

P₁波在非饱和土自由边界上反射的能量特性研究

周凤玺^{1,2}, 姚桃岐¹, 柳鸿博³

(1. 兰州理工大学土木工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 兰州理工大学西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 甘肃 兰州 730050; 3. 东南大学土木工程学院, 江苏 南京 211189)

摘要: 基于多孔介质理论和连续介质波动理论, 研究了非饱和半空间自由边界上平面 P₁波反射时, 各类反射波的振幅反射以及能量反射特性。利用 Helmholtz 分解定理和具体的自由边界条件, 得到了由平面 P₁波斜入射产生的 4 种反射波(反射 P₁波、反射 P₂波、反射 P₃波和反射 S 波)的振幅反射系数及能量反射系数的解析表达式, 并通过数值算例分析了入射角度以及饱和度、频率和孔隙率等物理参数对能量特性的影响规律。结果表明: 各反射波的振幅反射系数及能量反射系数不仅受到入射角的影响, 同时也随着饱和度的改变而发生显著变化; 入射波能量主要由反射 P₁波和反射 S 波携带。

关键词: 非饱和土; 平面 P₁波; 波的反射; 反射系数; 能量分配

中图分类号: TU435 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2024)12-2066-12

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.12.008

引言

弹性波在多孔介质(如天然土、岩石等)中的传播问题一直是岩土工程、石油工程、海洋工程、声学、地球物理学中重要的研究课题, 已有研究表明, 弹性波在不同介质的交界面处垂直入射时会发生多次反射、透射与绕射, 而在斜入射条件下还会发生压缩波(P波)与剪切波(S波)的波型转换^[1-2]。上述现象使得交界面处的介质同时受到挤压和剪切作用, 进而会引发一系列工程问题。例如, 地震作用下, 弹性波将在土层与空气分界面处发生多次反射和透射现象, 从而导致地面建筑物倾斜、开裂, 甚至倒塌。此外, 海底滑坡等自然灾害与弹性波在不同介质交界面处的反射和透射行为密不可分^[3]。因此, 研究弹性波在不同介质分界面处的反射与透射问题具有重要的理论和现实意义。基于 Biot 双相多孔介质波动模型^[4], 对弹性波在饱和土中的反射与透射问题已经有一系列的研究成果^[5-10]。近年来, 周凤玺等^[11]、周来江等^[12]、陆建飞等^[13]、印兴耀等^[14]和杨春等^[15]针对饱和多孔介质边界上弹性波的反射和透射问题, 先后从不同层面开展了相关的研究。

然而, 在工程实践中经常遇到处于地下水位以上的非饱和土, 由于孔隙中气相和液相不同的物理力学特性使得其波动行为明显有别于饱和土体, 因

此弹性波在非饱和土中的传播特性研究显得十分重要。文献[16-18]基于连续介质力学的混合物理论建立了非饱和多孔弹性介质的波动方程, 通过数值算例系统分析了非饱和多孔弹性介质中各类体波的波速和衰减系数随饱和度、频率和渗透系数等物理力学参数的变化规律。翟睿智等^[19]通过考虑土颗粒间的吸应力建立了一类非饱和土三相波动模型, 且基于 V-G 模型得到了非饱和土中体波的波速和衰减系数的解析表达式, 并通过试验数据验证了其理论分析结果的有效性。LIU 等^[20]和 ZHOU 等^[21]进一步对非饱和土中弹性波的衰减特性进行了研究。在此基础上文献[22-26]研究了非饱和多孔介质中不同界面上弹性波的反射与透射问题。

目前, 关于弹性波在非饱和土中的传播特性研究主要集中在波速、波衰减以及在不同分界面上反射和透射过程中各种波引起的位移、应力等方面, 但对于能量分配的研究还不完善。本文研究了平面 P₁波在非饱和土自由边界处反射时的能量变化行为。本文在多孔介质理论和非饱和土力学框架内对弹性波在非饱和半空间表面的反射及其能量特性进行了理论分析, 并且考虑到平面 P₁波是体波中传播速度最快、衰减最慢的波。因此, 不失一般性, 文中仅对 P₁波的振幅反射和能量反射特性进行分析和讨论。

收稿日期: 2022-11-01; **修订日期:** 2023-02-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51978320, 11962016); 甘肃省基础研究创新群体资助项目(20JR5RA478)。

1 非饱和土中体波的特征方程

非饱和土是由固相、液相和气相组成的三相多孔介质,其动力学波动方程为^[21]:

$$a_{11}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^s)+a_{12}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^l)+a_{13}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^g)=\rho^l\ddot{\mathbf{u}}^s+\rho^l\ddot{\mathbf{u}}^l+\vartheta^l\dot{\mathbf{u}}^l \quad (1a)$$

$$a_{21}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^s)+a_{22}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^l)+a_{23}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^g)=\rho^g\ddot{\mathbf{u}}^s+\rho^g\ddot{\mathbf{u}}^g+\vartheta^g\dot{\mathbf{u}}^g \quad (1b)$$

$$\mu\nabla^2\mathbf{u}^s+(\lambda_c+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^s)+B_1\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^l)+B_2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^g)=\rho\ddot{\mathbf{u}}^s+nS_l\rho^l\ddot{\mathbf{u}}^l+nS_g\rho^g\ddot{\mathbf{u}}^g \quad (1c)$$

式中 μ 为剪切模量; n 为孔隙率; ∇ 为 Hamilton 微分算子; ∇^2 为 Cartesian 坐标系中的 Laplace 算子; \mathbf{u}^l 和 \mathbf{u}^g 分别为液相和气相相对于固体骨架的相对位移矢量, 可以表示为 $\mathbf{u}^l=nS_l(\mathbf{u}^l-\mathbf{u}^s)$, $\mathbf{u}^g=nS_g(\mathbf{u}^g-\mathbf{u}^s)$, 其中 \mathbf{u}^s , \mathbf{u}^l 和 \mathbf{u}^g 分别表示固相、液相和气相的位移矢量; S_l 和 S_g 分别表示液相和气相的饱和度; ρ^s , ρ^l 和 ρ^g 分别表示固相、液相和气相的密度, 非饱和土的总密度可表示为 $\rho=\bar{\rho}^s+\bar{\rho}^l+\bar{\rho}^g$, 其中固相、液相和气相的表现密度分别为 $\bar{\rho}^s=(1-n)\rho^s$, $\bar{\rho}^l=nS_l\rho^l$ 和 $\bar{\rho}^g=nS_g\rho^g$; 系数 a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} , ϑ^l , ϑ^g , B_1 , B_2 和 λ_c 的具体表达式见附录 A。

为便于分析,引入固-液-气三相介质位移矢量的 Helmholtz 势函数分解形式:

$$\mathbf{u}^s=\nabla\psi_s+\nabla\times\mathbf{H}_s \quad (2a)$$

$$\mathbf{u}^l=\nabla\psi_l+\nabla\times\mathbf{H}_l \quad (2b)$$

$$\mathbf{u}^g=\nabla\psi_g+\nabla\times\mathbf{H}_g \quad (2c)$$

式中 ψ_s , ψ_l 和 ψ_g 分别为固体骨架、孔隙水和孔隙气体的标量势函数; \mathbf{H}_s , \mathbf{H}_l 和 \mathbf{H}_g 分别为固体骨架、孔隙水和孔隙气体的矢量势函数。

将式(2a)~(2c)代入式(1a)~(1c),则波动方程表示如下:

$$a_{11}\nabla^2\psi_s+a_{12}\nabla^2\psi_l+a_{13}\nabla^2\psi_g=\rho^l\ddot{\psi}_s+\rho^l\ddot{\psi}_l+\vartheta^l\dot{\psi}_l \quad (3a)$$

$$a_{21}\nabla^2\psi_s+a_{22}\nabla^2\psi_l+a_{23}\nabla^2\psi_g=\rho^g\ddot{\psi}_s+\rho^g\ddot{\psi}_g+\vartheta^g\dot{\psi}_g \quad (3b)$$

$$(\lambda_c+2\mu)\nabla^2\psi_s+B_1\nabla^2\psi_l+B_2\nabla^2\psi_g=\rho\ddot{\psi}_s+nS_l\rho^l\ddot{\psi}_l+nS_g\rho^g\ddot{\psi}_g \quad (3c)$$

$$\rho^l\ddot{\mathbf{H}}_s+\rho^l\ddot{\mathbf{H}}_l+\vartheta^l\dot{\mathbf{H}}_l=0 \quad (3d)$$

$$\rho^g\ddot{\mathbf{H}}_s+\rho^g\ddot{\mathbf{H}}_g+\vartheta^g\dot{\mathbf{H}}_g=0 \quad (3e)$$

$$\rho\ddot{\mathbf{H}}_s+nS_l\rho^l\ddot{\mathbf{H}}_l+nS_g\rho^g\ddot{\mathbf{H}}_g=\mu\nabla^2\mathbf{H}_s \quad (3f)$$

式(3a)~(3f)的一般解可假设为以下形式:

$$\psi_\alpha=A_\alpha\exp[i(k_Px-\omega t)], \alpha=s, l, g \quad (4a)$$

$$\mathbf{H}_\alpha=B_\alpha\exp[i(k_Sx-\omega t)], \alpha=s, l, g \quad (4b)$$

式中 $i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位; $\omega=2\pi f$ 表示角频率, 其中 f 表示频率。 A_α 和 B_α 为对应势函数的振幅; k_p 和 k_s 分别表示压缩波和剪切波的复波数。

将式(4)代入式(3), 并对方程两端进行散度和旋度运算, 得到非饱和多孔弹性介质中体波的特征方程如下:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (5a)$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (5b)$$

式(5a)表示压缩波的特征方程, 式(5b)表示剪切波的特征方程, 两个方程中的元素详见附录 B。

通过式(5a)可解出 6 个复波数 $k_p=\text{Re}(k_p)+i\text{Im}(k_p)$, 式(5b)可解出 2 个复波数 $k_s=\text{Re}(k_s)+i\text{Im}(k_s)$, 其中 Re 和 Im 分别为实部和虚部, Re 反映常规波数, Im 反映波的衰减特性。由于波的振幅沿着波传播的方向衰减, 所以 $\text{Im}(k_p)>0$, $\text{Im}(k_s)>0$ 。这意味着 k_p 只有 3 个有意义的复根, 即为 3 类压缩波(按照波速由大到小的顺序分别记为 P₁ 波、P₂ 波和 P₃ 波)的复波数, 压缩 P 波的波速和衰减系数分别为 $v_p=\omega/\text{Re}(k_p)$ 和 $Q_p=\text{Im}(k_p)$ 。同样, k_s 只有 1 个有意义的复根, 即为剪切 S 波的复波数, 其波速和衰减系数分别为 $v_s=\omega/\text{Re}(k_s)$ 和 $Q_s=\text{Im}(k_s)$ 。

2 P₁波自由边界上的反射

2.1 弹性波的势方程

不失一般性, 考虑非饱和土中有一频率为 ω 的平面 P₁ 波以任意角度 $\alpha_{P_1}^{\text{in}}$ 入射至非饱和土半空间自由表面, 在边界处将产生反射 P₁ 波、反射 P₂ 波、反射 P₃ 波和反射 S 波共 4 种反射波, 如图 1 所示。

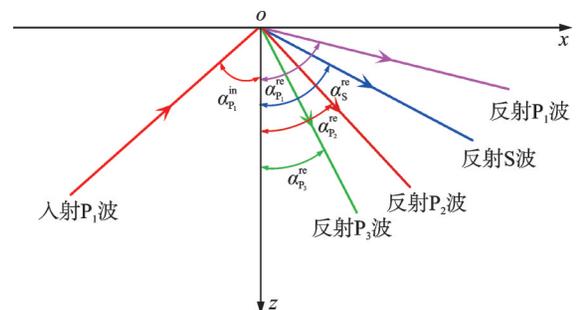


图 1 非饱和土边界平面 P₁ 波的反射示意图

Fig. 1 Schematic reflection diagram of the plane P₁ wave of the unsaturated soil boundary

此时,入射波和各反射波的势函数可以分别表示为:

入射 P₁波:

$$\psi_{\alpha P_1}^{\text{in}} = A_{\alpha P_1}^{\text{in}} \exp[ik_{P_1}(l_{P_1}^{\text{in}}x - n_{P_1}^{\text{in}}z - v_{P_1}t)] \quad (6)$$

式中 $\psi_{\alpha P_1}^{\text{in}}$ ($\alpha = s, l, g$) 表示入射 P₁波引起的 α 相位移的标量势函数; k_{P_1} 和 v_{P_1} 分别表示 P₁波的复波数和波速; $l_{P_1}^{\text{in}} = \sin \alpha_{P_1}^{\text{in}}$ 和 $n_{P_1}^{\text{in}} = \cos \alpha_{P_1}^{\text{in}}$ 分别表示入射 P₁波在 x 方向和 z 方向上的矢量值。

反射 P 波(包括反射 P₁波、P₂波、P₃波):

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}^{\text{re}} = & A_{\alpha P_1}^{\text{re}} \exp[ik_{P_1}(l_{P_1}^{\text{re}}x + n_{P_1}^{\text{re}}z - v_{P_1}t)] + \\ & A_{\alpha P_2}^{\text{re}} \exp[ik_{P_2}(l_{P_2}^{\text{re}}x + n_{P_2}^{\text{re}}z - v_{P_2}t)] + \\ & A_{\alpha P_3}^{\text{re}} \exp[ik_{P_3}(l_{P_3}^{\text{re}}x + n_{P_3}^{\text{re}}z - v_{P_3}t)] \end{aligned} \quad (7)$$

式中 k_{P_1} , k_{P_2} 和 k_{P_3} 分别表示反射 P₁波、反射 P₂波和反射 P₃波的复波数; v_{P_1} , v_{P_2} 和 v_{P_3} 分别表示反射 P₁波、反射 P₂波和反射 P₃波的波速; $l_{P_1}^{\text{re}} = \sin \alpha_{P_1}^{\text{re}}$, $n_{P_1}^{\text{re}} = \cos \alpha_{P_1}^{\text{re}}$; $l_{P_2}^{\text{re}} = \sin \alpha_{P_2}^{\text{re}}$, $n_{P_2}^{\text{re}} = \cos \alpha_{P_2}^{\text{re}}$; $l_{P_3}^{\text{re}} = \sin \alpha_{P_3}^{\text{re}}$, $n_{P_3}^{\text{re}} = \cos \alpha_{P_3}^{\text{re}}$ 分别表示反射 P₁波、反射 P₂波和反射 P₃波在 x 方向和 z 方向上的矢量值。

反射 S 波:

$$H_{\alpha}^{\text{re}} = B_{\alpha}^{\text{re}} \exp[ik_S(l_S^{\text{re}}x + n_S^{\text{re}}z - v_S t)] \quad (8)$$

式中 H_{α}^{re} ($\alpha = s, l, g$) 表示反射 S 波的位移矢量势函数; k_S 和 v_S 分别表示 S 波的复波数和波速; $l_S^{\text{re}} = \sin \alpha_S^{\text{re}}$, $n_S^{\text{re}} = \cos \alpha_S^{\text{re}}$ 分别表示反射 S 波在 x 方向和 z 方向上的矢量值。

从式(5a)和(5b)以及非饱和多孔介质的波动方程可得如下各势函数幅值的关系为:

$$\begin{cases} \delta_{\text{IP}_i}^{\text{re}} = \frac{A_{\text{IP}_i}^{\text{re}}}{A_{\text{SP}_i}^{\text{re}}} = \frac{b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21}}{b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23}}; i = 1, 2, 3 \quad (9a) \\ \delta_{\text{gP}_i}^{\text{re}} = \frac{A_{\text{gP}_i}^{\text{re}}}{A_{\text{SP}_i}^{\text{re}}} = \frac{b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}}{b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23}} \\ \delta_{\text{IS}}^{\text{re}} = \frac{B_{\text{IS}}^{\text{re}}}{B_{\text{S}}^{\text{re}}} = \frac{c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}}{c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23}} \\ \delta_{\text{gS}}^{\text{re}} = \frac{B_{\text{gS}}^{\text{re}}}{B_{\text{S}}^{\text{re}}} = \frac{c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}}{c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23}} \end{cases} \quad (9b)$$

2.2 反射波的振幅比

考虑非饱和土自由表面处的边界条件如下:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \sigma_{xz}|_{z=0} = 0, p_l|_{z=0} = 0, p_g|_{z=0} = 0 \quad (10)$$

式中 σ_{zz} 为法向应力; σ_{xz} 为剪切应力; p_l 和 p_g 分别为孔隙液体压力和孔隙气体压力。

根据位移矢量的 Helmholtz 分解,可以得到应力-位移势之间的关系,将势方程代入式(10)后可以得到:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & B_{11} \nabla^2 \psi_s + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_s}{\partial x \partial z} \right) + \\ & B_{12} \nabla^2 \psi_l + B_{13} \nabla^2 \psi_g \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left[\nabla^2 H_s + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H_s}{\partial z^2} \right) \right] \quad (11b)$$

$$p_l = -B_{21} \nabla^2 \psi_s - B_{22} \nabla^2 \psi_l - B_{23} \nabla^2 \psi_g \quad (11c)$$

$$p_g = -B_{31} \nabla^2 \psi_s - B_{32} \nabla^2 \psi_l - B_{33} \nabla^2 \psi_g \quad (11d)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x^s = \frac{\partial \psi_s}{\partial x} - \frac{\partial H_s}{\partial z} \\ \mathbf{u}_z^s = \frac{\partial \psi_s}{\partial z} + \frac{\partial H_s}{\partial x} \end{cases} \quad (11e)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x^l = \frac{\partial \psi_l}{\partial x} - \frac{\partial H_l}{\partial z} \\ \mathbf{u}_z^l = \frac{\partial \psi_l}{\partial z} + \frac{\partial H_l}{\partial x} \end{cases} \quad (11f)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x^g = \frac{\partial \psi_g}{\partial x} - \frac{\partial H_g}{\partial z} \\ \mathbf{u}_z^g = \frac{\partial \psi_g}{\partial z} + \frac{\partial H_g}{\partial x} \end{cases} \quad (11g)$$

将式(6)~(8)代入式(11)并结合边界条件(10),考虑对于任意的 x 和 t 都成立,则要求指数函数中 x 和 t 前面的系数恒相等,可以得到:

$$k_{P_1} v_{P_1}^{\text{in}} = k_{P_1} v_{P_1}^{\text{re}} = k_S v_S^{\text{re}}; i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

考虑 x 前面的系数相等,有:

$$\begin{cases} \alpha_{P_1}^{\text{in}} = \alpha_{P_1}^{\text{re}} \\ k_{P_1} l_{P_1}^{\text{in}} = k_{P_1} l_{P_1}^{\text{re}} = k_S l_S^{\text{re}}; i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (13)$$

通过式(12)和(13)可以得到弹性波的传播 Snell 定理:

$$\begin{cases} k_{P_1}/k_{P_2} = v_{P_2}/v_{P_1} = \sin \alpha_{P_2}^{\text{re}}/\sin \alpha_{P_1}^{\text{in}} \\ k_{P_1}/k_{P_3} = v_{P_3}/v_{P_1} = \sin \alpha_{P_3}^{\text{re}}/\sin \alpha_{P_1}^{\text{in}} \\ k_{P_1}/k_S = v_S/v_{P_1} = \sin \alpha_S^{\text{re}}/\sin \alpha_{P_1}^{\text{in}} \end{cases} \quad (14)$$

将式(6)~(8)代入式(10),并且考虑 Snell 定理(14),可以得到矩阵形式的位移势振幅之间的关系式:

$$F [A_{\text{SP}_1}^{\text{re}} \ A_{\text{SP}_2}^{\text{re}} \ A_{\text{SP}_3}^{\text{re}} \ B_{\text{S}}^{\text{re}}]^T = A_{\text{SP}_1}^{\text{in}} G \quad (15)$$

式中 矩阵 F 和 G 中的各元素详见附录 C。

假设入射波的固相位移幅值 $A_{\text{SP}_1}^{\text{in}} = 1$, 则 $[A_{\text{SP}_1}^{\text{re}} \ A_{\text{SP}_2}^{\text{re}} \ A_{\text{SP}_3}^{\text{re}} \ B_{\text{S}}^{\text{re}}]$ 中的系数分别表示自由界面上 4 种反射波的振幅反射系数:

$$\begin{cases} n_{P_1}^{\text{re}} = \frac{A_{\text{SP}_1}^{\text{re}}}{A_{\text{SP}_1}^{\text{in}}}, n_{P_2}^{\text{re}} = \frac{A_{\text{SP}_2}^{\text{re}}}{A_{\text{SP}_1}^{\text{in}}} \\ n_{P_3}^{\text{re}} = \frac{A_{\text{SP}_3}^{\text{re}}}{A_{\text{SP}_1}^{\text{in}}}, n_S^{\text{re}} = \frac{B_{\text{S}}^{\text{re}}}{A_{\text{SP}_1}^{\text{in}}} \end{cases} \quad (16)$$

式中 $n_{P_1}^{\text{re}}$, $n_{P_2}^{\text{re}}$, $n_{P_3}^{\text{re}}$, n_S^{re} 分别表示反射 P₁波、反射 P₂波、反射 P₃波和反射 S 波的振幅反射系数。

2.3 反射波的能量比

为了验证上述推导出的振幅反射系数的正确性,可以利用所得到的振幅反射系数来计算每个反射波所携带的能量通量,然后根据是否满足能量守恒来判断其正确性。根据文献[17,27]的研究,经过非饱和土表面的能量通量可以通过表面牵引力和单位面积的粒子速度的标量积来表示。因此,在与 z 方向垂直的表面上入射波和反射波的平均能量强度可以表示为:

$$E = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma_{zz} \dot{u}_z^s + \sigma_{xz} \dot{u}_x^s - p_1 \dot{u}_z^l - p_g \dot{u}_z^g) \quad (17)$$

通过进一步展开以上方程,入射波和各反射波的能量通量可以写成如下形式:

$$E_{P_1}^{\text{in}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma_{zz}^{\text{ip}_1} \dot{u}_{zs}^{\text{ip}_1} + \sigma_{xz}^{\text{ip}_1} \dot{u}_{xs}^{\text{ip}_1} - p_1^{\text{ip}_1} \dot{u}_{zl}^{\text{ip}_1} - p_g^{\text{ip}_1} \dot{u}_{zg}^{\text{ip}_1}) \quad (18a)$$

$$E_{P_1}^{\text{re}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma_{zz}^{\text{rp}_1} \dot{u}_{zs}^{\text{rp}_1} + \sigma_{xz}^{\text{rp}_1} \dot{u}_{xs}^{\text{rp}_1} - p_1^{\text{rp}_1} \dot{u}_{zl}^{\text{rp}_1} - p_g^{\text{rp}_1} \dot{u}_{zg}^{\text{rp}_1}) \quad (18b)$$

$$E_{P_2}^{\text{re}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma_{zz}^{\text{rp}_2} \dot{u}_{zs}^{\text{rp}_2} + \sigma_{xz}^{\text{rp}_2} \dot{u}_{xs}^{\text{rp}_2} - p_1^{\text{rp}_2} \dot{u}_{zl}^{\text{rp}_2} - p_g^{\text{rp}_2} \dot{u}_{zg}^{\text{rp}_2}) \quad (18c)$$

$$E_{P_3}^{\text{re}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma_{zz}^{\text{rp}_3} \dot{u}_{zs}^{\text{rp}_3} + \sigma_{xz}^{\text{rp}_3} \dot{u}_{xs}^{\text{rp}_3} - p_1^{\text{rp}_3} \dot{u}_{zl}^{\text{rp}_3} - p_g^{\text{rp}_3} \dot{u}_{zg}^{\text{rp}_3}) \quad (18d)$$

$$E_S^{\text{re}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma_{zz}^{\text{rs}} \dot{u}_{zs}^{\text{rs}} + \sigma_{xz}^{\text{rs}} \dot{u}_{xs}^{\text{rs}} - p_1^{\text{rs}} \dot{u}_{zl}^{\text{rs}} - p_g^{\text{rs}} \dot{u}_{zg}^{\text{rs}}) \quad (18e)$$

以上方程中的符号表达式详见附录 D。

将各反射波的能量通量分别除以入射 P₁ 波的能量通量,即可得出该波的能量比例系数(即能量反射比),从而得到入射波携带的能量在分界面处的分配情况。

$$\left\{ \begin{aligned} e_{P_1}^{\text{re}} &= \frac{|E_{P_1}^{\text{re}}|}{|E_{P_1}^{\text{in}}|} = (n_{P_1}^{\text{re}})^2 \\ e_{P_2}^{\text{re}} &= \frac{|E_{P_2}^{\text{re}}|}{|E_{P_1}^{\text{in}}|} = \frac{k_{P_2}^3 n_{P_2}^{\text{re}}}{k_{P_1}^3 n_{P_1}^{\text{in}}} (n_{P_2}^{\text{re}})^2 \\ e_{P_3}^{\text{re}} &= \frac{|E_{P_3}^{\text{re}}|}{|E_{P_1}^{\text{in}}|} = \frac{k_{P_3}^3 n_{P_3}^{\text{re}}}{k_{P_1}^3 n_{P_1}^{\text{in}}} (n_{P_3}^{\text{re}})^2 \\ e_S^{\text{re}} &= \frac{|E_S^{\text{re}}|}{|E_{P_1}^{\text{in}}|} = \frac{k_S^3 n_S^{\text{re}} \mu [3(l_S^{\text{re}})^2 - (n_S^{\text{re}})^2]}{k_{P_1}^3 n_{P_1}^{\text{in}} \xi_{\text{ip}_1}} (n_S^{\text{re}})^2 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

式中 $e_{P_1}^{\text{re}}, e_{P_2}^{\text{re}}, e_{P_3}^{\text{re}}, e_S^{\text{re}}$ 分别表示反射 P₁ 波、反射 P₂ 波、反射 P₃ 波和反射 S 波的能量反射系数; $\xi_{\text{ip}_1} = \lambda_c + 2\mu + (B_1 + a_{11} + a_{12} \delta_{\text{ip}_1}^{\text{re}} + a_{13} \delta_{\text{gp}_1}^{\text{re}}) \delta_{\text{ip}_1}^{\text{re}} + (B_2 + a_{21} + a_{22} \delta_{\text{ip}_1}^{\text{re}} + a_{23} \delta_{\text{gp}_1}^{\text{re}}) \delta_{\text{gp}_1}^{\text{re}}$

由于入射波所携带的能量在反射过程中不消散^[16]。因此根据能量守恒,在界面 $z=0$ 处的每个反射波的能量比满足以下公式:

$$e_{\text{sum}} = e_{P_1}^{\text{re}} + e_{P_2}^{\text{re}} + e_{P_3}^{\text{re}} + e_S^{\text{re}} = 1 \quad (20)$$

式中 e_{sum} 表示所有反射波的能量反射系数之和。

3 数值计算与分析

3.1 验证

为了验证上述理论结果的正确性,通过求解本文 P 波和 S 波的特征方程而得出 4 种体波的波速,与文献[28]中所得的结果进行了对比,由于在 4 种波形的体波中, P₂ 波和 P₃ 波的波速很慢且衰减快,故不予讨论。在验证计算中取与上述文献相同的物理参数,非饱和土的物理参数如表 1^[28] 所示。图 2 给出了本文解与文献解的对比图,从图中可以看出二者的计算结果基本一致,说明本文研究的正确性。随后通过数值计算,分析讨论了平面 P₁ 波的入射角度、饱和度、频率和孔隙率等物理参数对各反射波振幅反射系数和能量反射系数的影响。

表 1 土体材料的物理参数

Tab. 1 Physical parameters of the soil material		
参数名称	参数符号/单位	数值
孔隙率	n	0.23
土颗粒密度	$\rho^s / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	3060
液体密度	$\rho^l / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1000
气体密度	$\rho^g / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1.3
液体体积模量	K^w / GPa	2.25
气体体积模量	K^g / MPa	0.11
骨架体积模量	K^b / GPa	1.02
Lame 常数	λ / GPa	4.4
剪切模量	μ / GPa	2.8
固有渗透率	$k_{\text{int}} / \text{m}^2$	1×10^{10}
液体动力黏滞系数	$\mu_l / [\text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}]$	1×10^{-3}
气体动力黏滞系数	$\mu_g / [\text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}]$	1.8×10^{-5}
V-G 模型参数	$\alpha_{\text{vg}} / \text{Pa}^{-1}$	1×10^{-4}
	m_{vg}	0.5

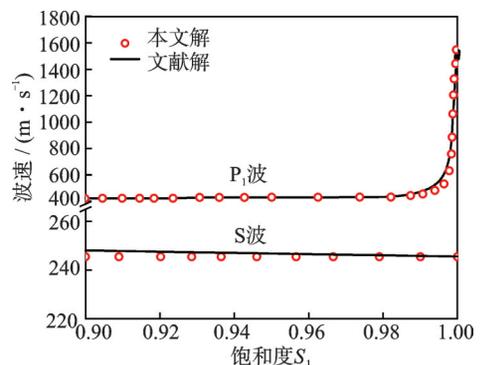


图 2 本文解与文献解的对比验证

Fig. 2 Comparison between present work and reference solution

图3~8分别给出了在不同饱和度、频率和孔隙率条件下振幅反射系数和能量反射系数随入射角变化的情况。图3~8中各反射波随着不同参数变化的曲线表示为左右两图:左图为各反射波对应反射系数在所考虑的物理参数范围内均匀变化的曲线;右图为取其中三个数值时的曲线。从各图中可以看出振幅系数和能量系数的大小随着 P_1 波入射角度变化而发生变化,并且当 P_1 波垂直射在自由界面时(入射角度为 0°),无反射 P_2 波、反射 P_3 波、反射S波,只存在反射 P_1 波。同样,当 P_1 波掠入射时(入射角度为 90°),也只存在反射 P_1 波。

3.2 饱和度的影响

图3(a)~(d)分别表示在非饱和土半空间自由表面产生的4种反射波的位移势振幅反射系数与入射角和饱和度之间的变化关系。本文中考虑孔隙率为0.23,频率 $f=500$ Hz的情况,该频率处于工程地震勘探常用的频谱范围内^[28]。需要说明的是,本文并未考虑孔隙尺寸效应对弹性波反射的影响,这主要是由于:多项研究表明,虽然在频率较高时孔隙尺寸效应对弹性波的传播具有一定影响,但在本文频率取值条件下($f=500$ Hz),尽管孔隙尺寸效应对多孔介质的位移和应力会产生一定影响,但相对较小^[29-33];此外,本文目标旨在重点研究 P_1 波在反射和透射过程中的能量分配特性。鉴于上述原因,本文对孔隙尺寸效应的影响不作重点讨论。由图3(a)~(d)可见,入射角度和饱和度的变化对各反射波的振幅影响较大。对于反射 P_1 波,其振幅随着入射 P_1 波的角度增大先减小,当入射角在 65° 附近时达到最小值,然后随着入射角增加而增加。当土体接近完全饱和(饱和度接近1)时,反射 P_1 波的振幅有明显的增大趋势。反射 P_2 波的振幅随入射 P_1 波入射角的增加呈先增大后减小的趋势。类似反射 P_1 波,当饱和度接近1时,反射 P_2 波振幅迅速增大,但量级较反射 P_1 波要小很多。这说明当土体接近完全饱和时,反射 P_2 波受饱和度的影响才比较明显。对于反射 P_3 波,当土体为完全水饱和(饱和度为1)或完全气饱和(饱和度为0)时,反射 P_3 波将消失。这是因为 P_3 波的出现是由于土介质中气体与液体间压力差的存在^[5-7],当饱和度为1或0时,压力差消失,此时反射 P_3 波也随之消失。与反射 P_1 波变化趋势相反,当土体接近完全饱和时,反射S波幅值迅速降低,当入射角接近 90° 时,反射S波振幅反射系数接近0。

图4(a)~(d)分别表示4种反射波的能量反射

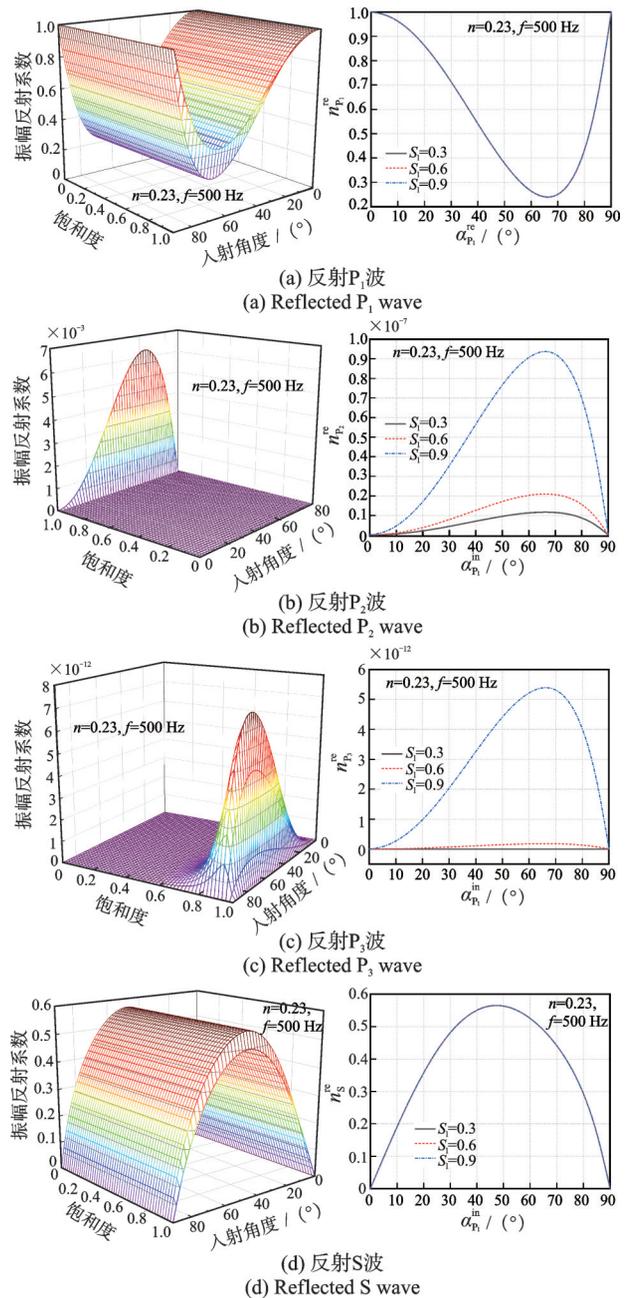


图3 各反射波振幅反射系数随入射角和饱和度的变化
Fig. 3 The reflection coefficient of each reflected wave amplitude varies with the angle of incidence and saturation

系数与入射角和饱和度之间的变化关系。从图4(a)~(d)看出,饱和度变化对各反射波能量分配情况的影响较明显,且反射 P_1 波和反射S波携带了绝大多数的反射波能量。数值计算结果验证,在任何情况下4种反射波的能量反射系数之和恒等于1,这说明整个反射过程中没有发生能量的耗散。另外,从式(19)可以看出弹性波的传播能量与其振幅的二次方有一定的比例关系,故图4中各反射波能量比的变化趋势和图3中振幅比变化趋势类似。当饱和度较高,即接近饱和时,其各反射波的能量都会发生显著变化。

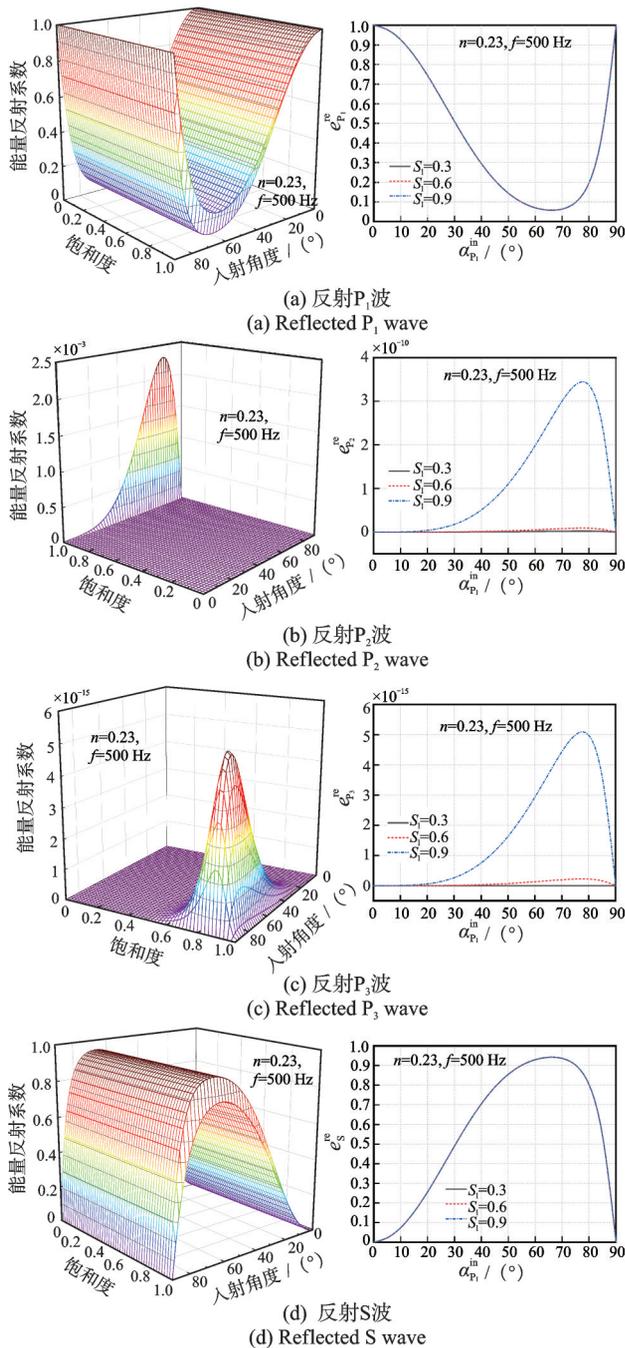


图 4 各反射波能量反射系数随入射角和饱和度的变化
Fig. 4 The energy reflection coefficient of each reflected wave varies with the angle of incidence and the saturation

3.3 频率的影响

为了研究入射 P₁ 波的频率对各反射波的振幅比和能量比的影响,考虑土体孔隙率为 0.23,饱和度为 0.6,且其他的物理参数保持不变。图 5(a)~(d) 分别给出了频率在 0~1000 Hz 范围变化时各反射波的振幅反射系数随入射角的变化曲线。从图 5(a)~(d) 可以看出,频率变化不会引起反射 P₁ 波和反射 S 波位移势振幅反射系数的变化。而对于反射 P₂ 波和反射 P₃ 波,当频率较小时频率变化不会引起其位移势振幅系数的变化,当频率接近 10³ Hz 时振幅反射系数将随着频率的增加而增加。

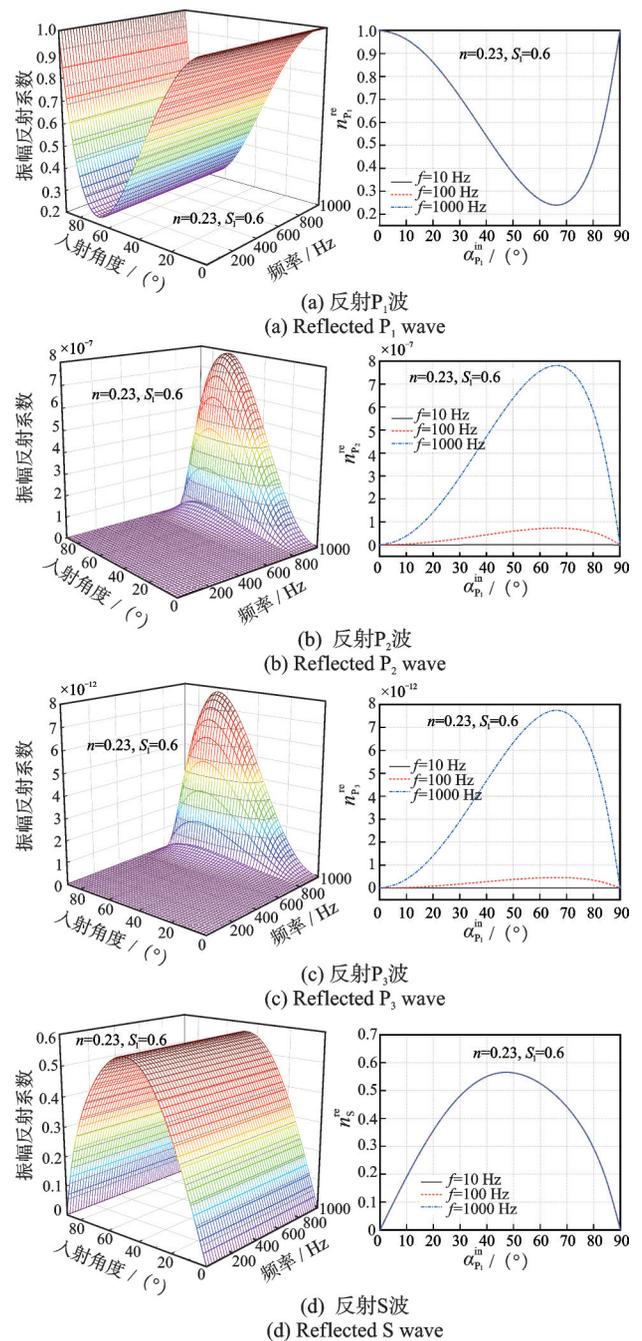


图 5 各反射波振幅反射系数随入射角和频率的变化
Fig. 5 The reflection coefficient of each reflected wave amplitude varies with the incidence angle and frequency

图 6(a)~(d) 分别给出了 4 种反射波的能量反射系数与入射角和频率之间的变化关系。比较图 5 和 6, 能量比的变化趋势与其振幅比的趋势相似,反射 P₁ 和反射 S 波的能量反射系数在本文考虑的频率范围内不会发生变化。而对于反射 P₂ 波和反射 P₃ 波而言,当频率接近 10³ Hz 时,频率越高,其能量反射系数也越大。另外,数值计算结果验证,在任意的人射角和频率条件下 4 种反射波的能量反射系数之和恒等于 1,也说明在整个反射过程中没有发生能量耗散。

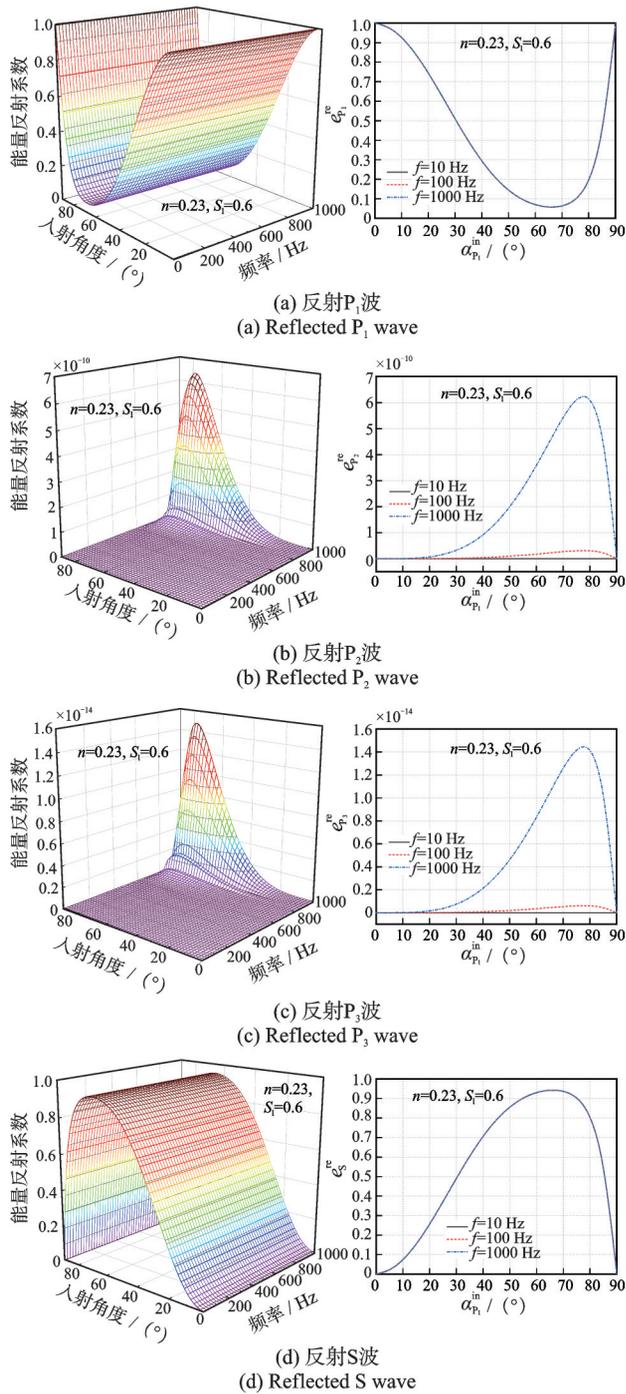


图6 各反射波能量反射系数随入射角和频率的变化
Fig.6 The energy reflection coefficient of each reflected wave varies with the incidence angle and frequency

3.4 孔隙率的影响

为了分析非饱和土的孔隙率对各反射波的位移势函数振幅反射系数的影响,取土体饱和度为0.6,频率仍为500 Hz,孔隙率在0.1~0.5范围内变化时,图7(a)~(d)绘出了各反射波的振幅反射系数与入射角和孔隙率之间的关系曲线。由图7(a)~(d)可以看出,孔隙率变化对反射P₁波和反射S波的振幅比没有影响,而对于反射P₂波和反射P₃波,振幅反射系数随着土体孔隙率的增大而减小。并且当孔隙

率较小时,入射角对反射P₂波和反射P₃波的振幅反射系数的影响越大;随着孔隙率增大,入射角对其振幅反射系数的影响很小。

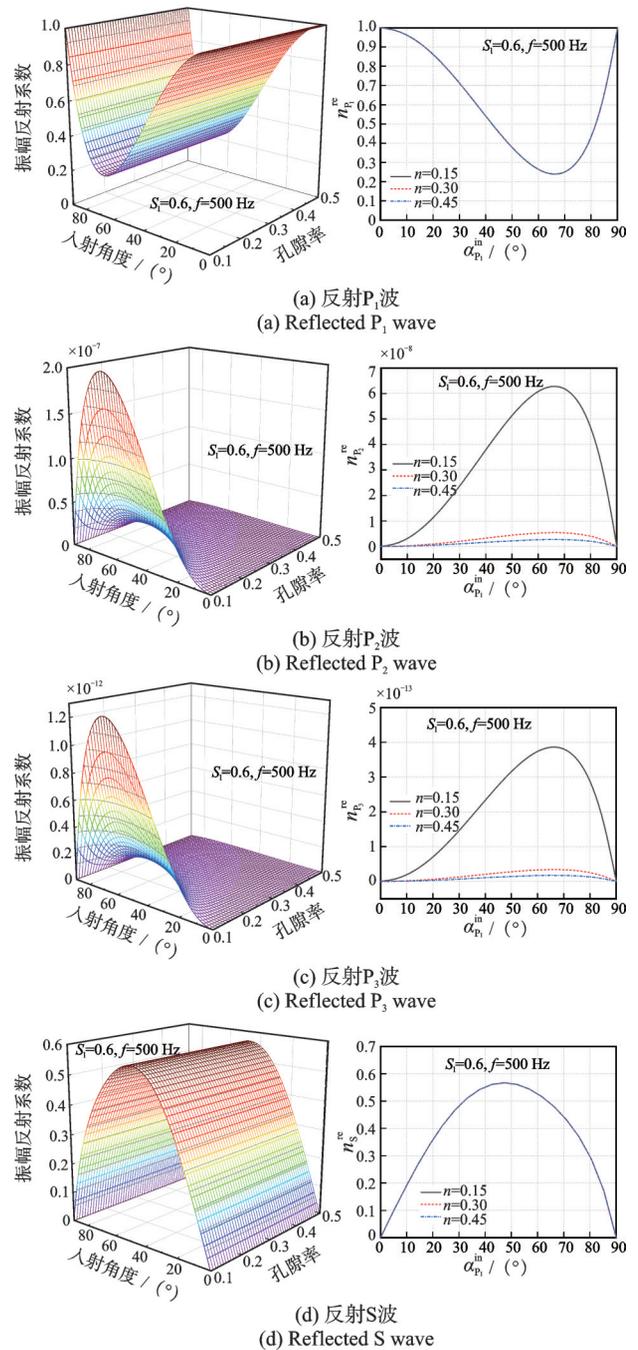


图7 各反射波振幅反射系数随入射角和孔隙率的变化
Fig.7 The reflection coefficient of each reflected wave amplitude varies with the incidence angle and porosity

图8(a)~(d)分别给出了4种反射波的能量反射系数与入射角和孔隙率之间的变化关系。由图可以看出,能量比的变化趋势与图7所示振幅比的变化趋势相似,反射P₁波和反射S波的能量反射系数不受孔隙率变化的影响。而对于反射P₂波和反射P₃波,能量反射系数随着土体孔隙率的增大而减小。并且当孔隙率较小时,入射角对反射P₂波和反射P₃

波的能量反射系数的影响较大;当孔隙率较大时,能量反射系数几乎不受入射角变化的影响。同样,在任意的入射角和孔隙率条件下4种反射波的能量反射系数之和恒等于1,验证了反射过程中的能量守恒。

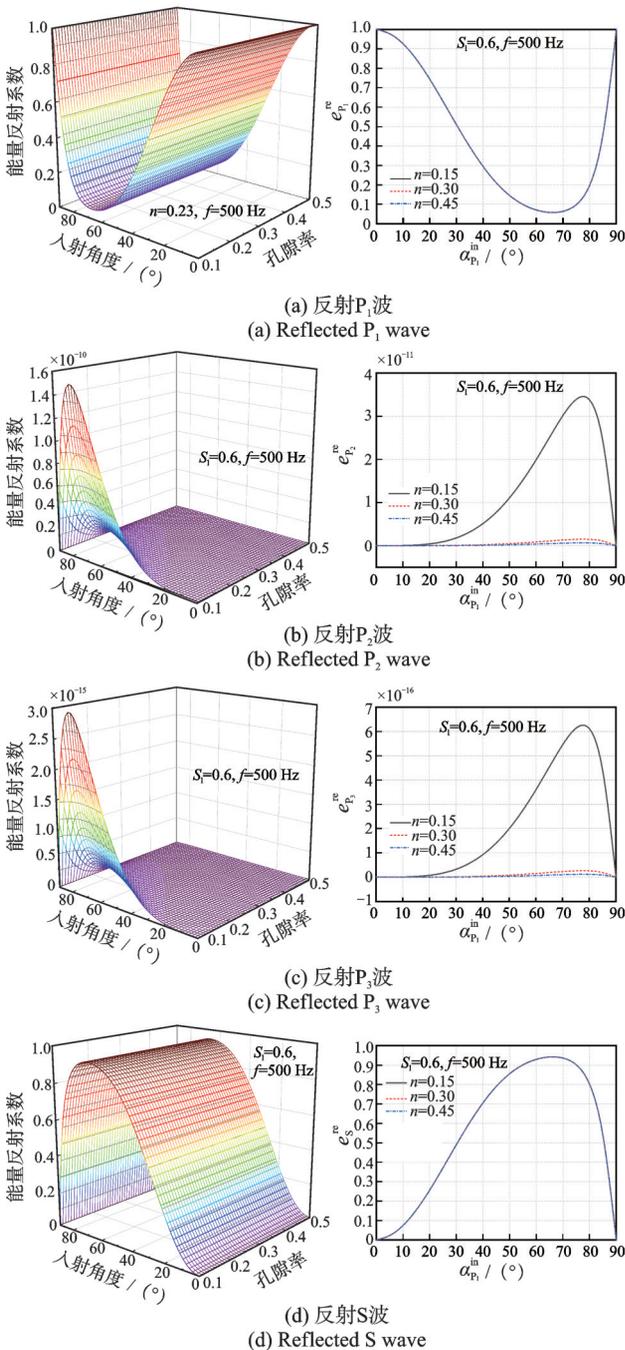


图8 各反射波能量反射系数随入射角和孔隙率的变化
Fig. 8 The energy reflection coefficient of each reflected wave varies with the incidence angle and porosity

不同饱和度、频率和孔隙率下, P_1 波和S波的曲线均重合。这是因为土体在接近饱和之前对反射系数没有影响,当土体接近饱和时反射系数才发生变化;本文研究频率对各反射波反射系数的影响时取值为0~1000 Hz,这个频率范围相对较小,在此范围

内对反射系数基本没有影响;而孔隙率的增大本质上会导致土体中流体(包括水和气体)体积的增大,流体体积的增大会使 P_2 波和 P_3 波的反射系数发生变化,这是因为 P_2 波是由水的存在产生的, P_3 波是由于水和气体的相互作用产生的,但对 P_1 波和S波几乎没有影响。综上所述,本文所考虑的饱和度、频率和孔隙率条件下,对反射 P_1 波和S波的反射系数几乎没有影响,所以二者的曲线比较相似。

4 结论

考虑非饱和土中平面 P_1 波以任意角度入射至半空间自由表面时,以 P_1 波为例讨论了土体饱和度、入射频率、孔隙率和入射角度对4种反射波振幅和能量分配比例的影响。通过理论推导给出振幅反射系数和能量反射系数的理论表达式,并在此基础上进行了数值分析。主要得出以下结论:

(1) 入射角对各反射波影响较大,当 P_1 波垂直入射在自由表面(入射角度为 0°)时,只存在反射 P_1 波;当 P_1 波掠入射(入射角度为 90°)时,也只存在反射 P_1 波。

(2) 各反射波的振幅比和能量比随着饱和度和频率的增大而增大,随着孔隙率的增大而减小。

(3) 饱和度、频率和孔隙率的变化不仅对各反射波的振幅影响较大,还将显著影响到入射 P_1 波的能量分配。通过对数值结果之间的比较表明,振幅和能量的反射系数对饱和度的变化更加敏感(相对频率和孔隙率变化而言)。

参考文献:

- [1] 邓巧琳.地震波在反射与透射影响下的能量衰减分析[D].长沙:湖南大学,2013.
DENG Qiaolin. Derivation of reflection and transmission coefficients of seismic waves in viscoelastic media [D]. Changsha: Hunan University, 2013.
- [2] 周新民,夏唐代,徐平,等.饱和土介质中地震波在水、气分界面上的反射与透射[J].地震学报,2006,28(4):372-379.
ZHOU Xinmin, XIA Tangdai, XU Ping, et al. Seismic reflection and transmission coefficients at an air-water interface of saturated porous soil [J]. Acta Seismologica Sinica, 2006, 28(4): 372-379.
- [3] 何叶,钟广法.海底滑坡及其反射地震识别综述[J].海洋科学,2015,39(1):116-125.
HE Ye, ZHONG Guangfa. Current status of submarine landslides and their seismic recognition [J]. Marine Sciences, 2015, 39(1): 116-125.
- [4] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range [J]. The Journal of the Acoustical Society of America,

- 1956, 28(2): 168-178.
- [5] LO W C, SPOSITO G, MAJER E. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids[J]. *Water Resources Research*, 2005, 41(2): W02025.
- [6] RUBINO J G, RAVAZZOLI C L, SANTOS J E. Reflection and transmission of waves in composite porous media: a quantification of energy conversions involving slow waves[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 120(5): 2425-2436.
- [7] TOMAR S K, ARORA A. Reflection and transmission of elastic waves at an elastic/porous solid saturated by two immiscible fluids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(7-8): 1991-2013.
- [8] ALBERS B. Analysis of the propagation of sound waves in partially saturated soils by means of a macroscopic linear poroelastic model[J]. *Transport in Porous Media*, 2009, 80(1): 173-192.
- [9] 徐平, 夏唐代. 弹性波在准饱和土和弹性土界面的反射与透射[J]. *力学与实践*, 2006, 28(6): 58-63.
XU Ping, XIA Tangdai. Reflection and transmission of elastic wave at the interface of nearly saturated soil and elastic soil[J]. *Mechanics in Engineering*, 2006, 28(6): 58-63.
- [10] YEH C L, LO W C, JAN C D, et al. Reflection and refraction of obliquely incident elastic waves upon the interface between two porous elastic half-spaces saturated by different fluid mixtures[J]. *Journal of Hydrology*, 2010, 395(1-2): 91-102.
- [11] 周凤玺, 宋瑞霞. 平面P-SV波入射时非均匀饱和土自由场地的响应[J]. *地震学报*, 2015, 37(4): 629-639.
ZHOU Fengxi, SONG Ruixia. response of the non-homogeneous saturated foundation to incident plane P-SV waves[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2015, 37(4): 629-639.
- [12] 周来江, 杨士莪. 平面波与层状多孔介质海底的反射和透射[J]. *声学技术*, 2010, 29(6): 559-564.
ZHOU Laijiang, YANG Shie. Plane-wave reflection and transmission of a stratified porous medium ocean bottom including unconsolidated sediments[J]. *Technical Acoustics*, 2010, 29(6): 559-564.
- [13] 陆建飞, 周慧明, 刘洋. 横观各向同性层状饱和土动力问题的反射、透射矩阵方法[J]. *岩土力学*, 2018, 39(6): 2219-2226.
LU Jianfei, ZHOU Huiming, LIU Yang. Reflection-transmission matrix method for dynamic response of transversely isotropic multilayered saturated soil[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, 39(6): 2219-2226.
- [14] 印兴耀, 赵正阳, 宗兆云. 基于层状双孔介质的地震波反射和透射系数频散特性研究[J]. *地球物理学报*, 2018, 61(7): 2937-2949.
YIN Xingyao, ZHAO Zhengyang, ZONG Zhaoyun. Dispersion characteristics of seismic reflection and transmission coefficient based on layered double-porosity media[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2018, 61(7): 2937-2949.
- [15] 杨春, 王赞, 陈业全, 等. 双相介质薄砂层的地震反射特征分析[J]. *石油物探*, 2018, 57(2): 186-197.
YANG Chun, WANG Yun, CHEN Yequan, et al. Characteristic analysis of seismic reflections from a thin sand reservoir in two-phase media[J]. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 2018, 57(2): 186-197.
- [16] 陈炜昀. 非饱和弹性多孔介质中体波与表面波的传播特性研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2013.
CHEN Weiyun. Research of the propagation characteristics of body waves and surface waves in unsaturated poroelastic medium[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2013.
- [17] SHARMA M. Reflection-refraction of attenuated waves at the interface between a thermo-poroelastic medium and a thermoelastic medium[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2018, 28(3): 570-587.
- [18] 摄宇. 土介质中弹性波传播规律的数值研究[J]. *低温建筑技术*, 2019, 41(7): 88-91.
SHE Yu. Numerical study on the propagation law of elastic waves in soil media[J]. *Low Temperature Architecture Technology*, 2019, 41(7): 88-91.
- [19] 翟睿智, 周凤玺. 非饱和土中弹性波的传播特性[J]. *兰州理工大学学报*, 2019, 45(1): 120-126.
ZHAI Ruizhi, ZHOU Fengxi. Propagation characteristics of elastic waves in unsaturated soil[J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2019, 45(1): 120-126.
- [20] LIU H B, JIANG M, ZHOU F X, et al. Attenuation characteristics of thermoelastic waves in unsaturated soil[J]. *Arabian Journal of Geosciences*, 2021, 14(18): 1878.
- [21] ZHOU F X, LIU H B, LI S R. Propagation of thermoelastic waves in unsaturated porothermoelastic media[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2019, 42(10): 1256-1271.
- [22] LIU H B, DAI G L, ZHOU F X, et al. Propagation behavior of homogeneous plane- P_1 -wave at the interface between a thermoelastic solid medium and an unsaturated porothermoelastic medium[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2021, 136: 1163.
- [23] LIU H B, DAI G L, ZHOU F X, et al. A mixture theory analysis for reflection phenomenon of homogeneous plane- P_1 -wave at the boundary of unsaturated porothermoelastic media[J]. *Geophysical Journal International*, 2022, 228(2): 1237-1259.
- [24] WEI W, ZHENG R, LIU G, et al. Reflection and refraction of P wave at the interface between thermoelastic and porous thermoelastic medium[J]. *Transport in Porous Media*, 2016, 113(1): 1-27.
- [25] 陈炜昀, 夏唐代, 王宁, 等. 不同饱和度土层分界面上剪切波的反射与透射[J]. *岩土力学*, 2013, 34(3): 894-900.
CHEN Weiyun, XIA Tangdai, WANG Ning, et al. Reflection and transmission of shear waves at interface between soil layers with different saturation degrees[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(3): 894-900.

- [26] 陈炜昀, 夏唐代, 黄睿, 等. P₁波在非饱和土地基表面的反射特性[J]. 工程力学, 2013, 30(9): 56-62.
CHEN Weiyun, XIA Tangdai, HUANG Rui, et al. Reflection characteristics of the P₁ waves at the free boundary of unsaturated soil[J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(9): 56-62.
- [27] ABED A A, SOLOWSKI W T. A study on how to couple thermo-hydro-mechanical behavior of unsaturated soils: physical equations, numerical implementation and examples[J]. Computers and Geotechnics, 2017, 92: 132-155.
- [28] MURPHY W F. Effects of partial water saturation on attenuation in Massillon sandstone and Vycor porous glass[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1982, 71(6): 1458-1468.
- [29] TONG L H, YANG Y, HU W T, et al. On wave propagation characteristics in fluid saturated porous materials by a nonlocal Biot theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 379: 106-118.
- [30] 王宁, 丁海滨, 童立红, 等. 基于非局部 Biot 理论的平面波作用下饱和地基动力响应[J]. 上海交通大学学报, 2021, 55(6): 663-671.
WANG Ning, DING Haibin, TONG Lihong, et al. Dynamic responses of saturated soil foundation subjected to plane wave based on nonlocal-Biot theory[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2021, 55(6): 663-671.
- [31] 徐长节, 丁海滨, 童立红, 等. 基于非局部 Biot 理论下饱和土中深埋圆柱形衬砌对平面弹性波的散射[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(9): 1563-1570.
XU Changjie, DING Haibin, TONG Lihong, et al. Scattering waves generated by cylindrical lining in saturated soil based on nonlocal Biot theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(9): 1563-1570.
- [32] TONG L H, DING H B, YAN J W, et al. Strain gradient nonlocal Biot poromechanics[J]. International Journal of Engineering Science, 2020, 156: 103372.
- [33] DING H B, TONG L H, XU C J, et al. On propagation characteristics of Rayleigh wave in saturated porous media based on the strain gradient nonlocal Biot theory[J]. Computers and Geotechnics, 2022, 141: 104522.

Study of the energetic properties of P₁ wave reflected on the free boundary of unsaturated soil

ZHOU Feng-xi^{1,2}, YAO Tao-qi¹, LIU Hong-bo³

(1.School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2.Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering of Ministry of Education, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 3.School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China)

Abstract: Based on the porous medium theory and the continuum medium fluctuation theory, this paper studies the amplitude reflection and energy reflection properties of the plane P₁ wave reflection on the unsaturated semi-space free boundary. Using Helmholtz decomposition theorem and specific free boundary conditions, the analytical expressions of the amplitude reflection coefficient and energy reflection coefficient of four types of reflected waves (reflection P₁ wave, reflection P₂ wave, reflection P₃ wave, and reflection S wave) generated by the plane P₁ wave are obtained, and the effects of incidence and saturation, frequency and porosity on energetic properties is analyzed. The results show that the amplitude reflection coefficient and energy reflection coefficient not only are affected by the angle of incidence, but also have significantly changed with the change of saturation, and the reflected P₁ wave and reflected S wave carry the vast majority of the incident wave energy.

Key words: unsaturated soil; plane P₁-wave; wave reflection; reflection coefficient; energy distribution

作者简介: 周凤玺(1979—),男,博士,教授。E-mail: geolut@163.com。

附录 A

式(1)中系数的具体形式:

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{A_{13}A_{22} - A_{12}A_{23}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, a_{12} = \frac{A_{14}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\ a_{13} = -\frac{A_{12}A_{24}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, a_{21} = \frac{A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \\ a_{22} = \frac{A_{14}A_{21}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}}, a_{23} = -\frac{A_{11}A_{24}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \end{cases} \quad (\text{A1})$$

$$\vartheta^l = \frac{nS_l}{K_l}, \vartheta^g = \frac{nS_g}{K_g} \quad (\text{A2})$$

$$B_1 = \beta S_e a_{12} + \beta(1 - S_e) a_{22}, B_2 = \beta S_e a_{13} + \beta(1 - S_e) a_{23} \quad (A3)$$

$$\lambda_c = \lambda + \beta S_e a_{11} + \beta(1 - S_e) a_{21} \quad (A4)$$

其中:

$$\begin{cases} A_{11} = \xi S_{ww} S_1 + \frac{n S_1}{K^w} - n \frac{\partial S_1}{\partial p_c}, A_{12} = \xi S_{gg} S_1 + n \frac{\partial S_1}{\partial p_c} \\ A_{13} = \beta S_1, A_{14} = n S_1, A_{21} = \xi S_{ww} S_g + n \frac{\partial S_1}{\partial p_c} \\ A_{22} = \xi S_{gg} S_g + \frac{n S_g}{K^g} - n \frac{\partial S_1}{\partial p_c}, A_{23} = \beta S_g, A_{24} = n S_g \end{cases} \quad (A5)$$

$$\beta = 1 - K^b/K^s \quad (A6)$$

$$S_e = (S_1 - S_{res}^1)/(S_{sat}^1 - S_{res}^1) \quad (A7)$$

$$K_l = k_l^1/\mu_l, K_g = k_g^g/\mu_g \quad (A8)$$

$$k_l^1 = \sqrt{S_e} [1 - (1 - S_e^{1/m})^m]^2, k_g^g = \sqrt{1 - S_e} (1 - S_e^{1/m})^{2m} \quad (A9)$$

式中 χ, m 和 d 为 V-G 模型的材料参数; S_e 为孔隙液体的有效饱和度, 其中 S_{res}^1 和 S_{sat}^1 分别表示残余饱和度和完全饱和度, 本文考虑 $S_{sat}^1 = 1$; 其他符号分别为 $\xi = (\beta - n)/K_s$; $p_c = (1/\chi)\rho_s + (S_e^{-1/m} - 1)^{1/d}$; $S_{ww} = S_e + p_c/[(S_{sat}^1 - S_{res}^1)A_s]$; $S_{gg} = (1 - S_e) - p_c/[(S_{sat}^1 - S_{res}^1)A_s]$; $A_s = \chi m d (S_{sat}^1 - S_{res}^1) S_e^{(m+1)/m} (S_e^{-1/m} - 1)^{(d-1)/d}$ 。

附录 B

式(5a)和(5b)中元素的具体形式:

$$\begin{cases} b_{11} = \rho^l \omega^2 - a_{11} k_p^2, b_{12} = \rho^l \omega^2 + \vartheta^l i \omega - a_{12} k_p^2 \\ b_{13} = -a_{13} k_p^2, b_{21} = \rho^g \omega^2 - a_{21} k_p^2 \\ b_{23} = \rho^g \omega^2 + \vartheta^g i \omega - a_{23} k_p^2 \\ b_{31} = \rho \omega^2 - (\lambda_c + 2\mu) k_p^2 \\ b_{32} = n S^l \rho^l \omega^2 - B_1 k_p^2, b_{33} = n S^g \rho^g \omega^2 - B_2 k_p^2 \end{cases} \quad (B1)$$

$$\begin{cases} c_{11} = \rho^l \omega^2, c_{12} = \rho^l \omega^2 + \vartheta^l i \omega, c_{13} = 0 \\ c_{21} = \rho^g \omega^2, c_{22} = 0, c_{23} = \rho^g \omega^2 + \vartheta^g i \omega \\ c_{31} = \rho \omega^2 - \mu k_s^2, c_{32} = n S_l \rho^l \omega^2, c_{33} = n S_g \rho^g \omega^2 \end{cases} \quad (B2)$$

附录 C

式(15)中矩阵 F 和 G 中的各元素的具体形式:

$$\begin{cases} f_{11} = (\lambda_c + 2\mu n_{P_1}^{re2} + B_1 \delta_{IP_1}^{re} + B_2 \delta_{gP_1}^{re}) k_{P_1}^2 \\ f_{12} = (\lambda_c + 2\mu n_{P_2}^{re2} + B_1 \delta_{IP_2}^{re} + B_2 \delta_{gP_2}^{re}) k_{P_2}^2 \\ f_{13} = (\lambda_c + 2\mu n_{P_3}^{re2} + B_1 \delta_{IP_3}^{re} + B_2 \delta_{gP_3}^{re}) k_{P_3}^2 \\ f_{14} = 2\mu l_S^{re} n_S^{re} k_S^2, f_{21} = 2l_{P_1}^{re} n_{P_1}^{re} k_{P_1}^2, f_{22} = 2l_{P_2}^{re} n_{P_2}^{re} k_{P_2}^2 \\ f_{23} = 2l_{P_3}^{re} n_{P_3}^{re} k_{P_3}^2, f_{24} = (1 - 2n_S^{re2}) k_S^2 \\ f_{31} = (a_{11} + a_{12} \delta_{IP_1}^{re} + a_{13} \delta_{gP_1}^{re}) k_{P_1}^2 \\ f_{32} = (a_{11} + a_{12} \delta_{IP_2}^{re} + a_{13} \delta_{gP_2}^{re}) k_{P_2}^2 \\ f_{33} = (a_{11} + a_{12} \delta_{IP_3}^{re} + a_{13} \delta_{gP_3}^{re}) k_{P_3}^2, f_{34} = f_{44} = 0 \\ f_{41} = (a_{21} + a_{22} \delta_{IP_1}^{re} + a_{23} \delta_{gP_1}^{re}) k_{P_1}^2 \\ f_{42} = (a_{21} + a_{22} \delta_{IP_2}^{re} + a_{23} \delta_{gP_2}^{re}) k_{P_2}^2 \\ f_{43} = (a_{21} + a_{22} \delta_{IP_3}^{re} + a_{23} \delta_{gP_3}^{re}) k_{P_3}^2 \end{cases} \quad (C1)$$

$$\begin{cases} g_1 = -(\lambda_c + 2\mu n_{P_1}^{in2} + B_1 \delta_{IP_1}^{re} + B_2 \delta_{gP_1}^{re}) k_{P_1}^2 \\ g_2 = 2l_{P_1}^{in} n_{P_1}^{in} k_{P_1}^2, g_3 = -(a_{11} + a_{12} \delta_{IP_1}^{re} + a_{13} \delta_{gP_1}^{re}) k_{P_1}^2 \\ g_4 = -(a_{21} + a_{22} \delta_{IP_1}^{re} + a_{23} \delta_{gP_1}^{re}) k_{P_1}^2 \end{cases} \quad (C2)$$

附录 D

式(18a)~(18e)中各元素的具体形式:

$$\begin{cases} \sigma_{33}^{\text{ip}_1} = -[\lambda_c + (2\mu n_{\text{P}_1}^{\text{in}})^2 + B_1 \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} + B_2 \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}}] k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{in}} \\ \sigma_{33}^{\text{rp}_1} = -[\lambda_c + (2\mu n_{\text{P}_1}^{\text{re}})^2 + B_1 \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} + B_2 \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}}] k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ \sigma_{33}^{\text{rp}_2} = -[\lambda_c + (2\mu n_{\text{P}_2}^{\text{re}})^2 + B_1 \delta_{\text{IP}_2}^{\text{re}} + B_2 \delta_{\text{gP}_2}^{\text{re}}] k_{\text{P}_2}^2 A_{\text{sP}_2}^{\text{re}} \\ \sigma_{33}^{\text{rp}_3} = -[\lambda_c + (2\mu n_{\text{P}_3}^{\text{re}})^2 + B_1 \delta_{\text{IP}_3}^{\text{re}} + B_2 \delta_{\text{gP}_3}^{\text{re}}] k_{\text{P}_3}^2 A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ \sigma_{33}^{\text{rs}} = -2\mu l_{\text{S}}^{\text{re}} n_{\text{S}}^{\text{re}} k_{\text{S}}^2 B_{\text{S}}^{\text{re}} \end{cases} \quad (\text{D1})$$

$$\begin{cases} \sigma_{13}^{\text{ip}_1} = 2\mu l_{\text{P}_1}^{\text{in}} n_{\text{P}_1}^{\text{in}} k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{in}}, \sigma_{13}^{\text{rp}_1} = -2\mu l_{\text{P}_1}^{\text{re}} n_{\text{P}_1}^{\text{re}} k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ \sigma_{13}^{\text{rp}_2} = -2\mu l_{\text{P}_2}^{\text{re}} n_{\text{P}_2}^{\text{re}} k_{\text{P}_2}^2 A_{\text{sP}_2}^{\text{re}}, \sigma_{13}^{\text{rp}_3} = -2\mu l_{\text{P}_3}^{\text{re}} n_{\text{P}_3}^{\text{re}} k_{\text{P}_3}^2 A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ \sigma_{13}^{\text{rs}} = \mu [(n_{\text{S}}^{\text{re}})^2 - (l_{\text{S}}^{\text{re}})^2] k_{\text{S}}^2 B_{\text{S}}^{\text{re}} \end{cases} \quad (\text{D2})$$

$$\begin{cases} p_1^{\text{ip}_1} = (a_{11} + a_{12} \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} + a_{13} \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}}) k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{in}} \\ p_1^{\text{rp}_1} = (a_{11} + a_{12} \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} + a_{13} \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}}) k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ p_1^{\text{rp}_2} = (a_{11} + a_{12} \delta_{\text{IP}_2}^{\text{re}} + a_{13} \delta_{\text{gP}_2}^{\text{re}}) k_{\text{P}_2}^2 A_{\text{sP}_2}^{\text{re}} \\ p_1^{\text{rp}_3} = (a_{11} + a_{12} \delta_{\text{IP}_3}^{\text{re}} + a_{13} \delta_{\text{gP}_3}^{\text{re}}) k_{\text{P}_3}^2 A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ p_1^{\text{rs}} = 0 \end{cases} \quad (\text{D3})$$

$$\begin{cases} p_{\text{g}}^{\text{ip}_1} = (a_{21} + a_{22} \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} + a_{23} \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}}) k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{in}} \\ p_{\text{g}}^{\text{rp}_1} = (a_{21} + a_{22} \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} + a_{23} \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}}) k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ p_{\text{g}}^{\text{rp}_2} = (a_{21} + a_{22} \delta_{\text{IP}_2}^{\text{re}} + a_{23} \delta_{\text{gP}_2}^{\text{re}}) k_{\text{P}_2}^2 A_{\text{sP}_2}^{\text{re}} \\ p_{\text{g}}^{\text{rp}_3} = (a_{21} + a_{22} \delta_{\text{IP}_3}^{\text{re}} + a_{23} \delta_{\text{gP}_3}^{\text{re}}) k_{\text{P}_3}^2 A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ p_{\text{g}}^{\text{rs}} = 0 \end{cases} \quad (\text{D4})$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{3s}^{\text{ip}_1} = -n_{\text{P}_1}^{\text{in}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{in}}, \dot{u}_{3s}^{\text{rp}_1} = n_{\text{P}_1}^{\text{re}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{3s}^{\text{rp}_2} = n_{\text{P}_2}^{\text{re}} v_{\text{P}_2} k_{\text{P}_2}^2 A_{\text{sP}_2}^{\text{re}}, \dot{u}_{3s}^{\text{rp}_3} = n_{\text{P}_3}^{\text{re}} v_{\text{P}_3} k_{\text{P}_3}^2 A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{3s}^{\text{rs}} = -l_{\text{S}}^{\text{re}} v_{\text{S}} k_{\text{S}}^2 B_{\text{S}}^{\text{re}} \end{cases} \quad (\text{D5})$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{1s}^{\text{ip}_1} = l_{\text{P}_1}^{\text{in}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{in}}, \dot{u}_{1s}^{\text{rp}_1} = l_{\text{P}_1}^{\text{re}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{1s}^{\text{rp}_2} = l_{\text{P}_2}^{\text{re}} v_{\text{P}_2} k_{\text{P}_2}^2 A_{\text{sP}_2}^{\text{re}}, \dot{u}_{1s}^{\text{rp}_3} = l_{\text{P}_3}^{\text{re}} v_{\text{P}_3} k_{\text{P}_3}^2 A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{1s}^{\text{rs}} = -n_{\text{S}}^{\text{re}} v_{\text{S}} k_{\text{S}}^2 B_{\text{S}}^{\text{re}} \end{cases} \quad (\text{D6})$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{3l}^{\text{ip}_1} = -n_{\text{P}_1}^{\text{in}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} A_{\text{sP}_1}^{\text{in}}, \dot{u}_{3l}^{\text{rp}_1} = n_{\text{P}_1}^{\text{re}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 \delta_{\text{IP}_1}^{\text{re}} A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{3l}^{\text{rp}_2} = n_{\text{P}_2}^{\text{re}} v_{\text{P}_2} k_{\text{P}_2}^2 \delta_{\text{IP}_2}^{\text{re}} A_{\text{sP}_2}^{\text{re}}, \dot{u}_{3l}^{\text{rp}_3} = n_{\text{P}_3}^{\text{re}} v_{\text{P}_3} k_{\text{P}_3}^2 \delta_{\text{IP}_3}^{\text{re}} A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{3l}^{\text{rs}} = -l_{\text{S}}^{\text{re}} v_{\text{S}} k_{\text{S}}^2 \delta_{\text{IS}}^{\text{re}} B_{\text{S}}^{\text{re}} \end{cases} \quad (\text{D7})$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{3g}^{\text{ip}_1} = -n_{\text{P}_1}^{\text{in}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}} A_{\text{sP}_1}^{\text{in}}, \dot{u}_{3g}^{\text{rp}_1} = n_{\text{P}_1}^{\text{re}} v_{\text{P}_1} k_{\text{P}_1}^2 \delta_{\text{gP}_1}^{\text{re}} A_{\text{sP}_1}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{3g}^{\text{rp}_2} = n_{\text{P}_2}^{\text{re}} v_{\text{P}_2} k_{\text{P}_2}^2 \delta_{\text{gP}_2}^{\text{re}} A_{\text{sP}_2}^{\text{re}}, \dot{u}_{3g}^{\text{rp}_3} = n_{\text{P}_3}^{\text{re}} v_{\text{P}_3} k_{\text{P}_3}^2 \delta_{\text{gP}_3}^{\text{re}} A_{\text{sP}_3}^{\text{re}} \\ \dot{u}_{3g}^{\text{rs}} = -l_{\text{S}}^{\text{re}} v_{\text{S}} k_{\text{S}}^2 \delta_{\text{GS}}^{\text{re}} B_{\text{S}}^{\text{re}} \end{cases} \quad (\text{D8})$$