

# 考虑参数不确定性和相关性的电动汽车动力总成 悬置系统稳健性优化

吕 辉<sup>1</sup>, 张家明<sup>1</sup>, 黄晓婷<sup>2</sup>, 上官文斌<sup>1</sup>, 肖国权<sup>1</sup>

(1. 华南理工大学机械与汽车工程学院, 广东 广州 510641;

2. 广州城市理工学院汽车与交通工程学院, 广东 广州 510800)

**摘要:** 针对电动汽车动力总成悬置系统(PMS)参数同时具有不确定性和相关性的复杂情形, 本文开展了考虑参数不确定性和相关性的电动汽车PMS稳健性优化设计研究。基于Nataf变换和蒙特卡罗抽样提出了一种概率参数相关情形下的PMS固有特性响应不确定性和相关性分析的Nataf-蒙特卡罗(NMC)方法; 结合Nataf变换和任意多项式混沌展开推导了一种高效求解PMS响应不确定性和相关性的Nataf-任意多项式混沌展开(NAPCE)方法; 基于NAPCE方法和相关系数赋权法提出了一种考虑响应不确定性和相关性的PMS稳健性优化设计方法; 通过算例验证了所提方法的有效性, 并对系统进行了稳健性优化。结果表明, 以NMC方法作为参考, NAPCE方法在求解PMS固有特性响应的不确定性和相关性方面具有良好的计算精度和效率; 提出的优化方法能够合理配置系统参数, 提高系统稳健性。

**关键词:** 电动汽车; 动力总成悬置系统; Nataf变换; 任意多项式混沌展开; 稳健性优化

**中图分类号:** U469.72; U463.33 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)02-0375-08

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.02.016

## Robustness optimization for the powertrain mounting system of electric vehicle considering parametric uncertainty and correlation

LYU Hui<sup>1</sup>, ZHANG Jiaming<sup>1</sup>, HUANG Xiaoting<sup>2</sup>, SHANGGUAN Wenbin<sup>1</sup>, XIAO Guoquan<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;

2. School of Automobile and Traffic Engineering, Guangzhou City University of Technology, Guangzhou 510800, China)

**Abstract:** This study addresses the complex scenario where the parameters of the powertrain mounting system (PMS) of an electric vehicle exhibit both uncertainty and correlation. A robust design optimization method for the PMS, considering parametric uncertainty and correlation, is investigated. Firstly, based on Nataf transform and Monte Carlo sampling, the Nataf-Monte Carlo (NMC) method is proposed for the uncertainty and correlation analysis of PMS inherent characteristics, where the probabilistic parameters are correlated. Then, an efficient method, the Nataf-arbitrary polynomial chaos expansion (NAPCE) method, is derived for PMS response analysis by integrating Nataf transformation with arbitrary polynomial chaos expansion. Next, based on the NAPCE method and correlation coefficient weighting method, a robust design optimization method for PMS is developed, accounting for the uncertainty and correlation of responses. Finally, a numerical example is used to verify the effectiveness of the proposed method, and the robust optimization of the system is carried out. The results show that, compared to the NMC method, the NAPCE method offers good computational accuracy and efficiency for analyzing uncertainty and correlation in PMS responses. The proposed optimization method can configure the PMS parameters reasonably and improve the robustness of system.

**Keywords:** electric vehicle; powertrain mounting system; Nataf transformation; arbitrary polynomial chaos expansion; robustness optimization

电动汽车动力总成悬置系统(powertrain mounting system, PMS)是电驱动总成和车架之间的弹性连接系统, 具有支承、限位和隔振等功能。受制造工

艺、装配技术及工作环境等因素影响, 汽车PMS参数存在广泛的不确定性<sup>[1-2]</sup>。在汽车PMS中, 电动汽车普遍采用的隔振元件是橡胶悬置。受结构、材料和

收稿日期: 2023-03-07; 修订日期: 2023-04-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51975217); 广东省自然科学基金资助项目(2023A1515011585)

制造工艺等因素影响,橡胶悬置相比其他类型悬置(如液压悬置),其参数具有更明显的不确定性和相关性。即电动汽车的振动噪声特性更容易受到PMS悬置参数不确定性的影响。此外,由于电动汽车没有发动机的掩蔽效应,其PMS引发的整车振动噪声问题更为突出。优化PMS固有特性响应的稳健性可有效提高不确定情形下电动汽车的驾乘舒适性。

工程上常基于概率模型和非概率模型进行PMS不确定性分析与优化。基于概率模型,LYU等<sup>[3]</sup>将悬置刚度参数处理为具有区间分布的概率变量,提出了一种PMS固有特性优化方法;随后,进一步将悬置刚度参数处理为具有不精确分布的概率变量,基于证据理论提出了一种PMS不确定性分析和优化方法<sup>[4]</sup>。吴杰等<sup>[5]</sup>将悬置刚度分别处理为均匀分布和正态分布变量,建立了PMS固有特性优化设计模型,提高了PMS解耦布置和频率配置的可靠性。陈剑等<sup>[6]</sup>根据悬置刚度的正态分布特性,结合稳健设计与多目标优化,提出了一种基于6Sigma的多目标稳健优化方法。

上述研究均将PMS不确定参数视为独立变量,然而,工程中PMS参数之间往往存在相关性<sup>[7]</sup>。目前,考虑参数相关性的不确定性分析主要基于非概率模型,如椭球模型<sup>[8]</sup>和多维平行六面体模型<sup>[8]</sup>。文献[7-10]将含相关性的不确定参数分别采用椭球模型和多维平行六面体模型进行描述,对PMS固有特性的响应边界进行了非概率不确定性分析,获得了比传统区间方法更合理的响应范围。

可以看出,基于非概率模型的PMS不确定性研究已取得一定进展,然而,基于概率模型开展考虑参数不确定性和相关性的PMS研究尚不多见。此外,PMS是多响应系统,不确定响应之间往往也具有相关性。现有研究在进行PMS不确定性优化设计时,很少将响应相关性纳入优化设计建模中,使得优化模型缺乏一定的真实性和客观性。

针对上述问题,本文采用概率模型和相关系数分别描述系统参数的不确定性和相关性,在同时考虑PMS响应的不确定性和相关性的基础上,开展电动汽车PMS固有特性响应的稳健性优化设计研究,以期为该复杂情形下的电动汽车PMS优化设计提供理论基础和参考。

## 1 PMS参数的不确定性和相关性

### 1.1 电动汽车动力总成悬置系统

对集中式驱动电动汽车PMS固有特性进行分析时,常将电驱动总成视为刚体,悬置简化为具有三

向刚度的弹性元件<sup>[11]</sup>并分别建立电驱动总成坐标系 $G_0$ -XYZ和描述悬置参数的局部坐标系 $g_i$ - $u_i$ - $v_i$ - $w_i$ 。其中, $G_0$ 为电驱动总成坐标系的原点,坐标系X轴方向与汽车前进方向相反,Z轴方向垂直指向上方,Y轴方向根据右手定则确定。建立某电动汽车PMS六自由度模型如图1所示。

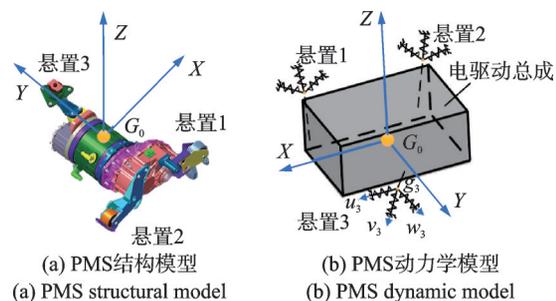


图1 电动汽车PMS六自由度模型

Fig. 1 Six degrees of freedom model of electric vehicle PMS

由运动学方程得到电动汽车PMS自由振动的特征方程为:

$$(M^{-1}K - \omega_i^2 \mathbf{I})\phi_i = 0 \quad (1)$$

式中, $M$ 为系统质量矩阵; $K$ 为系统刚度矩阵; $\omega_i$ 为第*i*阶固有频率对应的圆频率; $\phi_i$ 为第*i*阶振型。第*i*阶固有频率 $f_i$ 为:

$$f_i = \omega_i / (2\pi) \quad (2)$$

当系统以第*i*阶固有频率振动时,第*k*个广义坐标上的振动能量为:

$$E(k, i) = \frac{\phi_{k,i} \sum_{j=1}^6 (M_{k,j} \phi_{j,i})}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (3)$$

式中, $\phi_{k,i}$ 和 $\phi_{j,i}$ 分别为 $\phi_i$ 的第*k*和第*j*个分量; $M_{k,j}$ 为 $M$ 的第*k*行、第*j*列元素。第*i*阶模态对应的解耦率定义为:

$$d_i = \max_{k=1,2,\dots,6} E(k, i) \quad (4)$$

当解耦率等于100%时,系统第*i*阶振动的能量全部集中在某广义坐标上,该阶振动完全解耦。

### 1.2 参数不确定性和相关性

在不确定因素影响下,可认为PMS不确定参数服从某种概率分布,且不确定参数之间可能存在相关性或彼此独立。假设系统中存在*n*个具有相关性的不确定变量,采用向量 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 描述。对于变量 $x_\alpha$ ,其均值和标准差分别记为 $e_{x_\alpha}$ 和 $\sigma_{x_\alpha}$ ;对于变量 $x_\beta$ ,其均值和标准差分别记为 $e_{x_\beta}$ 和 $\sigma_{x_\beta}$ 。不确定变量 $x_\alpha$ 和 $x_\beta$ 之间的相关系数为:

$$\rho_{x_\alpha, x_\beta} = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l \left( \frac{x_{\alpha,i} - e_{x_\alpha}}{\sigma_{x_\alpha}} \right) \left( \frac{x_{\beta,i} - e_{x_\beta}}{\sigma_{x_\beta}} \right) \quad (5)$$

式中, $l$ 为每个变量标量观测值的个数; $x_{\alpha,i}$ 和 $x_{\beta,i}$ 分

别表示变量  $x_\alpha$  和  $x_\beta$  的第  $i$  个观测值。

设  $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n]^\top$  为具有相关性的标准正态向量。根据 Nataf 理论<sup>[12-13]</sup>, 相关系数还可以表示为:

$$\rho_{x_\alpha, x_\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{x_\alpha}^{-1}(\Phi(h_\alpha)) - e_{x_\alpha}}{\sigma_{x_\alpha}} \cdot \frac{F_{x_\beta}^{-1}(\Phi(h_\beta)) - e_{x_\beta}}{\sigma_{x_\beta}} \cdot \varphi(h_\alpha, h_\beta, \rho_{h_\alpha, h_\beta}) dh_\alpha dh_\beta \quad (6)$$

式中,  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布函数;  $F_{x_\alpha}^{-1}(\cdot)$  和  $F_{x_\beta}^{-1}(\cdot)$  分别为  $x_\alpha$  和  $x_\beta$  的累计分布函数的逆函数, 且有  $x_\alpha = F_{x_\alpha}^{-1}(\Phi(h_\alpha))$ ,  $x_\beta = F_{x_\beta}^{-1}(\Phi(h_\beta))$ ;  $\varphi(h_\alpha, h_\beta, \rho_{h_\alpha, h_\beta})$  为变量  $h_\alpha$  和  $h_\beta$  的联合概率密度函数。

式(6)的求解相对繁琐, 可根据经验公式进行计算:

$$\rho_{h_\alpha, h_\beta} = \kappa \rho_{x_\alpha, x_\beta} \quad (7)$$

式中,  $\kappa$  为经验系数,  $\kappa$  与  $x_\alpha$  和  $x_\beta$  的具体数值无关, 由变量的分布类型确定。

根据协方差的定义以及变量的标准差和相关系数, 协方差矩阵可以表示为:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 \rho_{h_1, h_1} & \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \rho_{h_1, h_2} & \dots & \sigma_{x_1} \sigma_{x_n} \rho_{h_1, h_n} \\ \sigma_{x_2} \sigma_{x_1} \rho_{h_2, h_1} & \sigma_{x_2}^2 \rho_{h_2, h_2} & \dots & \sigma_{x_2} \sigma_{x_n} \rho_{h_2, h_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n} \sigma_{x_1} \rho_{h_n, h_1} & \sigma_{x_n} \sigma_{x_2} \rho_{h_n, h_2} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \rho_{h_n, h_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

矩阵  $\mathbf{C}$  为半正定矩阵, 矩阵内元素为对应变量直接的协方差, 可对其进行如下分解, 得到下三角矩阵  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top \quad (9)$$

矩阵  $\mathbf{L}$  可将独立标准正态向量变换为向量  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{h} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (10)$$

综上所述, 相关向量  $\mathbf{x}$  可以表示为独立标准正态向量  $\mathbf{u}$  的响应函数:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{u}) \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{T}(\cdot)$  表示向量  $\mathbf{x}$  和向量  $\mathbf{u}$  之间的变换过程。

## 2 PMS 响应不确定性和相关性分析

### 2.1 NMC 方法

蒙特卡罗抽样是应用最为广泛的一种不确定性分析技术, 计算精度随抽样次数的增加而提高。本文首先基于 Nataf 变换和蒙特卡罗抽样, 提出一种求解概率参数相关情形下 PMS 固有特性响应不确定性和相关性的 Nataf-蒙特卡罗 (Nataf-Monte Carlo, NMC) 方法, 其主要步骤为:

(1) 根据  $n$  维随机向量  $\mathbf{x}$  中各变量的标准差以及变量之间的相关性, 通过式(7)~(9)计算得到下三角矩阵  $\mathbf{L}$ 。

(2) 根据标准正态分布概率密度函数进行抽样, 得到一个  $n \times l$  维独立样本矩阵  $\mathbf{u}_s = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]^\top$ , 通过式(10)将独立样本矩阵  $\mathbf{u}_s$  转化为相关样本矩阵  $\mathbf{h}_s = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_n]^\top$ 。

(3) 根据不确定变量累计分布函数的逆函数, 将样本矩阵  $\mathbf{h}_s$  进行变换, 变换后的样本矩阵具有相关性, 记为  $\mathbf{x}_s = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]^\top$ 。

(4) 将抽样得到的第  $i$  组样本数据  $[x_{1,i} \ x_{2,i} \ \dots \ x_{n,i}]^\top$  代入 PMS 模型, 计算第  $i$  组样本对应的系统固有特性。

(5) 重复步骤(4)  $l$  次, 计算  $l$  组响应的均值、标准差以及响应之间的相关系数。

NMC 方法可以作为参考方法, 用于验证其他分析方法的有效性。

### 2.2 NAPCE 方法

NMC 方法计算效率往往较低, 因此进一步提出一种高效求解 PMS 响应不确定性和相关性的 Nataf-任意多项式混沌展开 (Nataf-arbitrary polynomial chaos expansion, NAPCE) 方法。

以  $Y(\mathbf{x})$  表示 PMS 固有特性响应函数, 基于任意多项式混沌展开和式(11),  $Y(\mathbf{x})$  可以表示为<sup>[14]</sup>:

$$Y(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(\mathbf{u}) \quad (12)$$

式中,  $c_i$  为多项式基的展开系数;  $\varphi_i(\mathbf{u})$  为向量  $\mathbf{u}$  的第  $i$  阶多项式基。

系统响应可以通过任意多项式 (arbitrary polynomial chaos, APC) 展开截断表示为:

$$Y(\mathbf{x}) \approx \sum_{i_1=0}^{s_1} \dots \sum_{i_n=0}^{s_n} c_{i_1, \dots, i_n} \varphi_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{u}) \quad (13)$$

式中,  $s_\alpha (\alpha = 0, 1, \dots, n)$  为变量  $u_\alpha$  的展开阶数, 其中  $n$  为不确定变量的个数;  $c_{i_1, \dots, i_n}$  为多项式基的展开系数;  $\varphi_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{u})$  为向量  $\mathbf{u}$  的多项式基, 可以表示为多项式基的乘积:

$$\varphi_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^n \varphi_{i_j}(u_j) \quad (14)$$

$u_\alpha$  的任意多项式基  $\varphi_i(u_\alpha)$  满足以下递推关系:

$$b_i \varphi_i(u_\alpha) = (u_\alpha - a_i) \varphi_{i-1}(u_\alpha) + b_{i-1} \varphi_{i-2}(u_\alpha) \quad (15)$$

式中,  $a_i$  和  $b_i$  为待求未知系数, 且  $\varphi_{-1}(u_\alpha) = 0$ ,  $\varphi_0(u_\alpha) = 1$ 。

变量  $u_\alpha$  的第  $i$  阶统计矩计算公式如下:

$$\mu_{x_\alpha}^i = \int_{\Omega} u_\alpha^i \omega(u_\alpha) du_\alpha \quad (16)$$

式中,  $\Omega$  为积分域;  $\omega(u_\alpha)$  为变量  $u_\alpha$  的概率密度函数, 如果变量相关性为 0, 则  $\omega(u_\alpha) = \omega(x_\alpha)$ 。

将  $u_\alpha$  的统计矩表示为如下 Hankel 矩阵形式:

$$H_a = \begin{bmatrix} \mu_{x_a}^0 & \mu_{x_a}^1 & \cdots & \mu_{x_a}^{s_a} \\ \mu_{x_a}^1 & \mu_{x_a}^2 & \cdots & \mu_{x_a}^{s_a+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{x_a}^{s_a} & \mu_{x_a}^{s_a+1} & \cdots & \mu_{x_a}^{2s_a} \end{bmatrix} \quad (17)$$

对矩阵  $H_a$  进行 Cholesky 分解, 得到上三角矩阵  $R_a$ , 即  $H_a = R_a^T R_a$ , 根据  $R_a$  可确定未知系数  $a_i$  和  $b_i$ 。然后, 对 Jacobi 矩阵  $J_a$  进行特征值分解, 可以获得  $u_a$  对应的高斯积分节点向量  $\hat{u}_a = [\hat{u}_{a,1} \ \hat{u}_{a,2} \ \cdots \ \hat{u}_{a,q_a}]^T$  和高斯积分权值向量  $\hat{w}_a = [\hat{w}_{a,1} \ \hat{w}_{a,2} \ \cdots \ \hat{w}_{a,q_a}]^T$ , 其中下标“ $q_a$ ”为  $u_a$  的高斯积分节点数目。  $J_a$  可以表示为:

$$J_a = \begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & & & \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{s_a-1} & \sqrt{b_{s_a}} & \\ & & & \sqrt{b_{s_a}} & a_{s_a} & \end{bmatrix} \quad (18)$$

将  $u_a$  对应的高斯积分节点向量  $\hat{u}_a$  代入式(11), 可以得到相关随机变量  $x_a$  对应的高斯积分节点向量  $\hat{x}_a = [\hat{x}_{a,1} \ \hat{x}_{a,2} \ \cdots \ \hat{x}_{a,q_a}]^T$ 。如果变量相关性为 0, 则不需要代入式(11)进行 Nataf 变换。

得到所有变量的高斯积分节点向量和高斯积分权值向量后, 可以将多项式基的展开系数表示为:

$$c_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{j_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{q_n} Y(\hat{x}_{1,j_1}, \dots, \hat{x}_{n,j_n}) \times \varphi_i(\hat{u}_{1,j_1}, \dots, \hat{u}_{n,j_n}) \times \hat{w}_{1,j_1} \times \cdots \times \hat{w}_{n,j_n} \quad (19)$$

式中,  $q_n$  表示  $x_n$  对应的高斯积分节点数目。基于多项式基的性质, 可获得  $Y(x)$  的均值和标准差分别为:

$$e_Y = c_{0, \dots, 0}, \quad \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i_1=0}^{s_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{s_n} (c_{i_1, \dots, i_n})^2 - (c_{0, \dots, 0})^2} \quad (20)$$

计算 APC 展开系数的过程中, 已获得高斯积分节点处系统响应。通过式(5)可以计算响应  $Y_a$  和  $Y_b$  之间的相关系数为:

$$\rho_{Y_a, Y_b} = \frac{1}{Q-1} \sum_{i=1}^Q \left( \frac{Y_{a,i} - e_{Y_a}}{\sigma_{Y_a}} \right) \left( \frac{Y_{b,i} - e_{Y_b}}{\sigma_{Y_b}} \right) \quad (21)$$

式中,  $Y_{a,i}$  和  $Y_{b,i}$  为响应  $Y_a$  和  $Y_b$  的第  $i$  个计算结果;  $e_{Y_a}$  和  $e_{Y_b}$  为响应  $Y_a$  和  $Y_b$  的均值;  $\sigma_{Y_a}$  和  $\sigma_{Y_b}$  为响应  $Y_a$  和  $Y_b$  的标准差;  $Q = \prod_{i=1}^n q_i$  为高斯积分节点处系统响应个数。NAPCE 方法的分析流程如图 2 所示。

需要说明的是,  $Y(x)$  在本文中表示电动汽车 PMS 固有特性响应函数。实际上,  $Y(x)$  也可以用于表示其他概率参数具有相关性的不确定工程问题(如燃油汽车 PMS 设计问题, 汽车制动噪声问题等)

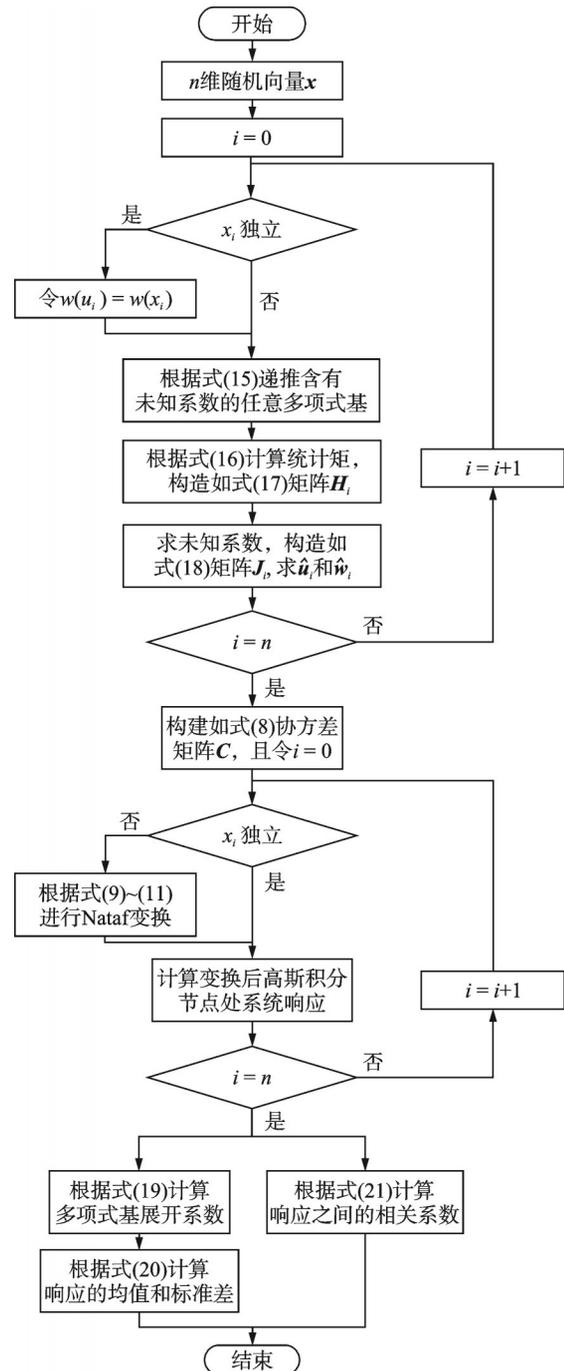


图2 PMS 不确定性和相关性分析流程

Fig. 2 Analysis flow of uncertainty and correlation of PMS

的响应函数。因此, 本文方法适用于参数具有概率不确定性和相关性这一大类工程问题的分析研究。

### 3 PMS 的稳健性优化

#### 3.1 优化子目标的权重

PMS 的优化设计属于多目标优化问题。在传统的 PMS 优化中, 各优化子目标的权重仅由主观意识决定, 缺乏客观准则。本文采用相关系数赋权法<sup>[15]</sup>确定 PMS 各优化子目标的客观权重。  $Y_a$  与其他响应相关程度的均值为:

$$\delta'_\alpha = \frac{\sum_{i=1, i \neq \alpha}^N |\rho_{Y_\alpha, Y_i}|}{N-1} \quad (22)$$

式中,  $N$  为响应总个数。

一个响应与另一响应相关性越大, 在权重体系中所占比重越小, 权重与相关性关系如下:

$$\bar{\delta}'_\alpha = \frac{1}{\delta'_\alpha} \quad (23)$$

进行归一化处理, 得到响应  $Y_\alpha$  的客观权重为:

$$v'_\alpha = \frac{\bar{\delta}'_\alpha}{\sum_{i=1}^N \bar{\delta}'_i} \quad (24)$$

式中,  $\bar{\delta}'_i$  代表每个响应的权重。

主观权重  $v''_\alpha$  根据工程经验或设计需求确定。响应  $Y_\alpha$  的综合权重  $v_\alpha$  由主客观权重叠加得到:

$$v_\alpha = 0.5(v'_\alpha + v''_\alpha) \quad (25)$$

### 3.2 稳健性优化模型

竖直(Bounce)方向和绕电机轴中心线的旋转(Pitch)方向为电动汽车PMS的主要振动方向, 本文重点关注这两个方向的固有特性(竖直方向固有频率  $f_B$ 、竖直方向解耦率  $d_B$ 、旋转方向固有频率  $f_P$  和旋转方向解耦率  $d_P$ )。为避免路面激励频率, 固有频率不低于 5 Hz。当电机激励频率为 50 Hz 时, 取频率比为 2, 固有频率上限可计算为 25 Hz。X、Y 和 Bounce 方向上固有频率的最小值和最大值分别为 5 和 15 Hz, 其余三个自由度方向上固有频率的最小值和最大值分别为 15 和 25 Hz。在稳健性优化设计中, 不仅要优化响应均值还要最小化响应标准差。结合 6Sigma 准则, PMS 稳健性优化模型为:

$$\begin{aligned} \max \quad & v_B(e_{d_B} - 6\sigma_{d_B}) + v_P(e_{d_P} - 6\sigma_{d_P}); \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} d_{i, \min} + 6\sigma_{d_i} \leq e_{d_i}, i = 1, 2, \dots, 6 \\ f_{i, \min} + 6\sigma_{f_i} \leq e_{f_i} \leq f_{i, \max} - 6\sigma_{f_i} \\ t_j^L \leq t_j \leq t_j^U, j = 1, 2, \dots, 9 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

式中,  $v_B$  和  $v_P$  分别为响应  $d_B$  和  $d_P$  的综合优化权重;  $e_{d_B}$  和  $e_{d_P}$  分别为响应  $d_B$  和  $d_P$  的均值;  $\sigma_{d_B}$  和  $\sigma_{d_P}$  分别为响应  $d_B$  和  $d_P$  的标准差;  $d_{i, \min}$  为  $d_i$  的最小值;  $f_{i, \min}$  和  $f_{i, \max}$  分别为  $f_i$  的最小值和最大值;  $t_j$  为第  $j$  个优化变量的名义值;  $t_j^U$ 、 $t_j^L$  分别为  $t_j$  取值的上、下界。

## 4 算例分析

### 4.1 PMS 模型

以图 3 中某集中式驱动电动汽车三点悬置 PMS 为例, 电驱动总成重 91 kg。表 1 为总成的转动惯量和惯性积。

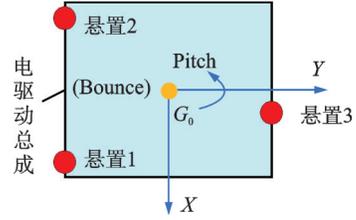


图3 某PMS分析模型

Fig. 3 Analysis model of a PMS

表1 总成的转动惯量和惯性积

Tab. 1 Moment of inertia and product of inertia of powertrain

转动惯量/(kg·m <sup>2</sup> )			惯性积/(10 <sup>-16</sup> kg·m <sup>2</sup> )		
$I_{XX}$	$I_{YY}$	$I_{ZZ}$	$I_{XY}$	$I_{YZ}$	$I_{ZX}$
0.59	1.49	1.60	-2.45	-0.11	1.77

本文将悬置刚度参数处理为不确定参数。表 2 为各悬置三向刚度的分布类型、均值及标准差。表 3 为各悬置的安装位置。

表2 悬置刚度的分布类型、均值及标准差

Tab. 2 Distribution types, mean values and standard deviations of suspension stiffness

悬置名称	悬置刚度	分布类型	均值/(N·mm <sup>-1</sup> )	标准差/(N·mm <sup>-1</sup> )
悬置 1	$K_{u_1}$	对数正态	87.98	0.93
	$K_{v_1}$	对数正态	60.12	0.50
	$K_{w_1}$	对数正态	132.94	0.95
悬置 2	$K_{u_2}$	对数正态	144.67	1.52
	$K_{v_2}$	对数正态	98.73	0.82
	$K_{w_2}$	对数正态	84.56	0.61
悬置 3	$K_{u_3}$	对数正态	79.18	0.83
	$K_{v_3}$	对数正态	78.69	0.65
	$K_{w_3}$	对数正态	149.56	1.07

表3 悬置安装位置

Tab. 3 The installed locations of each mount

悬置名称	X/mm	Y/mm	Z/mm
悬置 1	-128	-83	58
悬置 2	0	352	34
悬置 3	303	-83	58

### 4.2 PMS 不确定性分析

为探究研究变量对 PMS 固有特性响应的影响, 保持悬置刚度的均值不变, 将表 2 中各参数的标准差记为  $\sigma_x$ , 分别考虑标准差为  $\sigma_x$ 、 $2\sigma_x$ 、 $3\sigma_x$ 、 $4\sigma_x$ 、 $5\sigma_x$  和  $6\sigma_x$  时的 6 种不确定情形。分析过程中悬置刚度参数的相关系数为 0.3。比较不同抽样次数的计算结果发现, 当抽样次数达到  $10^6$  次时, NMC 方法的计算结果已收敛。表 4 和 5 分别给出了 Bounce 和 Pitch 方向 NMC 与 NAPCE 方法求得的  $f_B$ 、 $d_B$ 、 $f_P$  和  $d_P$  的均值 ( $e_{f_B}$ 、 $e_{d_B}$ 、 $e_{f_P}$ 、 $e_{d_P}$ ) 及标准差 ( $\sigma_{f_B}$ 、 $\sigma_{d_B}$ 、 $\sigma_{f_P}$ 、 $\sigma_{d_P}$ )。

由表 4 可知, 在各种情形下,  $f_B$  的均值都满足工

表 4 Bounce 方向固有特性

Tab. 4 The inherent characteristic of Bounce direction

标准 差	NMC 方法				NAPCE 方法			
	$e_{f_b}/\text{Hz}$	$\sigma_{f_b}/\text{Hz}$	$e_{d_b}/\%$	$\sigma_{d_b}/\%$	$e_{f_b}/\text{Hz}$	$\sigma_{f_b}/\text{Hz}$	$e_{d_b}/\%$	$\sigma_{d_b}/\%$
$\sigma_x$	9.64	0.02	84.92	0.51	9.71	0.02	84.93	0.49
$2\sigma_x$	9.64	0.04	84.88	1.01	9.66	0.04	84.88	1.00
$3\sigma_x$	9.63	0.07	84.82	1.52	9.61	0.07	84.82	1.52
$4\sigma_x$	9.63	0.09	84.74	2.03	9.56	0.09	84.74	2.06
$5\sigma_x$	9.63	0.11	84.65	2.55	9.52	0.11	84.64	2.61
$6\sigma_x$	9.63	0.13	84.54	3.08	9.47	0.13	84.52	3.18

表 5 Pitch 方向固有特性

Tab. 5 The inherent characteristic of Pitch direction

标准 差	NMC 方法				NAPCE 方法			
	$e_{f_p}/\text{Hz}$	$\sigma_{f_p}/\text{Hz}$	$e_{d_p}/\%$	$\sigma_{d_p}/\%$	$e_{f_p}/\text{Hz}$	$\sigma_{f_p}/\text{Hz}$	$e_{d_p}/\%$	$\sigma_{d_p}/\%$
$\sigma_x$	16.44	0.04	85.45	0.21	16.55	0.04	85.45	0.20
$2\sigma_x$	16.43	0.08	85.44	0.41	16.47	0.08	85.44	0.41
$3\sigma_x$	16.43	0.13	85.43	0.62	16.39	0.13	85.43	0.62
$4\sigma_x$	16.43	0.17	85.42	0.83	16.31	0.17	85.42	0.83
$5\sigma_x$	16.43	0.21	85.40	1.04	16.23	0.21	85.40	1.05
$6\sigma_x$	16.42	0.25	85.37	1.25	16.15	0.26	85.37	1.27

程中  $5 + 6\sigma_{f_b} \leq e_{f_b} \leq 15 - 6\sigma_{f_b}$  的稳健性要求;  $d_b$  的均值都不能满足大于  $85\% + 6\sigma_{d_b}$  的稳健性要求。由表 5 可以看出, 在研究参数标准差为  $6\sigma_x$  时,  $f_p$  的均值小于稳健性要求的下边界  $15 + 6\sigma_{f_p}$ , 不满足工程中的稳健性要求;  $d_p$  的均值都不能满足大于  $85\% + 6\sigma_{d_p}$  的稳健性要求。无论是固有频率还是解耦率都存在不满足稳健性要求的情况, 因此需要进行 PMS 稳健性优化。

表 6 给出了 NAPCE 方法计算的相对误差, 其中  $d_b$  和  $d_p$  均值的相对误差可忽略不计, 因此不在表中给出。

表 6 NAPCE 方法计算的相对误差

Tab. 6 Relative errors calculated by NAPCE method

标准差	相对误差 / %					
	$e_{f_b}$	$\sigma_{f_b}$	$\sigma_{d_b}$	$e_{f_p}$	$\sigma_{f_p}$	$\sigma_{d_p}$
$\sigma_x$	0.71	1.37	2.04	0.71	1.33	2.27
$2\sigma_x$	0.24	0.90	0.89	0.24	0.79	1.41
$3\sigma_x$	0.24	0.41	0.21	0.24	0.24	0.54
$4\sigma_x$	0.72	0.10	1.27	0.72	0.31	0.34
$5\sigma_x$	1.20	0.61	2.30	1.20	0.87	1.25
$6\sigma_x$	1.68	1.14	3.31	1.68	1.44	2.18

由表 6 可以看出, 以 NMC 方法作为参考, 在计算响应固有特性的均值时, NAPCE 方法的最大相对误差为 1.68%; 在计算响应固有特性的标准差时, NAPCE 方法的最大相对误差为 3.31%。这表明 NAPCE 方法的计算精度较高。

在同一台计算机上, NMC 方法求解 PMS 固有特性响应耗时 118.20 s, 需要调用系统响应方程  $10^6$  次; 而 NAPCE 方法耗时 0.66 s, 仅需调用系统响应

方程  $2^9$  次 (即 512 次)。这表明 NAPCE 方法可以极大地降低系统响应方程的调用次数, 节约计算时间, 具有很高的计算效率。

综上可知, 提出的 NAPCE 方法能兼顾计算精度和效率, 适用于后续分析研究。根据 6Sigma 准则, 响应的边界区间可以表示为  $[e_{Y_i} - 6\sigma_{Y_i}, e_{Y_i} + 6\sigma_{Y_i}]$ 。响应的边界区间越小, 系统的稳健性越好。图 4 给出了 NMC 和 NAPCE 方法计算的 Bounce 和 Pitch 方向固有特性的响应边界。

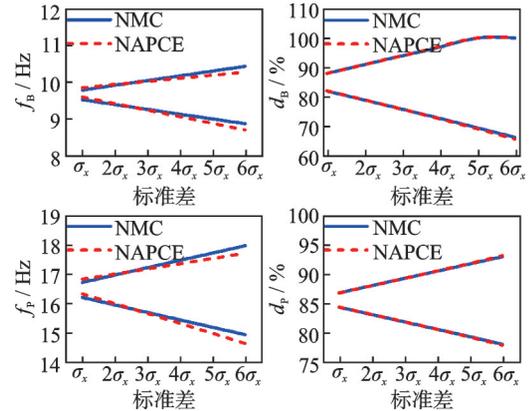


图 4 不同确定水平下 PMS 响应的边界

Fig. 4 The boundaries of PMS responses in different uncertainty levels

由图 4 可以看出, NAPCE 和 NMC 方法求得的 PMS 固有特性响应边界具有很好的重合度。此外, NAPCE 方法计算的最大相对误差为 1.93%, 表明在参数含相关性的不确定情形下, NAPCE 方法能很好地预测系统响应边界。

### 4.3 PMS 相关性分析

进一步探究不确定参数的相关性对 PMS 响应相关性的影响。令悬置刚度的相关系数分别为 0、0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7、0.8、0.9、0.9999, 标准差为  $6\sigma_x$ 。图 5 给出了 NMC 和 NAPCE 方法计算的  $f_b$ 、 $d_b$ 、 $f_p$  和  $d_p$  之间的相关系数。

由图 5 可以看出, NAPCE 方法求得各响应之间的相关系数曲线与 NMC 方法求得的参考曲线具有很好的重合度。其中  $f_p$  和  $d_p$  之间相关系数图像的重合度较差, 其最大相对误差为 1.73%。这表明 NAPCE 方法具有较高的计算精度。无论是在强相关还是弱相关的不确定情形下, NAPCE 方法都能很好地预测系统响应之间的相关性。

此外,  $f_p$  和  $d_b$ 、 $f_b$  和  $d_p$  之间的相关性为负, 其余响应之间的相关性均为正。当输入参数相关系数为 0 时, 响应之间仍然存在相关性, 这表明 PMS 响应的相关性受系统本身特性和系统参数相关性的共同影响。在输入参数相关系数为 0~0.9 的范围内时,  $f_b$

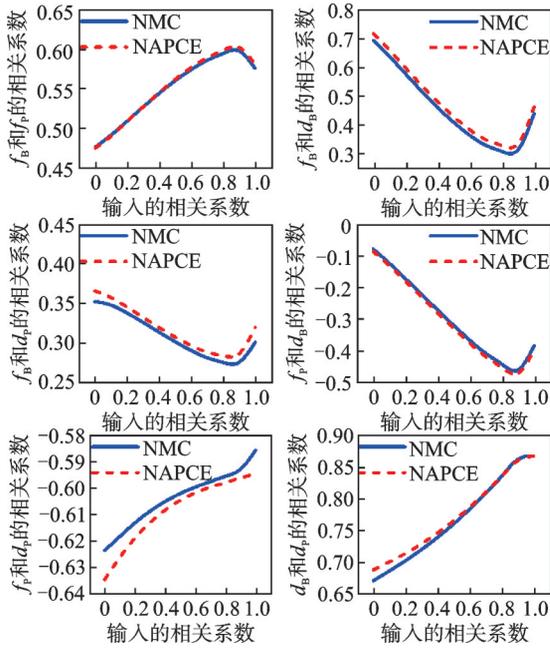


图 5 PMS 响应之间的相关系数

Fig. 5 Correlation coefficients between PMS responses

和 $f_p$ 之间的相关性、 $f_p$ 和 $d_b$ 之间的相关性以及 $d_b$ 和 $d_p$ 之间的相关性均随系统参数相关性的增加而增加。其余响应之间的相关性则随输入参数相关性的增加而降低。当输入参数相关系数超过0.9时,输入参数相关性的变化对 $d_b$ 和 $d_p$ 之间相关性的影响不再明显,但对 $f_p$ 和 $d_p$ 之间相关性的影响更为显著。

考虑悬置刚度的相关性对系统固有特性响应的边界区间可能存在影响,进一步探究输入参数的相关性对PMS固有特性边界区间的影响。图6给出了NMC和NAPCE方法求得的系统响应边界。

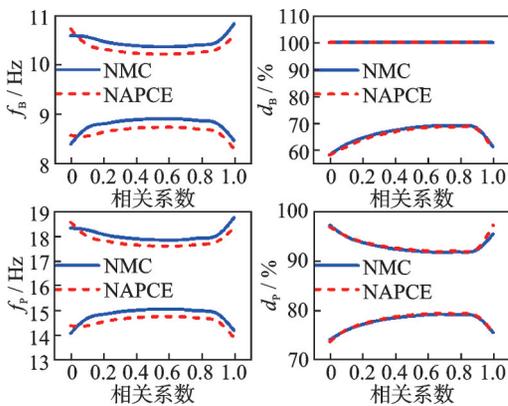


图 6 不同相关性水平下 PMS 响应的边界

Fig. 6 The boundaries of PMS responses in different correlation levels

由图6可看出,NAPCE和NMC方法求得的PMS固有特性响应边界具有很好的一致性。NAPCE方法的最大相对误差为2.26%,这表明在不确定参数含相关性的情形下,NAPCE方法能很好地预测系统响应边界。此外, $f_b$ 的边界范围都满足稳健性要求。 $f_p$ 、 $d_b$ 和 $d_p$ 的下边界均低于工程中

的最低要求,说明 $f_p$ 、 $d_b$ 和 $d_p$ 不满足稳健性要求。

#### 4.4 PMS 稳健性优化

实际工程中,测量得到刚度参数的相关系数在0.3~0.55之间。因此,令悬置刚度参数的相关系数为0.3。取表2中悬置刚度的均值作为优化变量的初始名义值,标准差为 $6\sigma_x$ ,优化变量取值范围为初始名义值的 $\pm 40\%$ 。 $d_b$ 和 $d_p$ 的主观权重都设置为0.5;考虑到 $d_b$ 和 $d_p$ 与其他响应之间的相关性,根据式(22)~(25)计算得到优化子目标的综合权重分别为0.51和0.49。

表7给出了PMS优化后各悬置刚度的名义值。表8给出了优化前/后 $f_b$ 、 $f_p$ 、 $d_b$ 和 $d_p$ 的均值和标准差。图7给出了优化前/后PMS响应的边界范围。

表 7 优化后的悬置刚度

Tab. 7 The mounting stiffness after optimization

悬置名称	$K_u/(N\cdot mm^{-1})$	$K_v/(N\cdot mm^{-1})$	$K_w/(N\cdot mm^{-1})$
悬置 1	60.34	75.98	189.67
悬置 2	141.25	125.77	106.64
悬置 3	79.89	80.07	150.13

表 8 优化前/后的均值和标准差

Tab. 8 The mean values and standard deviations before and after optimization

响应	优化前		优化后	
	均值	标准差	均值	标准差
$f_b/Hz$	9.63	0.13	10.80	0.16
$f_p/Hz$	16.42	0.25	16.75	0.26
$d_b/\%$	84.55	3.07	96.59	1.02
$d_p/\%$	85.38	1.23	91.61	1.01

由表8可知,优化前/后 $f_b$ 和 $f_p$ 的均值和标准差变化不大,优化后 $f_p$ 的均值满足稳健性要求。优化后 $d_b$ 和 $d_p$ 的均值由84.55%和85.38%分别提高至96.59%和91.61%,标准差由3.07%和1.23%分别降低至1.02%和1.01%。优化后解耦率均值相比优化前有了较大的提高,标准差有了明显的降低。这

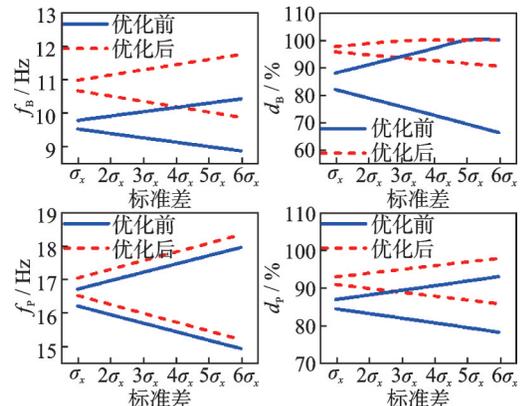


图 7 优化前/后 PMS 响应的边界

Fig. 7 The boundaries of PMS responses before and after optimization

说明系统参数不确定性对解耦率的影响显著降低。

由图 7 可知,优化前/后  $f_b$  边界均满足稳健性要求。相比优化前  $f_p$ 、 $d_b$  和  $d_p$  的下边界超出设计要求范围,优化后  $f_p$ 、 $d_b$  和  $d_p$  的下边界上移,满足稳健性要求。此外,  $d_b$  和  $d_p$  的边界范围相比优化前明显缩窄。分析表明,优化后各响应的边界范围均满足稳健性要求。

## 5 结 论

(1)在不确定性分析方面,PMS 各响应边界范围均随不确定参数标准差的增加而线性扩张;以 NMC 方法作为参考,NAPCE 方法计算电动汽车 PMS 响应均值、标准差以及边界范围时具有较高的计算精度和效率。

(2)在相关性分析方面,PMS 响应边界范围均随不确定参数相关性的增加呈现先缩窄(相关系数为 0~0.9)后扩张(相关系数为 0.9~0.9999)的现象;以 NMC 方法作为参考,NAPCE 方法能很好地描述响应相关性的变化曲线,且具有较高的计算效率。

(3)在稳健性优化方面,考虑参数不确定性和相关性的 PMS 稳健性优化方法能在提高解耦率响应均值的同时降低解耦率响应的标准差,从而降低刚度参数的不确定性和相关性对 PMS 响应的影响,提高系统稳健性。

### 参考文献:

- [1] XIN F L, QIAN L J, DU H P, et al. Multi-objective robust optimization design for powertrain mount system of electric vehicles[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2017, 36(3): 243-260.
- [2] WU J, LIU X D, SHAN Y C, et al. Robustness optimization of engine mounting system based on Six Sigma and torque roll axis decoupling method[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 2019, 233(4): 1047-1060.
- [3] LYU H, ZHENG Z B, HUANG X T, et al. A methodology for design optimization of powertrain mounting systems involving hybrid interval-random uncertainties [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63(3): 1265-1285.
- [4] LYU H, MAO H K, HUANG X T, et al. An effective approach for reliability-based robust design optimization of uncertain powertrain mounting systems involving imprecise information[J]. Engineering with Computers, 2022, 38(2): 1193-1214.
- [5] 吴杰,郝世武.汽车动力总成悬置系统固有特性的可靠性优化[J].汽车工程,2013,35(9):841-846.  
WU Jie, HAO Shiwu. Reliability optimization on the natural characteristics of vehicle powertrain mounting system[J]. Automotive Engineering, 2013, 35(9): 841-846.
- [6] 陈剑,刘策,杨志远,等.基于6Sigma方法的发动机

悬置系统稳健优化设计[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2017,40(11):1469-1473.

- CHEN Jian, LIU Ce, YANG Zhiyuan, et al. Robust optimization design of engine mounting system based on Six Sigma method[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2017, 40(11): 1469-1473.
- [7] HUI L, YANG K, HUANG X T, et al. Uncertainty and correlation propagation analysis of powertrain mounting systems based on multi-ellipsoid convex model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 173: 109058.
- [8] LIU X, WANG X Y, SUN L, et al. An efficient multi-objective optimization method for uncertain structures based on ellipsoidal convex model[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 59(6): 2189-2203.
- [9] JIANG C, ZHANG Q F, HAN X, et al. Multidimensional parallelepiped model—a new type of non-probabilistic convex model for structural uncertainty analysis [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015, 103(1): 31-59.
- [10] 吕辉,杨坤,尹辉,等.基于多维平行六面体模型的动力总成悬置系统固有特性分析[J].汽车工程,2020,42(4):498-504.  
LYU Hui, YANG Kun, YIN Hui, et al. Inherent characteristic analysis of powertrain mounting system based on multidimensional parallelepiped model[J]. Automotive Engineering, 2020, 42(4): 498-504.
- [11] 栾英林,崔华阁,贾旭东.纯电动乘用车动力总成悬置系统优化设计[J].重庆理工大学学报(自然科学),2020,34(6):90-96.  
LUAN Yinglin, CUI Huage, JIA Xudong. Optimum design of powertrain mounting system for pure electric passenger vehicle[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2020, 34(6): 90-96.
- [12] QIN B Y, FANG C, MA K, et al. Probabilistic energy flow calculation through the Nataf transformation and point estimation[J]. Applied Sciences, 2019, 9(16): 3291.
- [13] ZHAO Y S, WANG L X, WU H C, et al. Time-varying reliability method based on linearized Nataf transform[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2021, 37(5): 1922-1938.
- [14] ZHU W Q, HU Y B, CHEN N, et al. A fuzzy and random moment-based arbitrary polynomial chaos method for response analysis of composite structural-acoustic system with multi-scale uncertainties[J]. Applied Acoustics, 2021, 177: 107913.
- [15] 史冬梅,杨风暴,王肖霞.尾矿坝风险评估中指标相关性权重的确定[J].金属矿山,2014(11):143-146.  
SHI Dongmei, YANG Fengbao, WANG Xiaoxia. Determining of correlation weights of index in the tailing dam risk assessment[J]. Metal Mine, 2014(11): 143-146.

第一作者:吕 辉(1986—),男,博士,副教授。  
E-mail: melvhui@scut.edu.cn

通信作者:肖国权(1978—),男,博士,副教授。  
E-mail: megqxiao@scut.edu.cn