frac{-\rho_i l_0^2 \omega^2}{(\lambda + 2\mu) l_1^2}, B = \frac{(\lambda + 2\mu) l_1^2 M}{\alpha M \rho l_0^2 \omega^2}, \\ a_2 &= \frac{\rho_f (\lambda_c + 2\mu) - \alpha M \rho}{\alpha M \rho l_0^2}, b_2 = -\frac{\alpha \rho_f l_0^2 \omega^2 + \lambda + 2\mu}{(\lambda + 2\mu) l_1^2}, \\ c_2 &= \frac{\alpha M \rho_f \omega^2 - (m\omega^2 + j\eta \omega/k) (\lambda + \alpha^2 M + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) l_1^2 M}, \\ a_3 &= \frac{(\rho l_0^2 \omega^2 - \mu) (m\omega^2 + \frac{j\eta}{k} \omega) - l_0^2 \rho_f \omega^4}{(m\omega^2 + \frac{j\eta}{k} \omega) l_1^2 \mu}, \\ b_3 &= \frac{\rho_f \omega^4 - \rho \omega^2 (m\omega^2 + \frac{j\eta}{k} \omega)}{(m\omega^2 + \frac{j\eta}{k} \omega) l_1^2 \mu}. \end{aligned}$$

通过式(9)可消去 φ_f ,从而可得到关于 φ_s, ψ_s 的高阶偏微分方程:

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)(\nabla^2 + k_3^2)(\nabla^2 + k_4^2) \varphi_s = 0 \\ (\nabla^2 + k_{s1}^2)(\nabla^2 + k_{s2}^2) \psi_s = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 &= a_1 + b_2, \\ k_3^2 k_4^2 + (k_1^2 + k_2^2)(k_3^2 + k_4^2) + k_1^2 k_2^2 &= \\ b_1 + b_2 a_1 + c_2 - \frac{A}{B}, \\ (k_1^2 + k_2^2) k_3^2 k_4^2 + k_1^2 k_2^2 (k_3^2 + k_4^2) &= \\ b_1 b_2 + c_2 a_1 - \frac{A}{B} (c_1 + a_2), \\ k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 &= c_2 b_1 - \frac{A}{B} c_1 a_2, \\ k_{s1}^2 &= \frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4b_3}}{2}, k_{s2}^2 = \frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4b_3}}{2}. \end{aligned}$$

由上式可知,理论上4种P波和2种SV波,然而,由 TONG 等^[18]的分析可知,只有P1波和P2波,相对应的波数分别假设为 k_1 和 k_2 ,而SV波只有一种。即

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2) \varphi_s = 0 \\ (\nabla^2 + k_{s1}^2) \psi_s = 0 \end{cases} \quad (11)$$

式(11)的势函数通解为:

$$\begin{cases} \varphi_{s1} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(k_1 r) \cos(n\theta)] \\ \varphi_{s2} = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(k_2 r) \cos(n\theta)] \\ \psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n H_n^{(1)}(k_{s1} r) \sin(n\theta)] \end{cases} \quad (12)$$

式中 A_n, B_n 和 C_n 为待定系数; φ_{s1} 和 φ_{s2} 分别为土骨架中的P1波和P2波的势函数; $H_n^{(1)}$ 为第1类 n 阶 Hankel 函数; ψ_s 为土骨架中剪切波的势函数。

因此,饱和土的总波场为:

$$\begin{cases} \varphi_s = \varphi_{s1} + \varphi_{s2} + \varphi^{(i)} \\ \psi_s = \psi_s \\ \varphi_f = \epsilon_1 (\varphi_{s1} + \varphi^{(i)}) + \epsilon_2 \varphi_{s2} \\ \psi_f = \epsilon_3 \psi_s \end{cases} \quad (13)$$

式中 $\epsilon_i (i=1, 2, 3)$ 为流体势函数与固体势函数的比值,其表达式为:

$$\epsilon_i = \frac{-k_i^6 + (a_1 + b_2 - c_1) k_i^4 + (b_2 - c_1) b_1 - \frac{A}{B} a_2 - \left[b_1 + (b_2 - c_1) a_1 - \frac{A}{B} \right] k_i^2}{A [c_1 (b_2 - c_1) - c_2]}, \quad i=1, 2;$$

$$\epsilon_3 = -\frac{\rho_f \omega^2}{m\omega^2 + j\omega b}.$$

1.3 衬砌中波场求解

由文献[14]可知,衬砌的总波场为:

$$\begin{cases} \Phi_{sd} = \Phi_{sd}^1 + \Phi_{sd}^2 \\ \Psi_{sd} = \Psi_{sd}^1 + \Psi_{sd}^2 \end{cases} \quad (14)$$

其中:

$$\begin{cases} \Phi_{sd}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_a r) D_{n1} \cos(n\theta) \\ \Psi_{sd}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_\beta r) E_{n1} \sin(n\theta) \\ \Phi_{sd}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(k_a r) D_{n2} \cos(n\theta) \\ \Psi_{sd}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(k_\beta r) E_{n2} \sin(n\theta) \end{cases},$$

$$\begin{cases} k_a = \sqrt{\frac{\rho_2 \omega^2}{\lambda_2 + 2\mu_2}} \\ k_\beta = \sqrt{\frac{\rho_2 \omega^2}{\mu_2}} \end{cases},$$

式中 Φ_{sd}^1 和 Ψ_{sd}^1 分别为衬砌外边界中折射 P 波和 SV 波的势函数; Φ_{sd}^2 和 Ψ_{sd}^2 分别为衬砌内边界产生的反射 P 波和 SV 波的势函数; $H_n^{(2)}$ 为第 2 类 n 阶 Hankel 函数; ρ_2 为衬砌密度; λ_2 和 μ_2 为 Lamé 常数; D_{n1} , D_{n2} , E_{n1} 和 E_{n2} 为待定系数。

2 边界条件及待定系数的求解

根据饱和土与衬砌界面的接触条件,可以得到:

当 $r = R_1$ 时:

$$\begin{cases} u_r = u_{sr} \\ u_\theta = u_{s\theta} \\ \sigma_{rr} + P_f = \sigma_{sr} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{sr\theta} \end{cases} \quad (15)$$

假设饱和土与衬砌的界面为不透水边界:

当 $r = R_1$ 时:

$$\frac{\partial P_f}{\partial r} = 0 \quad (16)$$

当 $r = R_2$ 时:

$$\begin{cases} \sigma_{sr} = 0 \\ \sigma_{sr\theta} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中 u_r 和 u_θ 分别表示围岩内土骨架的径向位移和环向位移; u_{sr} 和 $u_{s\theta}$ 分别表示衬砌的径向位移和环向位移; σ_{rr} 和 $\sigma_{r\theta}$ 分别表示饱和土骨架的法向应力和切

向应力; σ_{sr} 和 $\sigma_{sr\theta}$ 分别表示衬砌结构的法向应力和切向应力。

将本构关系式(4)进行泰勒展开,并略去高阶项可得:

$$\sigma_{ij} = [1 - (l_1^2 - l_0^2) \nabla^2] \sigma_{ij}^L \quad (18)$$

由此可得经典 Biot 理论下土骨架总应力与本文考虑孔隙尺寸及土体结构非均匀效应的土骨架总应力表达式与关系如下:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^L = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_c \nabla \cdot u + \alpha M \nabla \cdot w \\ \sigma_{\theta\theta}^L = 2\mu \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda_c \nabla \cdot u + \alpha M \nabla \cdot w \\ \sigma_{r\theta}^L = \mu \left[\frac{1}{r} \left(-u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \\ \sigma_{rr} = [1 - (l_1^2 - l_0^2) \nabla^2] \cdot \sigma_{rr}^L \\ \sigma_{\theta\theta} = [1 - (l_1^2 - l_0^2) \nabla^2] \cdot \sigma_{\theta\theta}^L \\ \sigma_{r\theta} = [1 - (l_1^2 - l_0^2) \nabla^2] \cdot \sigma_{r\theta}^L \end{cases} \quad (19)$$

衬砌内应力 $\sigma = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda_2 \delta_{ij} \epsilon$, 即

$$\begin{cases} \sigma_{sr} = 2\mu \cdot \frac{\partial u_{sr}}{\partial r} + \lambda_2 \nabla \cdot u_{sr} \\ \sigma_{s\theta} = 2\mu \cdot \frac{1}{r} \left(u_{sr} + \frac{\partial u_{s\theta}}{\partial \theta} \right) + \lambda_2 \nabla \cdot u_{sr} \\ \sigma_{sr\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \left(-u_{s\theta} + \frac{\partial u_{sr}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_{s\theta}}{\partial r} \right] \end{cases} \quad (20)$$

将得到的应力-位移表达式(19)~(20)代入边界条件式(15)~(17),可以得到由势函数的待定系数组成的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{15} & W_{16} & W_{17} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} & Y_{37} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} \\ H_{51} & H_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{64} & X_{65} & X_{66} & X_{67} \\ 0 & 0 & 0 & L_{74} & L_{75} & L_{76} & L_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_{n1} \\ D_{n2} \\ E_{n1} \\ E_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1 \\ -M_2 \\ -M_3 \\ -M_4 \\ -M_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

系数矩阵中各个系数的具体表达式见附录。根据矩阵方程可以求出势函数中的待定系数,进而求出所有的应力表达式。

3 结果验证与算例分析

本文采用 PAO 等^[1]定义的无量纲动应力集中系数 (Dynamic Stress Concentration Factor, DSCF) 来描述衬砌内动应力, DSCF 为衬砌内边界的环向应力 $\sigma_{s\theta}$ 与饱和土中 SV 波引起的应力 σ_0 的比值, 即

$$\sigma^* = \frac{\sigma_{s\theta}}{\sigma_0} \quad (22)$$

式中 $\sigma_0 = -(\lambda_2 + 2\mu_2)k_a^2\varphi_{00}$ 。

3.1 结果验证

为了对本文计算结果的准确性进行验证, 将计算结果退化为单相介质下的情况, 并与 PAO 等^[1]的计算结果进行对比。为此, 本文土体及衬砌的参数取值为: $\tilde{\mu} = 2.9$, $\gamma = 1.5$, $v_1 = 0.25$, $v_2 = 0.2$, $\beta = 1.1$ 。其中, $\tilde{\mu}$ 为单相介质与衬砌剪切弹性模量的比值, γ 为单相介质与衬砌中 P 波波速的比值, v_1 为单相介质的泊松比, v_2 为衬砌的泊松比, β 为衬砌内/外半径之比, αa 为无量纲波数。如图 2 所示, 本文退化解与文献^[1]的计算结果一致, 故本文计算结果的正确性得到了验证。

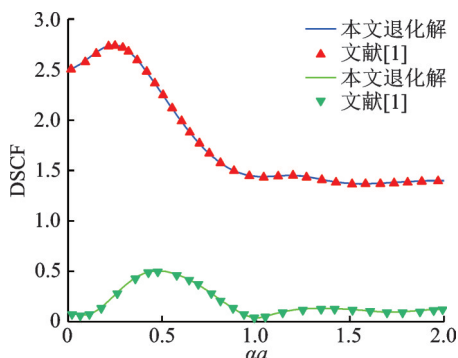


图 2 本文退化解与文献^[1]的计算结果对比

Fig. 2 Comparison of the calculation results of the degenerate solution of this paper with literature [1]

3.2 算例分析

为进一步分析饱和土中衬砌动力响应情况, 取饱和土参数为: 流体密度 $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, 土颗粒密度 $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$, $n_0 = 0.308$, $k = 10^{-8} \text{ m}^{-2}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, $\mu = 24.9 \times 10^6 \text{ Pa}$, $\alpha = 0.982$, $M = 5.745 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\lambda = 6.464 \times 10^8 \text{ Pa}$ 。衬砌的结构参数取值为: $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$; $\lambda_2 = 1.225 \times 10^9 \text{ Pa}$; $\mu_2 = 44.9 \times 10^6 \text{ Pa}$, 衬砌外径 R_1 为 3 m, 内径 R_2 满足 $R_1/R_2 = 1.1$ 。

图 3 为衬砌内边界 $\theta = 0^\circ$ 处的动应力集中系数随频率的变化曲线, 图中 f 为入射波频率。由图 3 可知, 频率较低时, 非局部参数和尺寸因子对 DSCF 大小几乎没有影响, 但随着频率的增加, 非局部参数和尺寸因子对 DSCF 的影响逐渐变得明显。这主要是因为, 在饱和多孔弹性介质中, 波长会随着频率的增加而变短, 从而使其波长趋于或小于孔径。此时, 波不能轻易地绕过土颗粒, 从而导致波的散射增加。因此, 高频条件下非局部参数和尺寸因子对衬砌结构 DSCF 的影响都不可忽略。

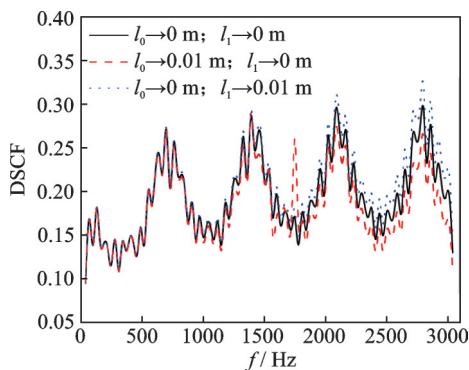


图 3 衬砌内径最右边点 ($\theta = 0^\circ$) 处的 DSCF 在三种不同条件下随频率的变化

Fig. 3 Variation of DSCF with frequency at the rightmost point of the inner diameter of the lining ($\theta = 0^\circ$) under three kinds of different conditions

图 4(a) 和 (b) 分别为 $l_1 \rightarrow 0$ 和 $l_0 \rightarrow 0$ 时, DSCF 随角度变化的分布曲线, 入射波频率为 3000 Hz, 衬砌外/内径比为 1.05。由图 4(a) 可知, 非局部参数由 0 增加到 0.01 时, 衬砌内 DSCF 逐渐减小, 但其沿衬砌环向的分布规律不变, 且 DSCF 的最大值均出现在 $\theta = 0^\circ$ 处, 在衬砌的 $\theta = 292^\circ$ 处 DSCF 由 0.068 减小至 0.047, 减小幅度达 31%。由图 4(b) 可知, 尺寸因子由 0 增加到 0.01 时, DSCF 会逐渐增大, 但其沿衬砌环向的分布规律不变, 且 DSCF 的最大值也出现在 $\theta = 0^\circ$ 处, 在衬砌的 $\theta = 296^\circ$ 处 DSCF 由 0.087 增大至 0.104, 增大幅度达 20%。由 TONG 等^[18]的研究可知, 非局部参数对土体刚度有软化效应, 而尺寸因子对土体刚度有硬化效应, 由此导致非局部参数引起衬砌 DSCF 减小, 而尺寸因子引起 DSCF 增大。

图 5 为在非局部参数和尺寸因子变化的条件下, 入射波频率 $f = 1500 \text{ Hz}$ 时, $\theta = 0^\circ$ 处衬砌 DSCF 的曲线图。从图 5 中可以清楚地看出, 非局部参数的增加对衬砌内 DSCF 有衰减作用, 而尺寸因子的增加对 DSCF 有增强作用。

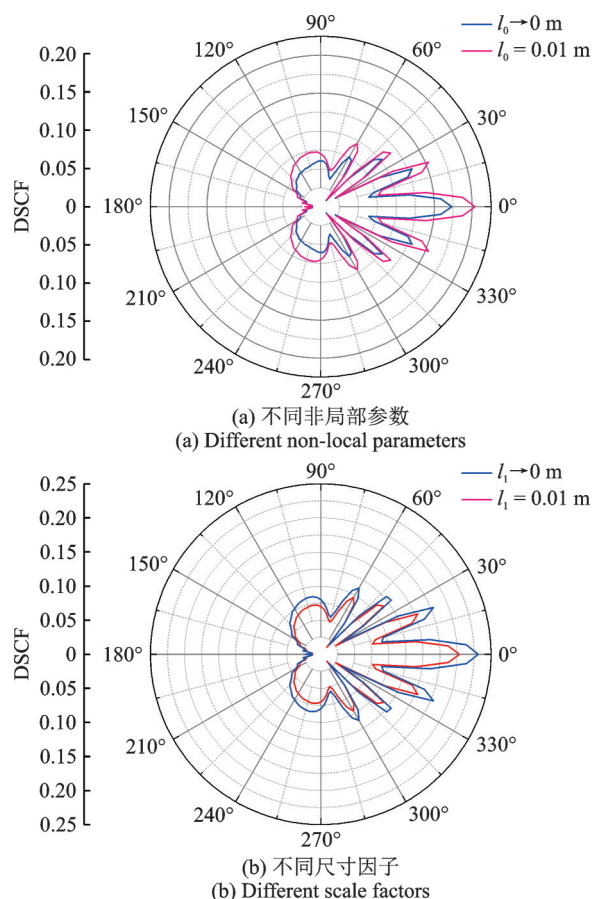


图 4 非局部参数和尺寸因子对衬砌环向 DSCF 的影响

Fig. 4 Influence of non-local parameter and scale factor on lining annular DSCF

图 6 给出了 $\theta = 0^\circ$ 处衬砌内 DSCF 沿衬砌径向的分布曲线, 此处衬砌外径 $R_1 = 3$ m, 内径 $R_2 =$

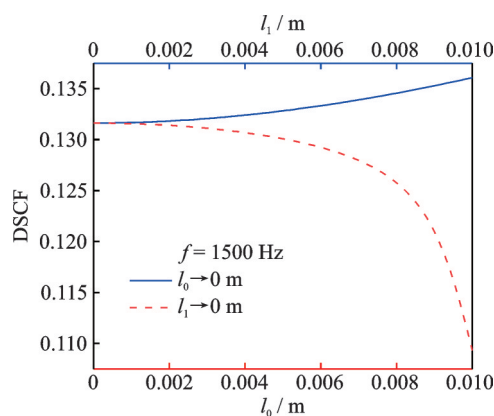


图 5 非局部参数和尺寸因子对 DSCF 的影响

Fig. 5 Influence of non-local parameter and scale factor on DSCF

2.5 m。由图 6 可知, 频率较低时, DSCF 沿径向波动较小, 而随着频率的增加, 衬砌内 DSCF 沿着径向分布的波动逐渐增加。这是由于随着 P 波频率的增加, 波长变短, 由此导致衬砌内 DSCF 沿径向波动更加明显。为更加直观地观察衬砌内 DSCF 分布情况, 图 7 给出了不同频率下, 非局部参数和尺寸因子对衬砌截面动应力集中系数分布影响的云图。由图 7 可知, 随着频率的增加, 衬砌内 DSCF 沿径向分布的波动越来越明显, 这与图 6 的结果一致。此外, 随着非局部参数和尺寸因子的增加, 衬砌内动应力的分布模式不变, 但非局部参数增大, DSCF 的大小随之减小, 而尺寸因子增大, DSCF 的大小随之增大。

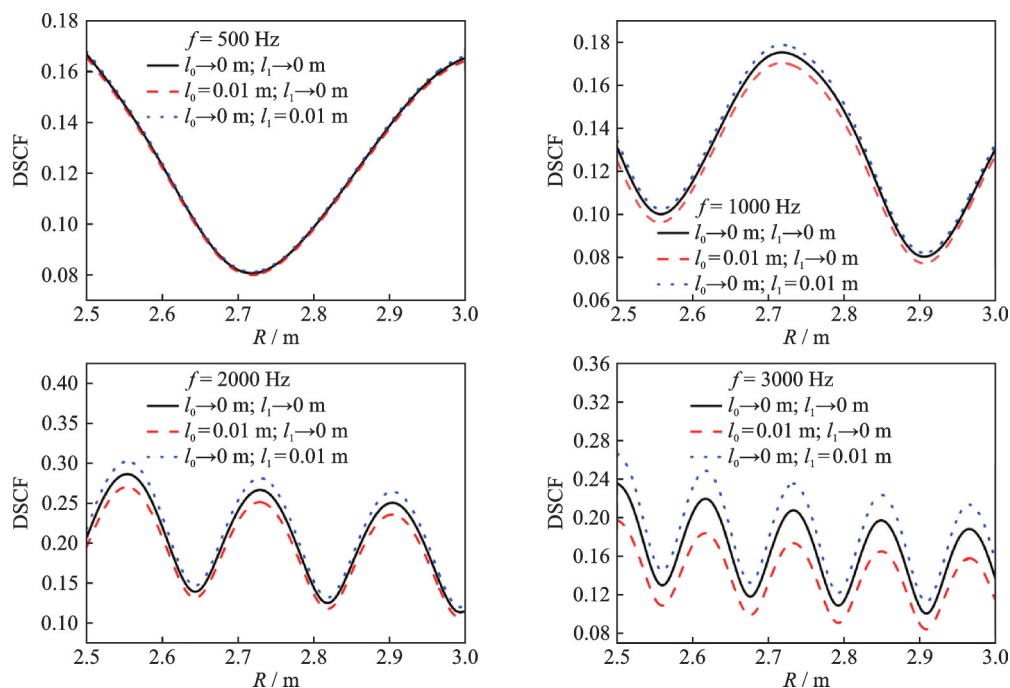


图 6 不同频率和不同参数下 DSCF 沿衬砌径向的分布

Fig. 6 Distribution of DSCF along the radial direction of the lining under different frequencies and different parameters

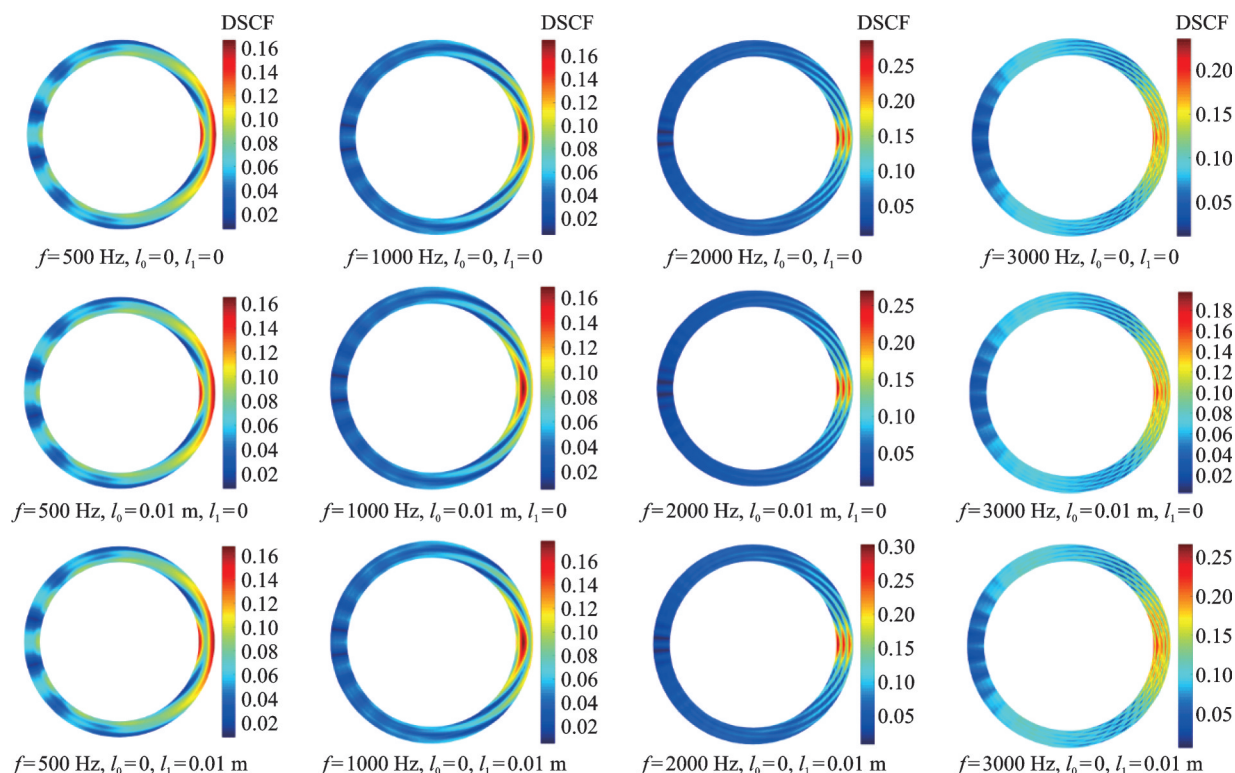


图 7 不同频率和不同参数下衬砌截面 DSCF 分布云图

Fig. 7 Cloud diagram of DSCF distribution of lining cross-section under different frequencies and different parameters

4 结 论

本文基于波函数展开法,在应变梯度非局部 Biot 理论的基础上,求解了 P 波入射情况下圆形衬砌隧道动力响应的解析解。将结果退化为单相介质的情况,验证了计算程序。通过算例分析,得出了以下结论:

(1) 频率较低时,非局部参数和尺寸因子对衬砌 DSCF 的影响可以忽略不计。而随着频率的增加,非局部参数的增加会衰减衬砌内 DSCF,尺寸因子的增加则会增强衬砌内 DSCF。

(2) DSCF 沿衬砌环向分布,最大值出现在 $\theta=0^\circ$ 的位置,且非局部参数和尺寸因子仅改变 DSCF 的大小,不会影响其环向分布形式。

(3) 衬砌内 DSCF 沿衬砌径向分布,随着频率的增加,其波动变得更加明显。随着非局部参数和尺寸因子的增加,衬砌内动应力的分布模式不变,但 DSCF 的大小与非局部参数呈负相关,与尺寸因子呈正相关。

参考文献:

[1] PAO Y H, MOW C C, ACHENBACH J D. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations [J]. Journal of Applied Mechanics, 1973, 40(4): 872.

[2] LEE V W, CAO H. Diffraction of SV waves by circular canyons of various depths[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(9): 2035-2056.

[3] YI C P, ZHANG P, JOHANSSON D, et al. Dynamic response of a circular lined tunnel with an imperfect interface subjected to cylindrical P-waves[J]. Computers and Geotechnics, 2014, 55: 165-171.

[4] YI C P, LU W B, ZHANG P, et al. Effect of imperfect interface on the dynamic response of a circular lined tunnel impacted by plane P-waves[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2016, 51: 68-74.

[5] 王长柏,李海波,周青春,等. P波作用下深埋隧道动力应力集中问题参数敏感性分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(3): 775-780.

WANG Changbai, LI Haibo, ZHOU Qingchun, et al. Parameters sensitivity analysis of dynamic stress concentration for deep buried tunnel under incident plane waves [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(3): 775-780.

[6] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. Journal of Applied Physics, 1962, 33(4): 1483-1498.

[7] 李伟华,赵成刚. 饱和土半空间中圆柱形孔洞对平面 P 波的散射[J]. 岩土力学, 2004, 25(12): 1867-1872.

LI Weihua, ZHAO Chenggang. An analytical solution for diffraction of plane P-waves by cylindrical cavity in a fluid-saturated porous media semi-space[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(12): 1867-1872.

[8] 李伟华,张钊. 饱和土中深埋圆柱形衬砌洞室对瞬态

- 平面波的散射[J]. 地球物理学报, 2013, 56(1): 325-334.
- LI Weihua, ZHANG Zhao. Scattering of transient plane waves by deep buried cylindrical lining cavity in saturated soil[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2013, 56(1): 325-334.
- [9] 陆建飞, 王建华. 饱和土中的任意形状孔洞对弹性波的散射[J]. 力学学报, 2002, 34(6): 904-913.
- LU Jianfei, WANG Jianhua. The scattering of elastic waves by holes of arbitrary shapes in saturated soil[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2002, 34(6): 904-913.
- [10] 周香莲, 周光明, 王建华. 饱和土中圆形衬砌结构对弹性波的散射[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(9): 1572-1576.
- ZHOU Xianglian, ZHOU Guangming, WANG Jianhua. Scattering of elastic wave by circular cavity with lining in saturated soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(9): 1572-1576.
- [11] 范凯祥, 申玉生, 闻毓民, 等. 平面 Rayleigh 波入射下饱和土中浅埋隧道复合式衬砌的动力响应[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(3): 444-455.
- FAN Kaixiang, SHEN Yusheng, WEN Yumin, et al. Dynamic response of composite linings of shallowly buried tunnels in saturated soils subjected to incidence of plane Rayleigh waves[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(3): 444-455.
- [12] DING H B, TONG L H, XU C J, et al. Aseismic performance analysis of composite lining embedded in saturated poroelastic half space[J]. International Journal of Geomechanics, 2020, 20(9): 4020156.
- [13] TONG L H, YU Y, HU W T, et al. On wave propagation characteristics in fluid saturated porous materials by a nonlocal Biot theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 379: 106-118.
- [14] 徐长节, 丁海滨, 童立红, 等. 基于非局部 Biot 理论下饱和土中深埋圆柱形衬砌对平面弹性波的散射[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(9): 1563-1570.
- XU Changjie, DING Haibin, TONG Lihong, et al. Scattering waves generated by cylindrical lining in saturated soil based on nonlocal Biot theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(9): 1563-1570.
- [15] XU C J, DING H B, TONG L H, et al. Scattering of a plane wave by shallow buried cylindrical lining in a poroelastic half-space [J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 70: 171-189.
- [16] DING H B, TONG L H, XU C J, et al. Dynamic responses of shallow buried composite cylindrical lining embedded in saturated soil under incident P wave based on nonlocal Biot theory[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2019, 121: 40-56.
- [17] KIMURA M. Velocity dispersion and attenuation in granular marine sediments: comparison of measurements with predictions using acoustic models[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2011, 129(6): 3544-3561.
- [18] TONG L H, DING H B, YAN J W, et al. Strain gradient nonlocal Biot poromechanics[J]. International Journal of Engineering Science, 2020, 156: 103372.
- [19] DING H B, TONG L H, XU C J, et al. On propagation characteristics of Rayleigh wave in saturated porous media based on the strain gradient nonlocal Biot theory [J]. Computers and Geotechnics, 2022, 141: 104522.

Influence of soil pore size and structure heterogeneity on the dynamic characteristics of circular lining subjected to P-wave

DING Hai-bin^{1,2,3}, LIU Zhi-yun^{1,2,3}, LI Peng⁴, CHEN Chang-ke^{1,2,3}, TONG Li-hong^{1,2,3},
XU Chang-jie^{1,2,3}

(1.State Key Laboratory of Performance Monitoring and Protecting of Rail Transit Infrastructure, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2.Engineering Research & Development Centre for Underground Technology of Jiangxi Province, Nanchang 330013, China; 3.Jiangxi Key Laboratory of Infrastructure Safety Control in Geotechnical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 4.CCCC Second Public Bureau Third Engineering Company Limited, Xi'an 710016, China)

Abstract: Based on the strain gradient nonlocal Biot theory, the analytical solution of the dynamic response of the tunnel lining under the action of P-wave is obtained by using the wave function expansion method and the boundary conditions between saturated soil and lining with the deeply buried circular lining as the research object. The influence of non-local parameters and size factors on the dynamic stress concentration factor (DSCF) is investigated for different incident P-wave frequencies. The results show that when the incident wave frequency is low, the non-local parameters and size factor have almost no effect on the DSCF. As the incident wave frequency increases, the effects of the non-local parameters and size factor on the DSCF become more and more obvi-

ous. The non-local parameters are negatively correlated with the DSCF, and the size factor is positively correlated with the DSCF. The maximum dynamic stresses in the lining appear on the right side of the lining. With an increase of frequency, the DSCF in the lining shows obvious radial direction and the dynamic stresses in the lining appear in the right side of the lining. The maximum dynamic stresses in the lining all appear on the right side of the lining. With an increase of frequency, the DSCF in the lining shows obvious fluctuation along the radial direction, and the non-local parameters and size factor have little influence on the distribution pattern of the cyclic stresses in the lining.

Key words: strain gradient non-local Biot theory; tunnel lining; non-local parameters; scale factors; DSCF

作者简介: 丁海滨(1991—),男,博士,副教授。E-mail:hbding@ecjtu.edu.cn。

通讯作者: 童立红(1988—),男,博士,教授。E-mail:lhtong@ecjtu.edu.cn。

附 录

$$\begin{aligned}
 W_{1b} &= \frac{1}{2} k_b \cos(n\theta) [H_{-1+n}^{(1)}(k_b r) - H_{1+n}^{(1)}(k_b r)], \quad b=1, 2; \quad W_{13} = \frac{n \cos(n\theta) H_n^{(1)}(k_3 r)}{r}; \\
 W_{14}^{(j)} &= W_{15}^{(j)} = \frac{1}{2} k_a \cos(n\theta) [-H_{-1+n}^{(j)}(k_a r) + H_{1+n}^{(j)}(k_a r)], \quad j=1, 2; \\
 W_{16}^{(j)} &= W_{17}^{(j)} = -\frac{n \cos(n\theta) H_n^{(j)}(k_\beta r)}{r}, \quad j=1, 2; \\
 C_{2b} &= -\frac{n H_n^{(1)}(k_b r) \sin(n\theta)}{r}, \quad b=1, 2; \quad C_{23} = \frac{1}{2} k_3 [-H_{-1+n}^{(1)}(k_3 r) + H_{1+n}^{(1)}(k_3 r)] \sin(n\theta); \\
 C_{24}^{(j)} &= C_{25}^{(j)} = \frac{n H_n^{(j)}(k_a r) \sin(n\theta)}{r}, \quad j=1, 2; \quad C_{26}^{(j)} = C_{27}^{(j)} = \frac{1}{2} k_\beta [H_{-1+n}^{(j)}(k_\beta r) - H_{1+n}^{(j)}(k_\beta r)] \sin(n\theta), \quad j=1, 2; \\
 Y_{3b} &= \frac{1}{k_b^3 r^7} \cos(n\theta) \left\{ k_1 r [-8(-2+n)(-1+n)n(1+n) [4(l_0^2 - l_1^2)(1+n) + r^2] \mu + k_b^6(l_0^2 - \right. \\
 &\quad l_1^2) r^6 (\alpha M \epsilon_1 + \lambda_c + 2\mu) + k_b^4 r^4 \{ \alpha M r^2 + M [r^2 - [4(l_0^2 - l_1^2)(-2+n)(-1+n) + r^2] \alpha] \epsilon_1 - \\
 &\quad [4(l_0^2 - l_1^2)(-2+n)(-1+n) + r^2] \lambda_c - 2[(l_0^2 - l_1^2)[6+n(-9+5n)] + r^2] \mu \} + \\
 &\quad 2k_b^2(-1+n)r^2 \{ 2(-2+n)r^2 [-\alpha M + M(-1+\alpha) \epsilon_1 + \lambda_c] + [4(l_0^2 - l_1^2)n(1+n)^2 + (-4+ \\
 &\quad 5n)r^2] \mu \}] H_{-4+n}^{(1)}(k_b r) - 2[-8(-3+n)(-2+n)(-1+n)n(1+n) [4(l_0^2 - l_1^2)(1+n) + r^2] \mu + \\
 &\quad k_b^6(l_0^2 - l_1^2) r^6 [2(-2+n)(\alpha M \epsilon_1 + \lambda_c) + (-7+4n)\mu] + k_b^4 r^4 \{ 2M(-2+n) \cdot \\
 &\quad [-2(l_0^2 - l_1^2)(-3+n)(-1+n) \alpha \epsilon_1 + r^2(\alpha + \epsilon_1 - \alpha \epsilon_1)] - \\
 &\quad 2(-2+n) [2(l_0^2 - l_1^2)(-3+n)(-1+n) + r^2] \lambda_c + [-4(l_0^2 - l_1^2)(-1+n) [9+n(-8+3n)] + \\
 &\quad (7-4n)r^2] \mu \} + 4k_b^2(-2+n)(-1+n)r^2 \{ (-3+n)r^2 [-\alpha M + M(-1+\alpha) \epsilon_1 + \lambda_c] + \\
 &\quad [2(l_0^2 - l_1^2)n(1+n)^2 + 3(-1+n)r^2] \mu \} \} H_{-3+n}^{(1)}(k_b r) \Big\}, \quad b=1, 2; \\
 Y_{33} &= \frac{1}{k_3^2 r^6} 2n\mu \cos(n\theta) \left\{ k_3 r (-2+2n^2 - k_3^2 r^2) [4(l_0^2 - l_1^2)(1+n) + [1+k_3^2(-l_0^2 + l_1^2)] r^2] H_{-3+n}^{(1)}(k_3 r) + \right. \\
 &\quad \left\{ -16(l_0^2 - l_1^2)(-2+n)(-1+n)(1+n)^2 + 4(-1+n^2) [2-n+k_3^2(l_0^2 - l_1^2)(1+n)] r^2 + \right. \\
 &\quad \left. k_3^2 [3(-1+n) - k_3^2(l_0^2 - l_1^2)(-1+3n)] r^4 \right\} H_{-2+n}^{(1)}(k_3 r) \Big\}; \\
 Y_{34}^{(j)} &= Y_{35}^{(j)} = \frac{1}{k_a r^3} \cos(n\theta) \left\{ k_a r [2n(1+n)\mu_2 - k_a^2 r^2 (\lambda_2 + 2\mu_2)] H_{-2+n}^{(j)}(k_a r) + 2[-2n(-1+n^2)\mu_2 + \right. \\
 &\quad \left. k_a^2 r^2 [(-1+n)\lambda_2 + (-1+2n)\mu_2] \right\} H_{-1+n}^{(j)}(k_a r), \quad j=1, 2; \\
 Y_{36}^{(j)} &= Y_{37}^{(j)} = \frac{2n\mu_2 \cos(n\theta) [-k_\beta r H_{-1+n}^{(j)}(k_\beta r) + (1+n) H_n^{(j)}(k_\beta r)]}{r^2}, \quad j=1, 2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{4b} &= \frac{1}{k_b^2 r^6} 2n\mu \left\{ -k_b r (-2 + 2n^2 - k_b^2 r^2) \left[4(l_0^2 - l_1^2)(1+n) + [1 + k_b^2(-l_0^2 + l_1^2)]r^2 \right] H_{-3+n}^{(1)}(k_b r) + \right. \\
&\quad \left\{ 16(l_0^2 - l_1^2)(-2+n)(-1+n)(1+n)^2 - 4(-1+n^2)[2-n + k_b^2(l_0^2 - l_1^2)(1+n)]r^2 + \right. \\
&\quad \left. k_b^2[3-3n + k_b^2(l_0^2 - l_1^2)(-1+3n)]r^4 \right\} H_{-2+n}^{(1)}(k_b r) \Big\} \sin(n\theta), \quad b=1, 2; \\
K_{43} &= -\frac{1}{16k_3 r^5} \mu \left\{ k_3^5(l_0^2 - l_1^2)r^5 H_{-4+n}^{(1)}(k_3 r) + k_3 r \left\{ -128(l_0^2 - l_1^2)n(1+n)^2 + 4[-8n(1+n) + \right. \right. \\
&\quad \left. k_3^2(l_0^2 - l_1^2)[10+n(13+7n)]]r^2 + k_3^2[16+15k_3^2(-l_0^2 + l_1^2)]r^4 \right\} H_{-2+n}^{(1)}(k_3 r) + \\
&\quad 2 \left\{ 128(l_0^2 - l_1^2)(-1+n)n(1+n)^2 - 32n(1+n)[1-n + k_3^2(l_0^2 - l_1^2)(1+n)]r^2 + \right. \\
&\quad \left. k_3^2[-16n + k_3^2(l_0^2 - l_1^2)(-3+17n)]r^4 \right\} H_{-1+n}^{(1)}(k_3 r) \Big\} \sin(n\theta); \\
K_{44}^{(j)} &= K_{45}^{(j)} = \frac{2n\mu_2 [k_a r H_{-1+n}^{(j)}(k_a r) - (1+n)H_n^{(j)}(k_a r)] \sin(n\theta)}{r^2}, \quad j=1, 2; \\
K_{46}^{(j)} &= K_{47}^{(j)} = \frac{1}{k_\beta r^3} \mu_2 \left\{ k_\beta r [-2n(1+n) + k_\beta^2 r^2] H_{-2+n}^{(j)}(k_\beta r) + 2n(-2 + 2n^2 - k_\beta^2 r^2) H_{-1+n}^{(j)}(k_\beta r) \right\} \sin(n\theta), \\
&\quad j=1, 2; \\
H_{5b} &= \frac{1}{r^3} M(\alpha + \epsilon_1) \cos(n\theta) \left\{ -k_b r [-2(-1+n)n + k_b^2 r^2] H_{-3+n}^{(j)}(k_b r) + [-4(-2+n)(-1+n)n + \right. \\
&\quad \left. k_b^2(-4+3n)r^2] H_{-2+n}^{(1)}(k_b r) \right\}, \quad b=1, 2; \\
X_{64}^{(j)} &= X_{65}^{(j)} = \frac{1}{k_a r^3} \cos(n\theta) \left\{ k_a r [-2n(1+n)\mu_2 + k_a^2 r^2(\lambda_2 + 2\mu_2)] H_{-2+n}^{(j)}(k_a r) + \right. \\
&\quad \left. 2[2n(-1+n^2)\mu_2 + k_a^2 r^2(\lambda_2 - n\lambda_2 + \mu_2 - 2n\mu_2)] H_{-1+n}^{(j)}(k_a r) \right\}, \quad j=1, 2; \\
X_{66}^{(j)} &= X_{67}^{(j)} = \frac{2n\mu_2 \cos(n\theta) [k_\beta r H_{-1+n}^{(j)}(k_\beta r) - (1+n)H_n^{(j)}(k_\beta r)]}{r^2}, \quad j=1, 2; \\
L_{74}^{(j)} &= L_{75}^{(j)} = \frac{2n\mu_2 [-k_a r H_{-1+n}^{(j)}(k_a r) + (1+n)H_n^{(j)}(k_a r)] \sin(n\theta)}{r^2}, \quad j=1, 2; \\
L_{76}^{(j)} &= L_{77}^{(j)} = \frac{1}{k_\beta r^3} \mu_2 \left\{ k_\beta r [2n(1+n) - k_\beta^2 r^2] H_{-2+n}^{(j)}(k_\beta r) + 2n(2 - 2n^2 + k_\beta^2 r^2) H_{-1+n}^{(j)}(k_\beta r) \right\} \sin(n\theta), \quad j=1, 2; \\
M_1 &= \frac{1}{2} i^n \varphi_0 k_1 \epsilon_n [J_{-1+n}(k_1 r) - J_{1+n}(k_1 r)] \cos(n\theta); \quad M_2 = -\frac{i^n \varphi_0 n \epsilon_n J_n(k_1 r) \sin(n\theta)}{r}; \\
M_3 &= \frac{1}{r^4} e^{\frac{i n \pi}{2}} \varphi_0 \epsilon_n \left\{ 2k_1 r [-4(l_0^2 - l_1^2)(1+n^2) + [-1 + k_1^2(l_0^2 - l_1^2)]r^2] \mu J_{-1+n}(k_1 r) + \right. \\
&\quad \left\{ 2n(1+n)[4(l_0^2 - l_1^2)(1+n) + r^2] \mu + k_1^4(l_0^2 - l_1^2)r^4(\alpha M \epsilon_1 + \lambda_c + 2\mu) + \right. \\
&\quad \left. k_1^2 r^2 [-2(l_0^2 - l_1^2)(2+n+n^2)\mu - r^2[-\alpha M + M(-1+\alpha)\epsilon_1 + \lambda_c + 2\mu]] \right\} J_n(k_1 r) \Big\} \cos(n\theta); \\
M_4 &= \frac{2}{r^4} e^{\frac{i n \pi}{2}} \varphi_0 n \epsilon_n \mu \left\{ k_1 r [-8(l_0^2 - l_1^2) + [-1 + k_1^2(l_0^2 - l_1^2)]r^2] J_{-1+n}(k_1 r) + [4(l_0^2 - l_1^2)(1+n)^2 + \right. \\
&\quad \left. [1+n - k_1^2(l_0^2 - l_1^2)(3+n)]r^2] J_n(k_1 r) \right\} \sin(n\theta); \\
M_5 &= \frac{1}{r^3} i^n \varphi_0 M(\alpha + \epsilon_1) \epsilon_n \left\{ -k_1 r [-2(-1+n)n + k_1^2 r^2] J_{-3+n}(k_1 r) + [-4(-2+n)(-1+n)n + \right. \\
&\quad \left. k_1^2(-4+3n)r^2] J_{-2+n}(k_1 r) \right\} \cos(n\theta);
\end{aligned}$$

式中 i 为虚数; 下标 $b=1$ 时表示 k_1 , 下标 $b=2$ 时表示 k_2 ; 上标 $j=1$ 表示第一类 Hankel 函数, 上标 $j=2$ 表示第二类 Hankel 函数。