

# 新型惯质调谐质量阻尼器的安装方法对优化与性能的影响研究

何书勇<sup>1,2</sup>, 李寿英<sup>1,2</sup>, 李亚峰<sup>3</sup>, 罗帅<sup>1,2</sup>, 陈政清<sup>1,2</sup>

(1. 湖南大学土木工程学院, 湖南长沙 410082; 2. 湖南大学风工程与桥梁工程湖南省重点实验室, 湖南长沙 410082; 3. 广州大学工程抗震研究中心, 广东广州 510006)

**摘要:** 本文研究了新型惯质调谐质量阻尼器 (novel tuned mass damper inerter, NTMDI) 的安装方法对其优化设计与减振性能的影响。详细介绍了 NTMDI-R (反向安装的 NTMDI) 的力学模型, 并采用经典固定点理论对 NTMDI-R 进行了优化设计, 得到了 NTMDI-R 最优结构参数的解析式; 对比研究了 NTMDI-R 与现有四种经典调谐质量阻尼器 (TMD、TMDI、VTMD 和 NTMDI) 在简谐激励和随机激励下的减振效果, 并探究了安装方法对 NTMDI-R 减振性能的影响。结果表明: 正、反向安装两种减振器 (NTMDI 和 NTMDI-R) 优化参数不同, 安装方法对其减振性能有较大影响。当表观质量比  $\beta$  小于 0.1 时, NTMDI-R 的减振效果差于 NTMDI; 而  $\beta$  大于 0.1 时, NTMDI-R 的减振效果与 NTMDI 基本一致, 因此采用 NTMDI 进行结构减振应明确其安装方向。基础加速度和荷载力分别作用下, NTMDI-R 的减振效果相对于 NTMDI 分别降低了 3.9% 和 4.7%。

**关键词:** 振动控制; 调谐质量阻尼器; 惯质; 固定点理论; 安装方法; 优化设计

**中图分类号:** TU352.1; TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)02-0383-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.02.017

## Effect of installation method of novel tuned mass damper inerter on optimization and performance

HE Shuyong<sup>1,2</sup>, LI Shouying<sup>1,2</sup>, LI Yafeng<sup>3</sup>, LUO Shuai<sup>1,2</sup>, CHEN Zhengqing<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. Key Laboratory for Wind and Bridge Engineering of Hunan Province, Hunan University, Changsha 410082, China;

3. Earthquake Engineering Research and Test Center, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** This study investigates the influence of installation methods on the optimization design and vibration reduction performance of a novel tuned mass damper inerter (NTMDI). Firstly, the mechanical model of NTMDI-R (reverse-installed NTMDI) is introduced in detail, and its optimization design of NTMDI-R is performed using classical fixed-point theory, resulting in analytical expressions for the optimal structural parameters of NTMDI-R. Subsequently, a comparative study is conducted to analyze the vibration reduction effects of NTMDI-R and four existing classical tuned mass dampers (TMD, TMDI, VTMD, and NTMDI) under harmonic and random excitations, while also investigating the influence of installation methods on the vibration reduction performance of NTMDI-R. The results demonstrate that the optimized parameters of the two dampers (NTMDI and NTMDI-R) differ, and the installation method has a significant impact on their vibration reduction performance. When the apparent mass ratio  $\beta$  is less than 0.1, NTMDI-R exhibits a lower vibration reduction effect compared to NTMDI. However, when  $\beta$  exceeds 0.1, the vibration reduction effect of NTMDI-R becomes similar to that of NTMDI. Therefore, when adopting NTMDI for structural vibration reduction, the installation direction should be specified. Under base acceleration and load force conditions, the vibration reduction effect of NTMDI-R is reduced by 3.9% and 4.7%, respectively, compared to NTMDI.

**Keywords:** vibration suppression; tuned mass damper; inerter; fixed-point theory; installation method; optimal design

调谐质量阻尼器 (tuned mass damper, TMD) 是安装在运动主系统上用于减小非期望振动的辅助质量系统, 因其设计简单、可靠性高而被广泛应用于土

木和机械工程领域<sup>[1-4]</sup>。为了使 TMD 达到最优的减振性能, 需对 TMD 进行优化设计。OMIONDI-UYD 等<sup>[5]</sup>提出的固定点理论为 TMD 的优化设计提

收稿日期: 2023-07-03; 修订日期: 2023-09-11

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (52378508); 广东省基础与应用基础研究基金资助项目 (2022A1515110709)

供了方法,之后,该方法在结构的优化设计过程中被广泛应用<sup>[6-8]</sup>。

惯容具有质量放大效应,其概念最早由 SMITH<sup>[9]</sup>提出。与物理质量不同,惯容是一种两节点单元,可由两节点间的作用力与其相对加速度的比值求得。在数值上,可比其自身物理质量大两个数量级。实际应用中可通过齿轮齿条<sup>[10]</sup>、滚珠丝杠<sup>[11]</sup>、液压形式<sup>[12]</sup>和流体形式<sup>[13]</sup>等来实现惯容。在“惯容”的概念被提出之前,ARAKAKI等<sup>[14]</sup>已经开始在土木工程领域中利用滚珠丝杠机构进行耗能增效,但当时在土木工程领域中并未对惯容进行系统地研究,而是在机械领域中得到了系统性的发展<sup>[15]</sup>。

为了改善 TMD 的减振性能,REN<sup>[16]</sup>将 TMD 中的阻尼单元与大地连接,提出了变化调谐质量阻尼器(variant tuned mass damper, VTMD),结果表明:VTMD 对应的主结构频响曲线同样满足固定点理论,并基于此理论推导了最优结构参数表达式。但相较 TMD 而言,VTMD 的减振效果并未有显著的提升。为了提高减振器的性能,国内外研究人员借鉴惯容在汽车和机械领域中的应用,将具有质量放大机制的惯容引入到土木工程领域中,提出了多种形式的惯容减振(震)系统<sup>[17]</sup>。SAITO等<sup>[18]</sup>将惯容引入旋转黏滞阻尼器,提出了土木工程领域首个具有完整意义的惯容减振(震)系统,即调谐黏滞质量阻尼器(tuned viscous mass damper, TVMD)。

如图 1 所示,MARIAN等<sup>[19-20]</sup>将 TMD 的质量与大地通过惯质连接,提出了惯质调谐质量阻尼器(tuned mass damper inerter, TMDI),并采用  $H_1$  和  $H_2$  方法对 TMDI 进行参数优化;PIETROSANTI等<sup>[21]</sup>采用三种不同的优化目标(位移最小化、加速度最小化和阻尼装置耗散能量与主结构总输入能量之比最大化)对 TMDI 进行优化设计,并与 TMD 进行对比分析。结果表明:TMDI 比经典 TMD 具有更好的减振效果和鲁棒性;ZHANG等<sup>[22]</sup>和 GIARALLIS等<sup>[23]</sup>分别利用 TMDI 对风力机叶片和高层建筑

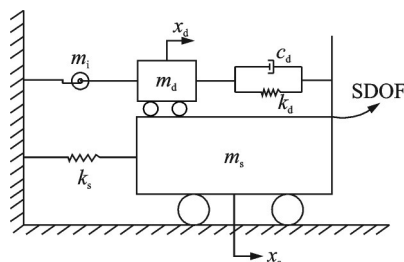


图 1 附加 TMDI 的无阻尼单自由度主结构模型

Fig. 1 Undamped single-degree-of-freedom primary structure model with TMDI

风致振动控制进行了研究,并与 TMD 进行对比,研究结果同样表明 TMDI 比 TMD 具有更好的减振效果。为了提高阻尼器的频带宽度,CAO等<sup>[24]</sup>将两个惯质调谐质量阻尼器(TMDI)的质量单元通过阻尼单元连接,提出了串联惯质调谐质量阻尼器(tuned tandem mass dampers-inerters, TTMDI),并基于单自由度结构-TTMDI 系统对 TTMDI 的减振性能进行评价,发现 TTMDI 在控制效率和控制频带范围方面优于 TMDI。之后,CAO等<sup>[25]</sup>基于多重调谐质量阻尼器(MTMD)可拓宽有效频带的原理,设计了多重惯质调谐质量阻尼器(MTMDI),研究发现,MTMDI 在控制效果、调谐质量冲程和鲁棒性方面均优于 MTMD。

LI等<sup>[26]</sup>将 TMDI 中的阻尼单元调整为与惯质并联,然后再与大地和调谐质量串联,提出了新型惯质调谐质量阻尼器(novel tuned mass damper inerter, NTMDI),如图 2 所示,并进行了参数优化分析,结果表明,NTMDI 比 TMDI 有更好的减振效果。然而,目前还没有关于 NTMDI 的安装方法对其优化设计与性能影响的研究。本文将 NTMDI 与主结构和大地之间的安装方向调换引入了反向安装的 NTMDI-R(即 NTMDI-R)。建立了附加 NTMDI-R 的 SDOF 无阻尼主结构的力学模型,并基于固定点理论对 NTMDI-R 进行谐波激励下的优化设计,得到其优化结构参数解析式;通过与现有四类经典的减振系统(TMD、VTMD、TMDI 和 NTMDI)进行比较,评估了 NTMDI-R 在简谐激励和随机激励下的振动控制效果。

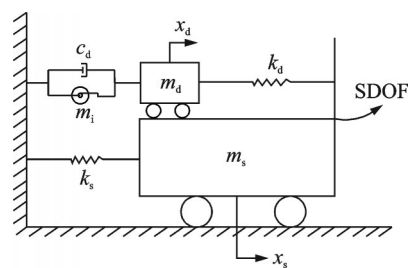


图 2 附加 NTMDI 的无阻尼单自由度主结构模型

Fig. 2 Undamped single-degree-of-freedom primary structure model with NTMDI

## 1 NTMDI-R 的理论模型

图 3 分别为荷载力和基础加速度激励下附加 NTMDI-R 的单自由度无阻尼主结构模型。其中,  $m_s$  和  $k_s$  分别为主结构的质量和刚度系数;  $m_i$ 、 $m_d$ 、 $k_d$  和  $c_d$  分别为 NTMDI-R 的表观质量、物理质量、刚度系数和阻尼系数。  $m_s$  和  $m_d$  均具有水平方向的自由度,可分别由相对大地的水平向位移  $x_s$  和  $x_d$  表示。  $f$  和

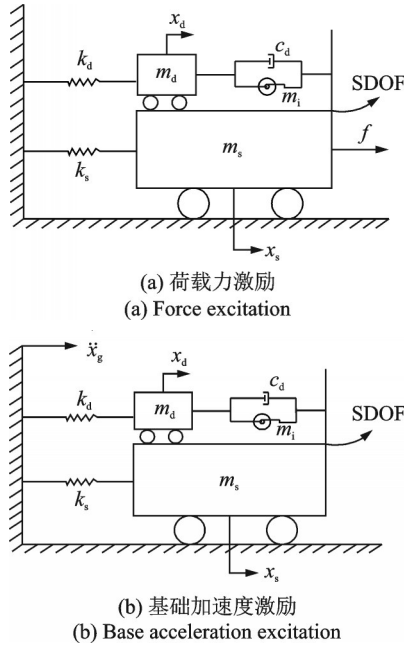


图3 附加NTMDI-R的无阻尼单自由度主结构模型

Fig.3 Undamped single-degree-of-freedom primary structure model with NTMDI-R

$\ddot{x}_g$  分别为荷载力和基础加速度。由 D'Alembert 原理可得附加 NTMDI-R 系统的主结构运动微分方程如下式所示:

$$\begin{bmatrix} m_s + m_i & -m_i \\ -m_i & m_d + m_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中,

$$\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_s \ddot{x}_g \\ m_d \ddot{x}_g \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中,  $[f \ 0]^T$  对应图 3(a) 中的力激励;  $-\begin{bmatrix} m_s \ddot{x}_g & m_d \ddot{x}_g \end{bmatrix}^T$  对应图 3(b) 所示的基础加速度激励。

以加速度激励为例进行 NTMDI-R 的最优结构参数与主结构响应的详细推导。

假设图 3(b) 中的基础加速度  $\ddot{x}_g$  为简谐荷载, 有如下形式:

$$\ddot{x}_g = \ddot{X}_g e^{i\omega t} \quad (3)$$

式中,  $\omega$  为外激励的圆频率。

将式(3)代入方程(1)和(2)中, 可得到:

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta & -\beta \\ -\beta & \mu + \beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_d \omega_d (\mu + \beta) & -2\xi_d \omega_d (\mu + \beta) \\ -2\xi_d \omega_d (\mu + \beta) & 2\xi_d \omega_d (\mu + \beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_s^2 & 0 \\ 0 & \omega_d^2 (\mu + \beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{x}_g \\ -\mu \ddot{x}_g \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,

$$\mu = \frac{m_d}{m_s}, \beta = \frac{m_i}{m_s}, \omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}, \omega_d = \sqrt{\frac{k_d}{m_d + m_i}}, \xi_d = \frac{c_d}{2(m_d + m_i)\omega_d} \quad (5)$$

式中,  $\mu$  为调谐质量比, 即  $m_d$  与  $m_s$  的比值;  $\beta$  为惯容比, 也称表观质量比, 即  $m_i$  与  $m_s$  的比值;  $\omega_s$  和  $\omega_d$  分别为主结构和 NTMDI-R 的固有频率;  $\xi_d$  为 NTMDI-R 的阻尼比。

设方程(4)中解的形式如下式所示:

$$x_s = X_s e^{i\omega t}, x_d = X_d e^{i\omega t} \quad (6)$$

将式(6)代入方程(4)中, 可得主结构响应幅值  $X_s$ :

$$X_s = \ddot{X}_g \frac{r_s + it_s}{r_m + it_m} \quad (7)$$

式中,

$$r_s = -\beta\mu\omega^2 - (\omega^2 - \omega_d^2)(\mu + \beta),$$

$$t_s = 2\omega\omega_d\xi_d(\mu + \beta)(\mu + 1),$$

$$r_m = -(\mu + \beta + \beta\mu)\omega^4 + [(\mu + \beta)\omega_s^2 + (\mu + \beta + \beta^2 + \beta\mu)\omega_d^2]\omega^2 - (\mu + \beta)\omega_s^2\omega_d^2,$$

$$t_m = -2\omega\omega_d\xi_d(\mu + \beta)(\beta\omega_d^2 - \mu\omega^2 + \mu\omega_d^2 - \omega^2 + 1) \quad (8)$$

引入如下参数:

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_s}, \lambda_d = \frac{\omega_d}{\omega_s}, x_{st} = \frac{-m_s \ddot{X}_g}{k_s} \quad (9)$$

式中,  $\lambda$  为激励频率比, 即  $\omega$  与  $\omega_s$  的比值;  $\lambda_d$  为调谐频率比, 即  $\omega_d$  与  $\omega_s$  的比值;  $x_{st}$  为外激励幅值在主结构上产生的静位移。

则 NTMDI-R 对应的主结构动力放大系数为:

$$D_s(\mu, \beta, \lambda_d, \xi_d, \lambda) = \sqrt{\frac{R_s^2 + \xi_d^2 T_s^2}{R_m^2 + \xi_d^2 T_m^2}} \quad (10)$$

式中,

$$R_s = (\lambda^2 - \lambda_d^2)(\mu + \beta) + \beta\mu\lambda^2,$$

$$T_s = -2\lambda\lambda_d(\mu + \beta)(\mu + 1),$$

$$R_m = \beta^2\lambda^4 - (\mu + \beta)(\lambda^2 - \lambda_d^2)(\beta\lambda^2 + \lambda^2 - 1),$$

$$T_m = -2\lambda\lambda_d(\mu + \beta)[(\beta + \mu)\lambda_d^2 - (\mu + 1)\lambda^2 + 1] \quad (11)$$

## 2 NTMDI-R 的结构参数优化

式(10)和(11)是以 5 个结构参数  $\mu$ 、 $\beta$ 、 $\lambda$ 、 $\lambda_d$  和  $\xi_d$  为变量的函数方程, 其中质量比  $\mu$  和  $\beta$  需根据结构的特点、减振目标等因素确定;  $\lambda$  为外激励频率比, 是人为确定的, 为已知条件; 在  $\mu$ 、 $\beta$  和  $\lambda$  三个参数已知的前提下, 对调谐频率比  $\lambda_d$  和调谐阻尼比  $\xi_d$  进行优化设计。图 4 分别给出了六种调谐阻尼比  $\xi_d$  (0、5%、10%、20%、50% 和  $\infty$ ) 情况下主结构的频率响

应曲线。其中,  $\mu=0.01$ 、 $\beta=0.1$  和  $\lambda_d=1.0$ 。从图4中可以发现, 附加 NTMDI-R 的主结构频率响应曲线均经过与阻尼比无关的两个固定点 P 和 Q, 这一现象与 NTMDI 一致<sup>[26]</sup>。

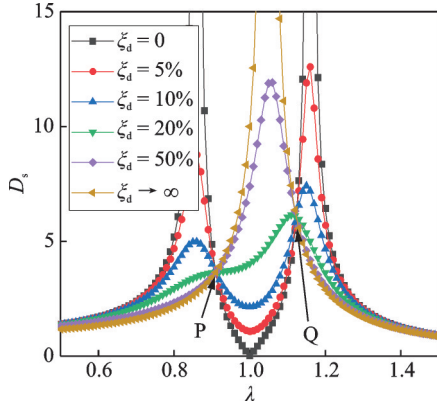


图4 不同阻尼比下, 主结构动力放大系数随频率比的变化曲线

Fig. 4 Variation curves of the dynamic amplification factor of the primary structure with frequency ratio under different damping ratios

根据固定点理论, 为了获得最优结构参数, 必须使主结构的最大响应值最小, 即两固定点处的纵坐标相等, 需要  $D_s$  在  $\xi_d=0$  和  $\xi_d \rightarrow \infty$  时的值相等, 即  $R_s^2/R_m^2 = T_s^2/T_m^2$ , 则有:

$$\frac{(\lambda^2 - \lambda_d^2)(\mu + \beta) + \beta\mu\lambda^2}{\beta^2\lambda^4 - (\mu + \beta)(\lambda^2 - \lambda_d^2)(\beta\lambda^2 + \lambda^2 - 1)} = \pm \frac{\mu + 1}{\beta\lambda_d^2 - \mu\lambda^2 + \mu\lambda_d^2 - \lambda^2 + 1} \quad (12)$$

公式(12)可转化为:

$$\lambda^4 - \frac{\lambda_d^2(2\beta + 3\mu + 2\beta\mu + 2)(\mu + \beta)}{2(\mu + 1)(\beta + \mu + \beta\mu)}\lambda^2 - \frac{2\beta\mu + 2\beta + \mu^2 + 2\mu}{2(\mu + 1)(\beta + \mu + \beta\mu)}\lambda^2 + \frac{(\mu + \beta)^2\lambda_d^4 + (2\beta + 2\mu + \beta\mu + \mu^2)\lambda_d^2}{2(\mu + 1)(\beta + \mu + \beta\mu)} = 0 \quad (13)$$

上述方程的两个根对应图4中两个固定点的横坐标, 由韦达定理可得到下式:

$$\lambda_P^2 + \lambda_Q^2 = \frac{\lambda_d^2(2\beta + 3\mu + 2\beta\mu + 2)(\mu + \beta)}{2(\mu + 1)(\beta + \mu + \beta\mu)} + \frac{2\beta\mu + 2\beta + \mu^2 + 2\mu}{2(\mu + 1)(\beta + \mu + \beta\mu)} \quad (14)$$

当  $\xi_d$  趋于无穷大时, 式(10)可转化为:

$$D_s = \left| \frac{T_s}{T_m} \right| = \left| \frac{\mu + 1}{(\beta + \mu)\lambda_d^2 - (\mu + 1)\lambda^2 + 1} \right| \quad (15)$$

根据固定点理论, 在最优结构参数下两固定点

处的响应值相等。将两个固定点的横坐标  $\lambda_P$  和  $\lambda_Q$  代入式(15)可得:

$$\frac{1}{(\beta + \mu)\lambda_d^2 - (\mu + 1)\lambda_P^2 + 1} = \frac{1}{(\beta + \mu)\lambda_d^2 - (\mu + 1)\lambda_Q^2 + 1} \quad (16)$$

式(16)可简化为:

$$\lambda_P^2 + \lambda_Q^2 = \frac{2(\beta + \mu)\lambda_d^2 + 2}{\mu + 1} \quad (17)$$

将式(14)和(17)联立, 即可得到 NTMDI-R 的最优频率比  $\lambda_{\text{dopt}}$ :

$$\lambda_{\text{dopt}} = \sqrt{\frac{2\beta + 2\mu + 2\beta\mu - \mu^2}{-(2\beta + \mu + 2\beta\mu - 2)(\beta + \mu)}} \quad (18)$$

将最优频率比  $\lambda_{\text{dopt}}$  代入方程(13)可得 P 和 Q 两点的横坐标为:

$$\begin{cases} \lambda_P^2 = \frac{(2 - \mu)\sqrt{\beta + \mu + \beta\mu} + \sqrt{2}\beta(\mu + 1)}{(2 - 2\beta - \mu - 2\beta\mu)\sqrt{\beta + \mu + \beta\mu}} \\ \lambda_Q^2 = \frac{(2 - \mu)\sqrt{\beta + \mu + \beta\mu} - \sqrt{2}\beta(\mu + 1)}{(2 - 2\beta - \mu - 2\beta\mu)\sqrt{\beta + \mu + \beta\mu}} \end{cases} \quad (19)$$

将式(18)和(19)代入式(15), 可得两固定点处的响应值, 即最优频率比对应的最优响应值为:

$$D_{\text{sopt}} = \frac{(2 - 2\beta - \mu - 2\beta\mu)\sqrt{\beta + \mu + \beta\mu}}{\sqrt{2}\beta(\mu + 1)} \quad (20)$$

根据式(18)得到的最优频率比  $\lambda_{\text{dopt}}$  可以满足图4中两个固定点 P 和 Q 处的响应幅值相等。由图4可知, 附加 NTMDI-R 的主结构频响曲线与阻尼比无关, 均会经过 P 和 Q 两个固定点, 因此必须使附加 NTMDI-R 的主结构频响曲线在 P 和 Q 两点取得最大值。根据极值条件, P 和 Q 两点成为极值点需满足:

$$\frac{\partial D_s}{\partial \lambda} = 0 \quad (21)$$

同时:

$$\frac{\partial D_s}{\partial \lambda} = \frac{\partial D_s^2}{\partial \lambda^2} \frac{\lambda}{D_s} \quad (22)$$

$D_s$  和  $\lambda$  均大于 0, 因此:

$$\frac{\partial D_s^2}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (23)$$

将式(10)简化为:

$$D_s^2 = \frac{R_s^2 + \xi_d^2 T_s^2}{R_m^2 + \xi_d^2 T_m^2} = \frac{n}{m} \quad (24)$$

将式(24)代入式(23)得到:

$$\frac{\partial D_s^2}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left( \frac{n}{m} \right) = \frac{n'm - nm'}{m^2} = 0 \quad (25)$$

式中,



$$n' = \frac{\partial n}{\partial \lambda^2} = 2[(\mu + \beta)(\lambda^2 - \lambda_d^2) + \lambda^2 \beta \mu](\mu + \beta + \beta \mu) + 4\lambda_d^2 \xi_d^2 (\mu + \beta)^2 (\mu + 1)^2, m' = \frac{\partial m}{\partial \lambda^2} = 4\lambda_d^2 \xi_d^2 (\mu + \beta)^2 (\beta \lambda_d^2 - \lambda^2 \mu - \lambda^2 + \lambda_d^2 \mu + 1)^2 \cdot [(\beta \lambda_d^2 - \lambda^2 \mu - \lambda^2 + \lambda_d^2 \mu + 1) - 2\lambda^2 (\mu + 1)] - 2\{(\mu + \beta)\lambda_d^2 - \lambda^2 (\mu + \beta)\}[(\beta + 1)\lambda_d^2 + 1] + \lambda^4 (\mu + \beta + \beta \mu) \cdot \{(\mu + \beta)[(\beta + 1)\lambda_d^2 + 1] - 2\lambda^2 (\mu + \beta + \beta \mu)\} \quad (26)$$

式(25)可化为:

$$n'm - nm' = 0 \quad (27)$$

$$\xi_{dopt} = \sqrt{\frac{\xi_{dp}^2 + \xi_{dq}^2}{2}} = \left\{ \frac{\beta^2 (\mu - 6) (\beta + \mu + \beta \mu)}{4(2\beta + 2\mu + 2\beta\mu - \mu^2) [\beta^2 (\mu + 1) + \beta (\mu^2 + 2\mu - 2) + \mu^2 - 2\mu]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

在荷载力激励下附加 NTMDI-R 减振系统的主结构频响曲线也满足固定点理论。同理,根据上述式(1)~(30)的推导,同样可以得到在荷载力激励下 NTMDI-R 的最优频率比、最优阻尼比以及最优主结构动力放大系数如下式所示:

$$\lambda_{dopt} = \sqrt{\frac{\beta + \mu + \beta \mu}{(\beta + \mu)(1 - \beta - \beta \mu)}} \quad (31)$$

$$\xi_{dopt} = \sqrt{\frac{\beta^2 (2\mu + 3)}{4[\beta^2 (\mu + 1) + \beta (\mu^2 - 2) - \mu^2 - 2\mu]}} \quad (32)$$

$$D_{sopt} = \frac{(1 - \beta - \beta \mu) \sqrt{2\beta + 2\mu + 2\mu\beta + \mu^2}}{\beta (\mu + 1)^2} \quad (33)$$

图 5 和 6 分别为基础加速度和荷载力激励下, NTMDI-R 对应的结构优化参数(最优频率比、最优阻尼比和最优主结构动力放大系数)随调谐质量比  $\mu$  和表观质量比  $\beta$  的变化规律。从图 5 和 6 中可以发现,两种激励作用下 NTMDI-R 的最优频率比  $\lambda_{dopt}$  均随着调谐质量比  $\mu$  和表观质量比  $\beta$  的增加而不断增加;在两种激励形式作用下,最优阻尼比  $\xi_{dopt}$  均随着表观质量比  $\beta$  的增加而增加,但随着调谐质量比  $\mu$

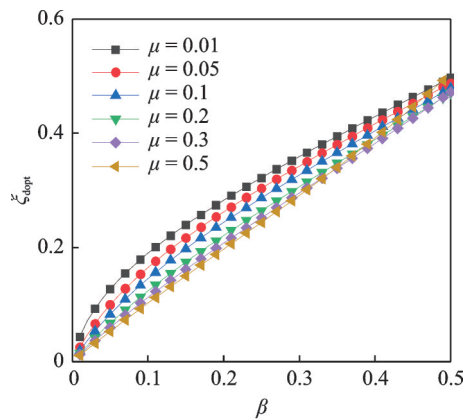
在最优频率比  $\lambda_{dopt}$  条件下, P、Q 两点满足:

$$\frac{n}{m} = \frac{(\mu + 1)^2}{[(\beta + \mu)\lambda_{dopt}^2 - (\mu + 1)\lambda^2 + 1]^2} \quad (28)$$

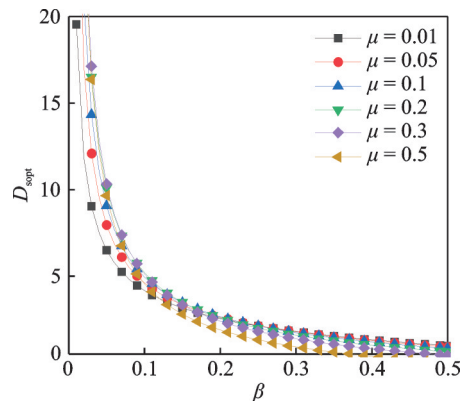
将式(27)代入式(28)中得到:

$$n[(\beta + \mu)\lambda_{dopt}^2 - (\mu + 1)\lambda^2 + 1]^2 - m'(\mu + 1)^2 = 0 \quad (29)$$

将  $\lambda_{dopt}$ 、 $\lambda_p^2$  和  $\lambda_q^2$  代入式(29),即可得到两个固定点处阻尼比的平方  $\xi_{dp}^2$  和  $\xi_{dq}^2$ 。需要强调的是,无论如何选择阻尼,均不可能使结构的振幅比在 P 和 Q 两点同时取得最大值。因此,取  $\xi_{dp}^2$  和  $\xi_{dq}^2$  的平均值作为最优阻尼比  $\xi_{dopt}$ ,即:



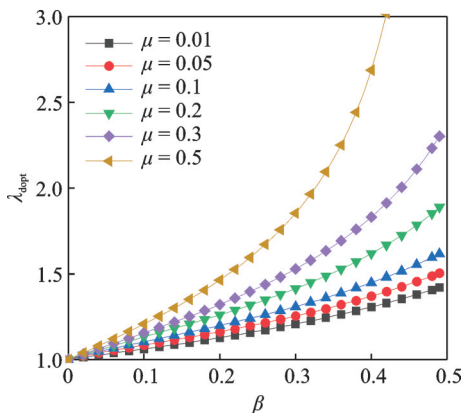
(b) 最优阻尼比  $\xi_{dopt}$   
(b) Optimum damping ratio  $\xi_{dopt}$



(c) 最优动力放大系数  $D_{sopt}$   
(c) Optimum dynamic amplification factor  $D_{sopt}$

图 5 基础加速度激励下, NTMDI-R 的结构优化参数

Fig. 5 Structural optimization parameters of NTMDI-R under base acceleration excitation



(a) 最优频率比  $\lambda_{dopt}$   
(a) Optimum frequency ratio  $\lambda_{dopt}$

的变化却不一致。在加速度激励下,当  $\beta$  小于 0.35 时,  $\xi_{dopt}$  随着  $\mu$  的增加不断减小;当  $\beta$  大于 0.35 时,  $\xi_{dopt}$  随着  $\mu$  的增加呈先增加后减小的趋势。而在荷载力激励下,最优阻尼比  $\xi_{dopt}$  随着质量比  $\mu$  的增加呈不断减小的趋势。在两种荷载形式作用下,最优主结构动力放大系数  $D_{sopt}$  均随着  $\beta$  的增加而不断减小;而  $\beta$

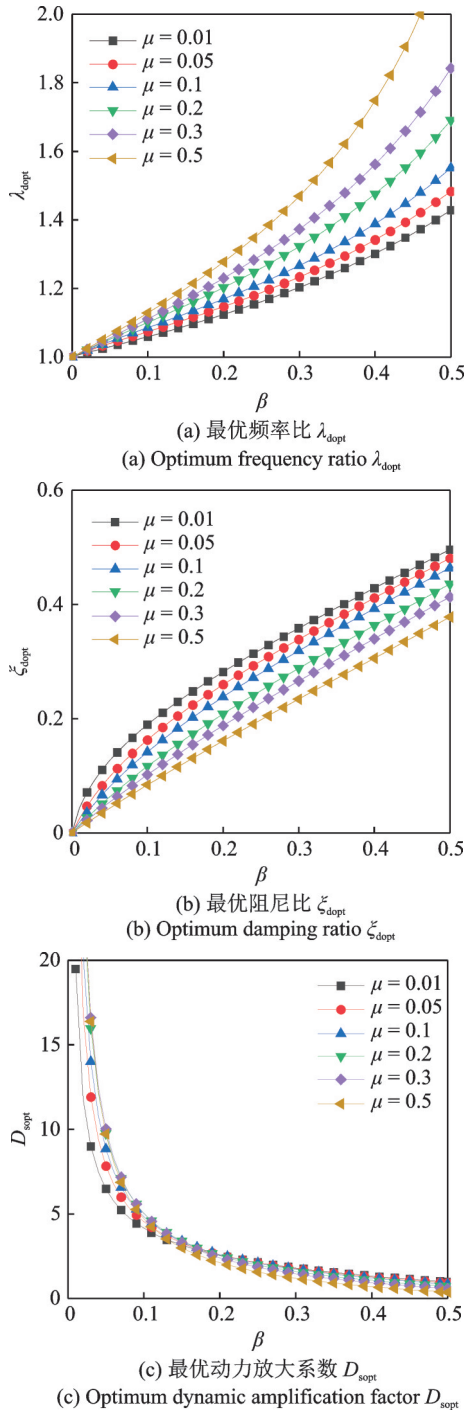


图6 荷载力激励下, NTMDI-R对应的结构优化参数  
Fig.6 Structural optimization parameters of NTMDI-R under load force excitation

小于0.1时,  $D_{sopt}$  随着  $\mu$  的增加而增加; 当  $\beta$  大于0.1时,  $D_{sopt}$  随着  $\mu$  的增加而减小。

与文献 [26] 中的 NTMDI 相比, 上述 NTMDI-R 的最优结构参数的变化趋势, 除最优频率比  $\lambda_{dopt}$  与 NTMDI 的变化趋势一致外, 最优阻尼比  $\zeta_{dopt}$  和最优动力放大系数  $D_{sopt}$  的变化趋势均与 NTMDI 不同。并且在基础加速度作用下, NTMDI-R 的最优结构参数  $\lambda_{dopt}$  和  $\zeta_{dopt}$  均大于荷载力作用下的最优结构参数  $\lambda_{dopt}$  和  $\zeta_{dopt}$ , 而最优动力放

大系数  $D_{sopt}$  则相反, 这一现象正好与 NTMDI 的结果相反。这些现象证明阻尼器的安装方法对其性能有很大影响。

### 3 简谐激励下主结构响应比较

经过文献 [16, 20, 26-29] 调查, 在表1中分别汇总了荷载力和基础加速度激励下, 四种经典调谐质量阻尼器 (TMD、VTMD、TMDI 和 NTMDI) 的最优参数表达式。并与本文中 NTMDI-R 对应的优化参数表达式 ( $\lambda_{dopt}$ 、 $\zeta_{dopt}$  和  $D_{sopt}$ ) 进行对比。

图7和8分别给出了  $\mu=0.01$  时, 在两种荷载作用下, 附加最优结构参数的5种调谐质量阻尼器 (TMD、TMDI、VTMD、NTMDI 和 NTMDI-R) 的最优主结构动力放大系数  $D_{sopt}$  随表观质量比  $\beta$  的变化图。从图7和8中可以看出, 在相同的表观质量比  $\beta$  下, NTMDI 比 TMD、TMDI 和 VTMD 具有更好的减振效果。并且随着表观质量比  $\beta$  的增加, 其减振效果提高得越多。而 NTMDI-R 在表观质量较小时, 其减振效果差于 TMD、TMDI 和 VTMD。因

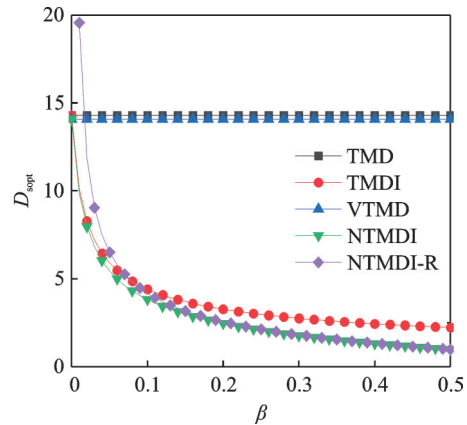


图7 基础加速度激励下, 五种减振系统比较  
Fig.7 Comparison of five types of vibration damping systems under base acceleration excitation

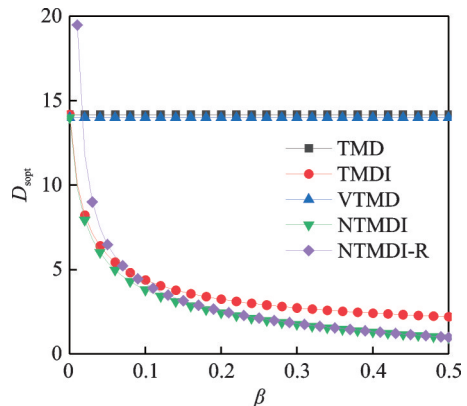


图8 荷载力激励下, 五种减振系统比较  
Fig.8 Comparison of five types of vibration damping systems under load force excitation

表 1 四种经典调谐质量阻尼器的最优参数表达式

Tab. 1 Optimal parameter expressions for four types of classical tuned mass dampers

外激励类型/阻尼器类型	最优频率比 $\lambda_{dopt}$	最优阻尼比 $\xi_{dopt}$	最优动力放大系数 $D_{sopt}$
荷载力/TMD <sup>[27-28]</sup>	$\frac{1}{1+\mu}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}$	$\sqrt{\frac{\mu+2}{\mu}}$
基础加速度/TMD <sup>[29]</sup>	$\sqrt{\frac{2-\mu}{2(1+\mu)^2}}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{4(1+\mu)(2-\mu)}}$	$\sqrt{\frac{2(1+\mu)^2}{\mu}}$
荷载力/VTMD <sup>[16]</sup>	$\sqrt{\frac{1}{1-\mu}}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8-4\mu}}$	$\sqrt{\frac{2(1-\mu)^2}{\mu}}$
基础加速度/VTMD <sup>[26]</sup>	$\sqrt{\frac{2}{2-\mu}}$	$\sqrt{\frac{-\mu^3+8\mu^2+12\mu}{8(\mu^2+2\mu+4)}}$	$\sqrt{\frac{(2-\mu)^2}{2\mu}}$
荷载力/TMDI <sup>[20]</sup>	$\frac{1}{1+\mu+\beta}$	$\sqrt{\frac{3(\mu+\beta)}{8(1+\mu+\beta)}}$	$\sqrt{\frac{\mu+\beta+2}{\mu+\beta}}$
基础加速度/TMDI <sup>[20]</sup>	$\sqrt{\frac{(1+\mu)(2-\mu)-\mu\beta}{2(1+\mu)(1+\mu+\beta)^2}}$	$\sqrt{\frac{\mu\beta^2+6\mu(1+\mu)^2+\beta(1+\mu)(6+7\mu)}{8(1+\mu)(1+\mu+\beta)[2+\mu(1-\mu-\beta)]}}$	$\sqrt{\frac{(1+\mu)(2\mu+\beta+2)}{\mu+\beta}}$
荷载力/NTMDI <sup>[26]</sup>	$\sqrt{\frac{1}{1-\mu-\beta}}$	$\sqrt{\frac{3(\mu+\beta)}{8-4(\mu+\beta)}}$	$\sqrt{\frac{2(1-\mu-\beta)^2}{\mu+\beta}}$
基础加速度/NTMDI <sup>[26]</sup>	$\sqrt{\frac{2}{2-\mu-2\beta}}$	$\sqrt{\frac{-\mu^3+8\mu^2+10\mu\beta+12(\mu+\beta)}{8(\mu^2+2\mu-2\beta+4)}}$	$\sqrt{\frac{(2-\mu-2\beta)^2}{2(\mu+\beta)}}$

此,并非在经典的 TMD 和 VTMD 中添加表观质量就可以提高其减振性能,还需要考虑阻尼器安装方法的影响。当  $\beta$  小于 0.1 时,NTMDI-R 的减振效果差于 NTMDI;而  $\beta$  大于 0.1 时,NTMDI-R 的减振效果与 NTMDI 基本一致。当  $\beta$  等于 0 时(即反向布置的 VTMD),可以看出反向布置的 VTMD 的减振效果差于 VTMD,这再次说明阻尼装置的安装方法对其减振效果有影响。

图 9 和 10 分别给出了  $\mu=0.01$ 、 $\beta=0.2$  时,在两种激励作用下,附加最优结构参数的 5 种调谐质量

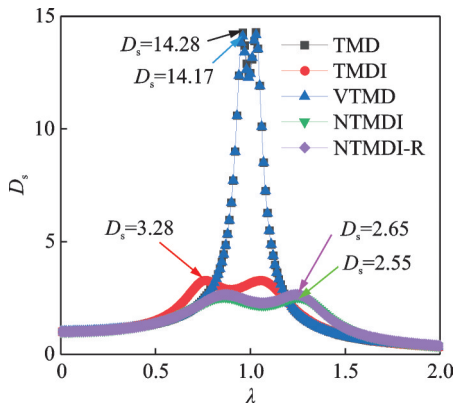


图 9 基础加速度激励下,主结构的频响曲线  
Fig. 9 Frequency response curve of the primary structure under base acceleration excitation

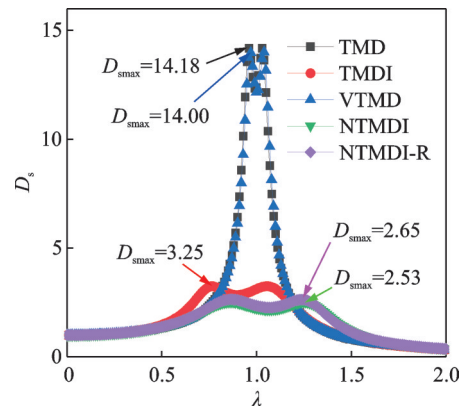


图 10 荷载力激励下,主结构频响曲线  
Fig. 10 Frequency response curve of the primary structure under load force excitation

阻尼器 (TMD、TMDI、VTMD、NTMDI 和 NTMDI-R) 的主结构频响曲线对比图。其中,定义了减振率  $\alpha_i$  来评价 NTMDI-R 与其他 4 种调谐质量阻尼器的减振效果:

$$\alpha_i = \frac{\max(D_{s,i}) - \max(D_{s,NTMDI-R})}{\max(D_{s,i})}$$

$$i = \text{TMD, TMDI, VTMD, NTMDI} \quad (34)$$

将两种荷载作用下的减振率汇总在表 2。从图 9 和 10 可以看出:与 TMD、TMDI 和 VTMD 相比,NTMDI-R 在两种荷载作用下的减振效果均有

较明显提升。而与 NTMDI 相比, NTMDI-R 在基础加速度和荷载力作用下的减振效果则分别降低了 3.9% 和 4.7%, 说明荷载激励方式也会对 NTMDI-R 和 NTMDI 的减振效果产生影响。

表 2 NTMDI-R 与 4 种调谐质量阻尼器的减振率比较  
Tab. 2 Comparison of damping rates between NTMDI-R and four-tuned mass dampers

阻尼器种类	减振率/%	
	基础加速度激励	荷载力激励
TMD	81.40	81.30
TMDI	19.20	18.50
VTMD	81.30	81.10
NTMDI	-3.90	-4.70

#### 4 随机激励下主结构响应比较

在实际工程中结构更多是遭受像风和地震这样的随机荷载, 因此本文进一步研究了在随机荷载作用下附加上述 5 种减振系统(TMD、TMDI、VTMD、NTMDI 和 NTMDI-R)的主结构响应, 并进行对比分析。

采用状态空间<sup>[21]</sup>方法, 式(4)可表示为:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}u \quad (35)$$

式中,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\beta\mu + \mu + \beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = -\omega_s^2(\mu + \beta), A_{32} = -\beta\lambda_d^2\omega_s^2(\mu + \beta),$$

$$A_{33} = -2\xi_d\lambda_d\omega_s\mu(\mu + \beta), A_{34} = 2\xi_d\lambda_d\omega_s\mu(\mu + \beta),$$

$$A_{41} = -\omega_s^2\beta, A_{42} = -\lambda_d^2\omega_s^2(\beta\mu + \mu + \beta + \beta^2),$$

$$A_{43} = 2\xi_d\lambda_d\omega_s(\mu + \beta), A_{44} = -2\xi_d\lambda_d\omega_s(\mu + \beta),$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x_s \\ x_d \\ \dot{x}_s \\ \dot{x}_d \end{bmatrix}, u = \ddot{x}_g \quad (36)$$

假设外荷载为平稳白噪声激励, 则状态向量  $\mathbf{z}(t)$  的稳态协方差矩阵表示为:

$$\mathbf{G}_{zz} = \mathbf{E}[\mathbf{z}(t) \cdot \mathbf{z}^T(t)] \quad (37)$$

式中,  $\mathbf{E}[\cdot]$  为期望运算。

公式(37)中稳态协方差矩阵  $\mathbf{G}_{zz}$  可通过李雅普诺夫方程求得, 如下式所示:

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_{zz} + \mathbf{G}_{zz}\mathbf{A}^T + 2\pi S_0 \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \quad (38)$$

式中,  $S_0$  为白噪声激励的均匀功率谱密度。

对李雅普诺夫方程求解可得到稳态协方差矩阵  $\mathbf{G}_{zz}$ , 从而可求得附加 NTMDI-R 的主结构响应均方根, 如下式所示:

$$\sigma_{\text{NTMDI}}^2 = \mathbf{E}(x_s^2) = \frac{\pi S_0}{\omega_s^3} \cdot \frac{a\lambda_d^4 + b\lambda_d^2 + c}{d} \quad (39)$$

式中,

$$a = (\mu + \beta)^2,$$

$$b = (\mu + \beta) [4\xi_d^2(\mu + 1)^3(\mu + \beta) + \beta^2(\mu + 1)^2 - 2\beta(\mu + 1) - 2\mu],$$

$$c = (\mu + \beta + \beta\mu)^2,$$

$$d = 2\xi_d\lambda_d(\mu + \beta) [(\mu + \beta)\lambda_d^2 - \mu]^2 \quad (40)$$

同理, 改变状态空间表达式(35)中的系统矩阵  $\mathbf{A}$  和输入矩阵  $\mathbf{B}$ , 即可得到附加 TMD、VTMD、TMDI 和 NTMDI 的主结构响应均方根, 其中随机加速度作用下附加 5 种减振系统的主结构响应均方根公式见文献[26], 在此不赘述。而随机荷载力作用下附加 5 种减振系统的主结构响应均方根如下式所示:

$$\sigma_{\text{TMD}}^2 = \frac{\pi S_0}{\omega_s^3} \cdot \frac{(\mu + 1)\lambda_d^4 + [\xi_d^2(4\mu + 4) - \mu - 2]\lambda_d^2 + 1}{2\mu\lambda_d\xi_d} \quad (41a)$$

$$\sigma_{\text{VTMD}}^2 = \frac{\pi S_0}{\omega_s^3} \cdot \frac{\lambda_d^4 + (4\xi_d^2 + \mu - 2)\lambda_d^2 + 1}{2\mu\lambda_d^5\xi_d} \quad (41b)$$

$$\sigma_{\text{TMDI}}^2 = \frac{\pi S_0}{\omega_s^3} \cdot \left\{ \frac{[(\mu + \beta)^2 + 2\beta + 2\mu + 1]\lambda_d^4}{2(\mu + \beta)\lambda_d\xi_d} + \frac{[4\xi_d^2(\mu + \beta + 1) - \beta - \mu - 2]\lambda_d^2 + 1}{2(\mu + \beta)\lambda_d\xi_d} \right\} \quad (41c)$$

$$\sigma_{\text{NTMDI}}^2 = \frac{\pi S_0}{\omega_s^3} \cdot \frac{\lambda_d^4 + (4\xi_d^2 + \mu + \beta - 2)\lambda_d^2 + 1}{2(\mu + \beta)\lambda_d^5\xi_d} \quad (41d)$$

$$\sigma_{\text{NTMDI-R}}^2 = \frac{\pi S_0}{\omega_s^3} \cdot \left\{ \frac{(\beta + \mu)\lambda_d^4 + \mu + \beta}{2\lambda_d\xi_d[\beta - \mu + (1 + \mu)\lambda_d^2]^2} + \frac{[4\xi_d^2(\mu^2 + \beta\mu + \beta + \mu) - 2\beta - 2\mu + \beta^2]\lambda_d^2}{2\lambda_d\xi_d[\beta - \mu + (1 + \mu)\lambda_d^2]^2} \right\} \quad (41e)$$

将表 1 中对应的优化结构参数  $\lambda_{\text{dopt}}$  和  $\xi_{\text{dopt}}$  代入相应的公式中即可得到最优结构参数下附加 5 类减振系统的主结构响应均方根, 如图 11 和 12 所示。可以发现在两种随机荷载激励下的主结构响应均方根结果与两种简谐荷载激励下的结果(即图 7 和 8)具有相同的规律, 这说明激励方式不影响减振器的响应变化规律。



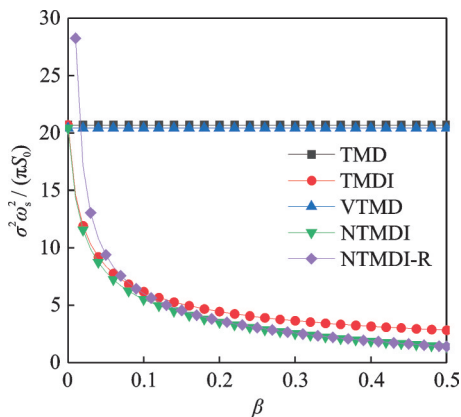


图11 随机基础加速度激励下5种减振系统的减振效果对比  
Fig.11 Comparison of damping effects of five types of damping systems under random base acceleration excitation

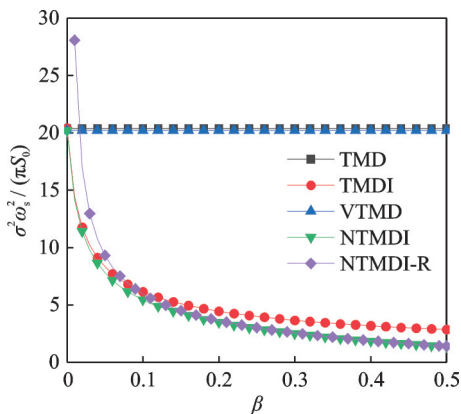


图12 随机荷载力激励下5种减振系统的减振效果对比  
Fig.12 Comparison of damping effects of five types of damping systems under random load force excitation

## 5 结论

本文将NTMDI与主结构和大地之间的安装方向调换引入了NTMDI-R(反向安装的NTMDI),并给出了谐波激励下NTMDI-R优化设计的解析式。将NTMDI-R与现有四种经典调谐质量阻尼器(TMD、VTMD、TMDI和NTMDI)进行比较,进而评估NTMDI-R在谐波激励和白噪声激励下的振动控制效果。本文研究得出以下结论:

(1) 附加NTMDI-R的主结构频响曲线同样满足固定点理论,基于固定点理论分别推导了简谐基础加速度和荷载力激励下NTMDI-R对应的最优结构参数解析式(最优频率比、最优阻尼比和最优主结构动力放大系数)。

(2) 在表观质量相同时,NTMDI比TMD、TMDI和VTMD具有更好的减振效果。而NTMDI-R在表观质量较小时,其减振效果差于TMD、TMDI和VTMD。因此,并非在经典的TMD和VTMD中

使用表观质量就可以提高其减振性能,还需要考虑阻尼器安装方法的影响。

(3) 正、反向安装两种减振器(NTMDI-R和NTMDI)的优化参数不同,则阻尼器的安装方法对其减振性能有较大影响。当表观质量比 $\beta$ 小于0.1时,NTMDI-R的减振效果差于NTMDI,而 $\beta$ 大于0.1时,NTMDI-R的减振效果与NTMDI基本一致。基础加速度和荷载力分别作用下,NTMDI-R的减振效果相对于NTMDI分别降低了3.9%和4.7%。

## 参考文献:

- [1] DEN HARTOG J P. Mechanical Vibrations[M]. New York: Courier Dover Publications, 1985.
- [2] LAZAR I F, NEILD S A, WAGG D J. Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers[J]. Engineering Structures, 2016, 122: 62-71.
- [3] ELIAS S, MATSAGAR V. Research developments in vibration control of structures using passive tuned mass dampers[J]. Annual Reviews in Control, 2017, 44: 129-156.
- [4] LOVE J S, SMITH A W, HASKETT T C, et al. Tuned mass dampers in tall buildings: a practical performance-based design approach[J]. Practice Periodical on Structural Design and Construction, 2022, 28(1): 04022053.
- [5] OMIONDIUYD J, DEN HARTOG J P. The theory of the dynamic vibration absorber[J]. Transactions of the ASME, 1928, 49-50(2): 021007.
- [6] NISHIHARA O, ASAMI T. Closed-form solutions to the exact optimizations of dynamic vibration absorbers (minimizations of the maximum amplitude magnification factors)[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2002, 124(4): 576-582.
- [7] HU Y L, CHEN M Z Q, SHU Z, et al. Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 346: 17-36.
- [8] KAVEH A, FARZAM M F, JALALI H H, et al. Robust optimum design of a tuned mass damper inerter[J]. Acta Mechanica, 2020, 231(9): 3871-3896.
- [9] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1648-1662.
- [10] SIAMI A, KARIMI H R. Modelling and identification of the hysteretic dynamics of inerters[J]. Designs, 2020, 4(3): 27.
- [11] PIETROSANTI D, DE ANGELIS M, GIARALIS A. Experimental study and numerical modeling of non-linear dynamic response of SDOF system equipped with

- tuned mass damper inerter (TMDI) tested on shaking table under harmonic excitation[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 184: 105762.
- [12] LIU Y L, ZHAO W T, YANG X F, et al. Predictive control of vehicle ISD suspension based on a hydraulic electric inerter[J]. *Shock and Vibration*, 2019, 2019: 9230736.
- [13] MA R S, BI K M, HAO H. Inerter-based structural vibration control: a state-of-the-art review[J]. *Engineering Structures*, 2021, 243: 112655.
- [14] ARAKAKI T, KURODA H, ARIMA F, et al. Development of seismic devices applied to ball screw: part 1 basic performance test of RD-series[J]. *AIJ Journal of Technology and Design*, 1999, 5(8): 239-244.
- [15] CHEN M Z Q, PAPAGEORGIOU C, SCHEIBE F, et al. The missing mechanical circuit element[J]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2009, 9(1): 10-26.
- [16] REN M Z. A variant design of the dynamic vibration absorber[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2001, 245(4): 762-770.
- [17] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. *工程力学*, 2019, 36(10): 8-27.  
ZHANG Ruifu, CAO Yanru, PAN Chao. Inerter system and its state-of-the art[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(10): 8-27.
- [18] SAITO K, INOUE N. A study on optimum response control of passive control systems using viscous damper with inertial mass: substituting equivalent nonlinear viscous elements for linear viscous elements in optimum control systems[J]. *AIJ Journal of Technology and Design*, 2007, 13(26): 457-462.
- [19] MARIAN L, GIARALIS A, et al. Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014, 138: 156-164.
- [20] MARIAN L, GIARALIS A. The tuned mass-damper-inerter for harmonic vibrations suppression, attached mass reduction, and energy harvesting[J]. *Smart Structures and Systems*, 2017, 19(6): 665-678.
- [21] PIETROSANTI D, DE ANGELIS M, BASILI M. Optimal design and performance evaluation of systems with tuned mass damper inerter (TMDI)[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2017, (46) 8: 1367-1388.
- [22] ZHANG Z, FITZGERALD B. Tuned mass-damper-inerter (TMDI) for suppressing edgewise vibrations of wind turbine blades[J]. *Engineering Structures*, 2020, 221: 110928.
- [23] GIARALIS A, PETRINI F. Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2017, 143(9): 04017127.
- [24] CAO L, LI C. Tuned tandem mass dampers-inerters with broadband high effectiveness for structures under white noise base excitations[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2019, 26(4): e2319.
- [25] CAO L, LI C, CHEN X. Performance of multiple tuned mass dampers-inerters for structures under harmonic ground acceleration[J]. *Smart Structures and Systems, An International Journal*, 2020, 26(1): 49-61.
- [26] LI Y F, LI S Y, TAN P. A novel tuned mass damper inerter: optimal design, effectiveness comparison, and robustness investigation[J]. *Structures*, 2023, 55: 1262-1276.
- [27] HAHNKAMM E. The damping of the foundation vibrations at varying excitation frequency[J]. *Master of Architecture*, 1932, 4: 192-201.
- [28] BROCK J E. A note on the damped vibration absorber [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1946, 13(4): A284.
- [29] WARBURTON G B. Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1982, 10(3): 381-401.

第一作者: 何书勇(1995—),男,博士研究生。

E-mail: hsyong@hnu.edu.cn

通信作者: 李寿英(1977—),男,博士,教授。

E-mail: shyli@hnu.edu.cn