

# 转子动响应灵敏度分析的多复域摄动法

姜东<sup>1</sup>, 王贞露<sup>1</sup>, 钱慧<sup>1</sup>, 杭晓晨<sup>1</sup>, 曹芝腑<sup>2</sup>, 朱锐<sup>3</sup>

(1. 南京林业大学机械电子工程学院, 江苏南京 210037; 2. 重庆大学航空航天学院, 重庆 400044;  
3. 慕尼黑工业大学工程与设计学院, 慕尼黑 80539)

**摘要:** 动响应灵敏度分析广泛应用于转子模型修正、参数识别和结构优化等问题。本文提出了一种基于多复域摄动的转子动响应一阶、二阶和混合灵敏度分析方法。分别在两个复数方向对设计参数进行摄动, 得到双复数域的转子系统动力学方程, 运用柯西-黎曼矩阵将复数运动方程扩维得到等价实数运动方程, 求解等价实数运动方程, 从而同时得到系统响应、一阶灵敏度和二阶灵敏度, 并获得动响应灵敏度的 Hessian 矩阵。以单盘转子系统和燃气发生器转子系统为研究对象进行数值仿真分析, 验证所提转子动响应灵敏度分析方法的正确性。相较于传统的有限差分法, 多复域摄动法对摄动步长引起误差的不敏感, 求解精度更高。

**关键词:** 转子动响应; 多复域摄动法; 二阶灵敏度; 混合灵敏度

**中图分类号:** O347.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)03-0469-11

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.03.003

## Multi-complex domain perturbation method for sensitivity analysis of rotor dynamic response

JIANG Dong<sup>1</sup>, WANG Zhenlu<sup>1</sup>, QIAN Hui<sup>1</sup>, HANG Xiaochen<sup>1</sup>, CAO Zhifu<sup>2</sup>, ZHU Rui<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China;  
2. College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;  
3. School of Engineering and Design, Technical University of Munich, Munich 80539, Germany)

**Abstract:** Rotor dynamic response sensitivity analysis is widely used in rotor model updating, parameter identification and structural optimization. In this paper, a first-order, second-order and mixed sensitivity analysis method for dynamic response of rotor system based on multi-complex domain perturbation method is proposed. The design parameters are perturbed in two complex directions respectively, and the motion equation of the rotor system in the double complex domain is obtained. Using the real matrix expression of the complex number, the complex motion equation is extended to obtain the equivalent real motion equation. By solving the equivalent real motion equation, the system response, first-order sensitivity and second-order sensitivity can be obtained simultaneously, and the Hessian matrix of dynamic response sensitivity can also be obtained. The numerical simulation analysis of single-disk rotor system and gas generator rotor system is carried out to verify the correctness of the rotor dynamic response sensitivity analysis method of multi-complex domain perturbation method. Compared with the traditional finite difference method, the multi-complex domain perturbation method shows insensitivity to the error caused by the perturbation step size, and the solution accuracy is higher.

**Keywords:** rotor dynamic response; multi-complex domain perturbation method; second-order sensitivity; mixed sensitivity

转子动响应灵敏度可定量反映设计参数变化对动响应的影响, 在转子系统模型修正<sup>[1-3]</sup>、参数识别<sup>[4-5]</sup>和动力学优化<sup>[6]</sup>等问题中至关重要。转子系统在实际运行时经常会伴随着噪声以及系统自身的振

动<sup>[7]</sup>, 高效准确的转子动响应灵敏度分析至关重要。

转子系统研制是一个迭代和多学科的过程<sup>[8-11]</sup>, 转子响应对参数灵敏度分析是动力学优化设计的前提。PUGACHEV<sup>[8]</sup>在转子系统轻量化设计优化中

**收稿日期:** 2023-05-06; **修订日期:** 2023-06-28

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11602112, 52202445); 江苏高校“青蓝工程”优秀青年骨干教师项目; 江苏省高校自然科学基金资助项目(20KJB460003)

应用基于梯度的优化方法,以某典型涡轮转子系统为例,利用伴随矩阵法进行了灵敏度分析。苏长青等<sup>[12]</sup>推导了三盘转子系统随机响应和动响应灵敏度公式,分析了转子系统设计参数对响应的影响。潘宏刚等<sup>[13]</sup>针对汽轮机组中转子质量和质心位置变化导致临界转速变化影响系统运行的问题,运用灵敏度分析方法分析参数变化对临界转速的影响,指导现场调试。TAHERKHANI等<sup>[14]</sup>采用基于灵敏度分析进行参数选择方法和合适的采样方法进行随机模型修正,研究了复杂涡轮压缩机转子-轴承系统动态特性,获得了理想的参数识别结果。WANG等<sup>[15]</sup>对柔性转子系统的前两阶临界转速进行了灵敏度分析,提高了优化效率,缩短了设计周期。CHEN等<sup>[16]</sup>研究发现应用灵敏度分析方法能够快速选取相应的轴系节点及参数以进行修正,在模型修正过程中起到良好的作用。可见灵敏度分析在转子系统优化设计、模型修正等问题中具有十分重要的地位。

灵敏度分析方法主要包括:直接微分法、有限差分法和复变量求导法。直接积分法是求解灵敏度最直接的方法,它是通过求解时域响应对系统参数的导数来计算。CAO等<sup>[17-19]</sup>推导了直接微分法的时域响应灵敏度,通过最小化测量响应和计算响应之间的残差进行模型修正。陈敏等<sup>[2]</sup>利用有限差分获得的一阶参数灵敏度,使用增强响应灵敏度法进行参数识别。BAYBORDI等<sup>[20]</sup>将动响应灵敏度计算转换为求解频响函数灵敏度问题,再通过傅里叶逆变换得到时域动响应灵敏度,并应用于模型修正与损伤识别。刘广等<sup>[21]</sup>将通过直接微分法得到非线性系统时域响应对物理参数的灵敏度矩阵用于参数识别反问题。胡智强等<sup>[22]</sup>和张磊等<sup>[23]</sup>先后研究了灵敏度计算过程中微分和离散的先后顺序造成的响应灵敏度的一致性误差。复变量求导法的突出特点是以较小的步长沿着虚轴对设计参数进行扰动,导数由不做减法运算的虚部响应得到。因此,该方法对扰动步长不敏感,结果精度高<sup>[24]</sup>。LANTOINE等<sup>[25]</sup>将复变量微分法扩展为广义多复数步长法,用于计算全纯函数的任意高阶导数。GARZA等<sup>[24]</sup>运用多复域 Newmark- $\beta$  时间积分法计算简单结构响应一阶、二阶灵敏度,并说明此方法精度高且便捷。田宇等<sup>[26]</sup>使用复变量求导法求解频响函数灵敏度,解决了频响函数本身存在复域时无法使用复变量求导法的问题。

本文提出一种基于多复域摄动法的转子系统动响应一阶、二阶和混合灵敏度分析方法。对设计参数在两个不同复域上分别进行参数摄动得到双复数

运动方程,使用复数在实数域的矩阵表达将复数方程转化为实数域上扩维后的方程,最终通过 Newmark- $\beta$  法求解扩维后的实数域运动方程,同时得到原响应、一阶灵敏度、二阶灵敏度和混合灵敏度。以单盘转子系统、燃气发生器模拟转子为例,使用本文方法计算转子动响应的一阶灵敏度、二阶灵敏度和混合灵敏度,并在燃发转子算例中用本文方法求解 Hessian 矩阵。以直接微分法结果作为动响应灵敏度的近似准确值,将多复域摄动法与有限差分法的结果进行误差比较,证明本文方法的可行性和准确性。

## 1 理论基础

### 1.1 多复域摄动法与复数的实数矩阵表达

#### 1.1.1 一阶灵敏度

复变量求导法是一种计算精度高且不受摄动步长影响的数值灵敏度求解方法,该方法在单复域上进行摄动求解一阶灵敏度,其单复数的定义为:

$$C^1 = \{X = x_0 + x_1 i \mid x_0, x_1 \in \mathbf{R}\} \quad (1)$$

式中, $C^1$ 表示所有单复数的集合; $i$ 为虚数单位, $i^2 = -1$ ; $\mathbf{R}$ 为所有实数的集合; $x_0$ 表示复数的实部; $x_1$ 表示复数的第一个虚部的系数。在复变量求导法中,通过构造设计参数的虚部摄动量,利用复数域泰勒展开公式,可以得到其对应的一阶灵敏度:

$$f(\theta + ih) = f(\theta) + \frac{ih}{1!} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{(ih)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dots + \frac{(ih)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} \quad (2)$$

式中, $\theta$ 表示设计参数; $h = \Delta h \times \theta$ 为参数摄动量, $\Delta h$ 为摄动系数。

则方程(2)的虚部响应可以表示为:

$$\text{Im}[f(\theta + ih)] = h \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} + \dots + \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} f}{\partial \theta^{2n+1}} \quad (3)$$

式中, $\text{Im}[f]$ 表示函数 $f$ 的虚部响应,最后得到 $\theta$ 的一阶灵敏度可表示为:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\text{Im}[f(\theta + i_1 h)]}{h} + O(h^2) \quad (4)$$

式中, $O(h^2)$ 表示摄动量的二阶截断。

#### 1.1.2 二阶灵敏度

在复变量求导法的基础上,考虑推导二阶灵敏度或混合灵敏度求解计算时,单复数不再满足要求,故将双复域引入到复变量求导法中。通过在不同复

域摄动,构造摄动后函数,通过复数域泰勒展开公式推导二阶灵敏度或混合灵敏度。其中双复数的定义为:

$$C^2 = \{X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_{12} i_1 i_2 \mid x_0, x_1, x_2, x_{12} \in \mathbf{R}\} \quad (5)$$

式中,  $C^2$  表示所有双复数的集合;  $x_2$  表示多复数的第二个虚部的系数;  $x_{12}$  表示多复数的第一个虚部和第二个虚部的混合虚部的系数;  $i_1, i_2$  为双复域中的两个虚数单位,  $i_1^2 = i_2^2 = -1$ 。分别用  $\text{Im}_1(X)$ 、 $\text{Im}_2(X)$  和  $\text{Im}_{12}(X)$  表示双复数在  $i_1, i_2$  和  $i_1 i_2$  方向的虚部。当考虑某设计参数的二阶灵敏度时,对设计参数  $\theta$  在双复域上进行摄动即  $f[\theta + h(i_1 + i_2)]$ 。将其进行复数域泰勒展开得:

$$\begin{aligned} f(\theta + h) = & f(\theta) + \frac{h(i_1 + i_2)}{1!} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \\ & \frac{h^2}{2!} (i_1 + i_2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{h^3}{3!} (i_1 + i_2)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} + \dots + \\ & \frac{h^n}{n!} (i_1 + i_2)^n \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} = \\ & \left[ f(\theta) - h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right] + \left( h \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{4h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} \right) i_1 + \\ & \left( h \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{4h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} \right) i_2 + h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} i_1 i_2 + O(h^4) \quad (6) \end{aligned}$$

式中,  $O(h^4)$  表示摄动量的四阶截断。首先对方程(6)取  $i_1 i_2$  方向的虚部,然后两边同时除以  $h^2$ ,得到二阶灵敏度:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\text{Im}_{12}\{f[\theta + h(i_1 + i_2)]\}}{h^2} + O(h^2) \quad (7)$$

可见二阶灵敏度同样具有二阶精度。当对方程(6)取  $i_1$  或  $i_2$  方向的虚部,除以  $h$  显然可得  $\theta$  的一阶灵敏度。

### 1.1.3 混合灵敏度

当考虑两个设计参数  $\theta_a, \theta_b$  的混合灵敏度时,对两参数分别在不同复域上进行摄动,即  $f(\theta_a + h_a i_1, \theta_b + h_b i_2)$ ,同样将其进行复数域泰勒展开:

$$\begin{aligned} f(\theta_a + h_a i_1, \theta_b + h_b i_2) = & f(\theta_a, \theta_b) + \frac{h_a i_1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \theta_a} + \frac{h_b i_2}{1!} \frac{\partial f}{\partial \theta_b} + \\ & \frac{h_a h_b i_1 i_2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_a \partial \theta_b} + \frac{h_a^2 i_1^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_a^2} + \\ & \frac{h_b^2 i_2^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_b^2} + \\ & \frac{h_a^3 i_1^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_a^3} + \frac{3h_a^2 h_b i_1^2 i_2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_a^2 \partial \theta_b} + \\ & \frac{h_b^3 i_2^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_b^3} + \frac{3h_a h_b^2 i_1 i_2^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_a \partial \theta_b^2} + O(h^4) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ f(\theta_a, \theta_b) - \frac{h_a^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_a^2} - \frac{h_b^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_b^2} \right] + \\ & \left( h_a \frac{\partial f}{\partial \theta_a} - \frac{h_a^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_a^3} - \frac{h_a h_b^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_a \partial \theta_b^2} \right) i_1 + \\ & \left( h_b \frac{\partial f}{\partial \theta_b} - \frac{h_b^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_b^3} - \frac{h_a^2 h_b}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_a^2 \partial \theta_b} \right) i_2 + \\ & h_a h_b \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_a \partial \theta_b} i_1 i_2 + O(h^4) \quad (8) \end{aligned}$$

对方程(8)取  $i_1 i_2$  方向的虚部,并对两边同时除以  $h_a h_b$ ,得到混合灵敏度:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_a \partial \theta_b} = \frac{\text{Im}_{12}\{f(\theta_a + h_a i_1, \theta_b + h_b i_2)\}}{h_a h_b} + O(h_a h_b) \quad (9)$$

可见混合灵敏度同样具有二阶精度。对方程(8)取  $i_1$  或  $i_2$  方向的虚部,除以对应的参数摄动量  $h_a$  或  $h_b$  可得到  $\theta_a$  或  $\theta_b$  的一阶灵敏度。由式(4)、(7)和(9)可以看出,灵敏度求解过程中无极大数相减的问题,大大降低了数值分析时机器舍入误差对灵敏度准确性的影响。

### 1.1.4 复矩阵的实数表达

使用上述方法求解二阶灵敏度或混合灵敏度时得到双复数函数,为了解双复数方程,采用实数域的矩阵形式得到复数函数的等价格式。任何单复数都可以用一个  $2 \times 2$  的实数矩阵表示,如下式所示:

$$C^1 \leftrightarrow \left\{ \mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{bmatrix} \mid x_0, x_1 \in \mathbf{R} \right\} \quad (10)$$

对同一个复数运算过程,矩阵形式的计算结果重新化为式(5)的多项式形式后,与多项式形式计算出的结果完全一致<sup>[25]</sup>。表示多复数的实数矩阵称为柯西-黎曼矩阵<sup>[27]</sup>,这种形式的柯西-黎曼矩阵与多复数之间存在一一对应关系。因此,多复数的算术运算(+, -, ×)等价于矩阵表示上的算术运算。而双复数是在单复数的形式上扩展,首先将双复数其中一个复域用矩阵形式表达得到  $2 \times 2$  的单复数矩阵,然后将矩阵每个元素再进行一次单复数的矩阵表达,将矩阵整体扩维为  $4 \times 4$  的实数矩阵。任何双复数都可以用一个  $4 \times 4$  的实数矩阵表示如下:

$$\begin{aligned} C^2 \leftrightarrow & \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} \mid z_1, z_2 \in C^1 \right\} \leftrightarrow \\ & \left\{ \mathbf{X}^2 = \begin{bmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & x_{12} \\ x_1 & x_0 & -x_{12} & -x_2 \\ x_2 & -x_{12} & x_0 & -x_1 \\ x_{12} & x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \mid x_0, x_1, x_2, x_{12} \in \mathbf{R} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

式中,  $z_1, z_2$  分别表示两个不同的单复数;  $\mathbf{X}^2$  表示双

复数对应的矩阵表达形式,其每个元素与 $C^2$ 中的每个元素一一对应。

## 1.2 多复域摄动法的转子灵敏度分析

用常系数微分方程的方法表示转子系统运动模型,其动力学方程为:

$$M\ddot{x} + (C + \omega G)\dot{x} + Kx = F \quad (12)$$

式中, $M$ 、 $C$ 、 $\omega G$ 和 $K$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵,均为 $N \times N$ 的矩阵; $F$ 为合外力向量,为 $N \times 1$ 的矩阵; $\omega$ 为转子角速度; $x$ 、 $\dot{x}$ 、 $\ddot{x}$ 分别为转子系统的位移、速度、加速度向量。

### 1.2.1 单参数摄动

在计算转子系统对系统内某一设计参数的二阶灵敏度时,对该设计参数分别在 $i_1$ 、 $i_2$ 两个复域内进行摄动,摄动后运动方程变为复数形式:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(\theta^*)\ddot{\tilde{x}} + [\widetilde{C}(\theta^*) + \omega\widetilde{G}(\theta^*)]\dot{\tilde{x}} + \\ \widetilde{K}(\theta^*)\tilde{x} = \widetilde{F} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $\theta^* = \theta + (i_1 + i_2)h$ , $\theta^*$ 为 $\theta$ 在双复域摄动后结果; $\tilde{x}$ 、 $\dot{\tilde{x}}$ 、 $\ddot{\tilde{x}}$ 分别表示转子系统的位移、速度、加速度复数形式; $\widetilde{M}$ 、 $\widetilde{C}$ 、 $\omega\widetilde{G}$ 、 $\widetilde{K}$ 和 $\widetilde{F}$ 分别表示摄动后双复域质量矩阵、阻尼矩阵、陀螺矩阵、刚度矩阵和合外力向量,使用复数的矩阵表达,将复数矩阵式(13)扩维转换为等价实数矩阵, $\widetilde{M}$ 、 $\widetilde{C}$ 、 $\omega\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{K}$ 扩维方式类似,以 $\widetilde{M}$ 为例:

$$\widetilde{M}(\theta^*) \leftrightarrow \begin{bmatrix} M & -\Delta M & -\Delta M & 0 \\ \Delta M & M & 0 & -\Delta M \\ \Delta M & 0 & M & -\Delta M \\ 0 & \Delta M & \Delta M & M \end{bmatrix} = \widehat{M} \quad (14)$$

式中, $\Delta M$ 为 $M$ 矩阵在对应复域上产生的摄动量; $\widehat{M}$ 表示摄动质量矩阵扩维后的实数矩阵。由于在两复域上摄动时使用相同摄动量,因此 $M$ 在 $i_1$ 和 $i_2$ 复域上的摄动量都为 $\Delta M$ 。同理可得到阻尼矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵扩维后的结果 $\widehat{C}$ 、 $\omega\widehat{G}$ 和 $\widehat{K}$ 。显然 $\widehat{M}$ 、 $\widehat{C}$ 、 $\omega\widehat{G}$ 和 $\widehat{K}$ 是 $4N \times 4N$ 的实数矩阵。

摄动后合外力向量 $\widetilde{F}$ 同样进行扩维:

$$\widetilde{F} \leftrightarrow \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad (15)$$

$\tilde{x}$ 、 $\dot{\tilde{x}}$ 和 $\ddot{\tilde{x}}$ 向量扩维方式相类似,以 $\tilde{x}$ 为例。按照双复数的实数矩阵表达进行扩维,并根据一阶灵敏度和二阶灵敏度求导法式(4)与式(7)对虚部进行变换得到下式:

$$\begin{aligned} \tilde{x} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & -\text{Im}_2(\tilde{x}) & -\text{Im}_1(\tilde{x}) & \text{Im}_{12}(\tilde{x}) \\ \text{Im}_2(\tilde{x}) & x & -\text{Im}_{12}(\tilde{x}) & -\text{Im}_1(\tilde{x}) \\ \text{Im}_1(\tilde{x}) & -\text{Im}_{12}(\tilde{x}) & x & -\text{Im}_2(\tilde{x}) \\ \text{Im}_{12}(\tilde{x}) & \text{Im}_1(\tilde{x}) & \text{Im}_2(\tilde{x}) & x \end{bmatrix} \approx \\ \begin{bmatrix} x & -h\frac{\partial x}{\partial \theta} & -h\frac{\partial x}{\partial \theta} & h^2\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \\ h\frac{\partial x}{\partial \theta} & x & -h^2\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} & -h\frac{\partial x}{\partial \theta} \\ h\frac{\partial x}{\partial \theta} & -h^2\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} & x & -h\frac{\partial x}{\partial \theta} \\ h^2\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} & h\frac{\partial x}{\partial \theta} & h\frac{\partial x}{\partial \theta} & x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

将以上扩维后的矩阵代入式(13),得到扩维后的运动方程存在四组重复的响应,保留第一组结果。最终得到转子系统对设计参数 $\theta$ 的一、二阶灵敏度计算公式为:

$$\widehat{M} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ h\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \theta} \\ h\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \theta} \\ h^2\frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} + (\widehat{C} + \omega\widehat{G}) \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ h\frac{\partial \dot{\tilde{x}}}{\partial \theta} \\ h\frac{\partial \dot{\tilde{x}}}{\partial \theta} \\ h^2\frac{\partial^2 \dot{\tilde{x}}}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} + \widehat{K} \begin{bmatrix} x \\ h\frac{\partial x}{\partial \theta} \\ h\frac{\partial x}{\partial \theta} \\ h^2\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

利用数值方法对此方程进行求解,一次求解可以得到系统的动响应、响应对设计参数的一阶灵敏度和二阶灵敏度。解的前 $N$ 行为运动方程的动响应; $N+1$ 到 $2N$ 行和 $2N+1$ 到 $3N$ 行的值相等,除以摄动量为响应对摄动参数的一阶灵敏度; $3N+1$ 到 $4N$ 行的值除以摄动量的平方为二阶灵敏度。

### 1.2.2 双参数摄动

在计算转子动响应对系统内某两设计参数的混合灵敏度时,对两设计参数分别在 $i_1$ 和 $i_2$ 两个复域内进行摄动,摄动后运动方程变为复数形式,如下式所示:

$$\begin{cases} \widetilde{M}(\theta_a^*, \theta_b^*)\ddot{\tilde{x}} + [\widetilde{C}(\theta_a^*, \theta_b^*) + \\ \omega\widetilde{G}(\theta_a^*, \theta_b^*)]\dot{\tilde{x}} + \widetilde{K}(\theta_a^*, \theta_b^*)\tilde{x} = \widetilde{F} \\ \theta_a^* = \theta_a + i_1 h_a = \theta_a + i_1 \Delta h_a \times \theta_a \\ \theta_b^* = \theta_b + i_2 h_b = \theta_b + i_2 \Delta h_b \times \theta_b \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\theta_a$ 与 $\theta_b$ 为系统两不同设计参数。同样以 $\widetilde{M}$ 为例进行扩维,用扩维后实数矩阵表达双复域矩阵:

$$\widetilde{M} \leftrightarrow \begin{bmatrix} M & -\Delta M_b & -\Delta M_a & 0 \\ \Delta M_b & M & 0 & -\Delta M_a \\ \Delta M_a & 0 & M & -\Delta M_b \\ 0 & \Delta M_a & \Delta M_b & M \end{bmatrix} = \widehat{M} \quad (19)$$

式中,  $\Delta M_a, \Delta M_b$  分别表示矩阵  $M$  对  $\theta_a, \theta_b$  摄动后分别在  $i_1$  和  $i_2$  复域上产生的摄动量。相同方法可得到阻尼矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵扩维后的结果  $\widehat{C}, \omega \widehat{G}$  和  $\widehat{K}$ 。

响应向量  $\widetilde{x}$  使用双复数的实数矩阵表达进行扩维, 并根据一阶灵敏度和混合灵敏度求导法式(4)与式(9)对虚部进行变换:

$$\widetilde{x} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & -\text{Im}_2(\widetilde{x}) & -\text{Im}_1(\widetilde{x}) & \text{Im}_{12}(\widetilde{x}) \\ \text{Im}_2(\widetilde{x}) & x & -\text{Im}_{12}(\widetilde{x}) & -\text{Im}_1(\widetilde{x}) \\ \text{Im}_1(\widetilde{x}) & -\text{Im}_{12}(\widetilde{x}) & x & -\text{Im}_2(\widetilde{x}) \\ \text{Im}_{12}(\widetilde{x}) & \text{Im}_1(\widetilde{x}) & \text{Im}_2(\widetilde{x}) & x \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x & -h_b \frac{\partial x}{\partial \theta_b} & -h_a \frac{\partial x}{\partial \theta_a} & h_a h_b \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_a \partial \theta_b} \\ h_b \frac{\partial x}{\partial \theta_b} & x & -h_a h_b \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_a \partial \theta_b} & -h_a \frac{\partial x}{\partial \theta_a} \\ h_a \frac{\partial x}{\partial \theta_a} & -h_a h_b \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_a \partial \theta_b} & x & -h_b \frac{\partial x}{\partial \theta_b} \\ h_a h_b \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_a \partial \theta_b} & h_a \frac{\partial x}{\partial \theta_a} & h_b \frac{\partial x}{\partial \theta_b} & x \end{bmatrix} \quad (20)$$

与二阶灵敏度推导过程类似, 扩维后的矩阵代入运动方程式(13), 产生四个重复的解, 只保留第一组解, 得到转子系统对  $\theta_a$  和  $\theta_b$  的一阶灵敏度和混合灵敏度计算方程:

$$\widehat{M} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ h_b \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \theta_b} \\ h_a \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \theta_a} \\ h_a h_b \frac{\partial^2 \ddot{x}}{\partial \theta_a \partial \theta_b} \end{bmatrix} + (\widehat{C} + \omega \widehat{G}) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ h_b \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_b} \\ h_a \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_a} \\ h_a h_b \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \theta_a \partial \theta_b} \end{bmatrix} + \widehat{K} \begin{bmatrix} x \\ h_b \frac{\partial x}{\partial \theta_b} \\ h_a \frac{\partial x}{\partial \theta_a} \\ h_a h_b \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_a \partial \theta_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

一次求解此方程可以得到系统的动响应、响应对  $\theta_a$  的一阶灵敏度、对  $\theta_b$  的一阶灵敏度和对  $\theta_a$  和  $\theta_b$  的混合灵敏度。解的前  $N$  行为运动方程的动响应;  $N+1$  到  $2N$  行除以摄动量  $h_b$  为响应对  $\theta_b$  的一阶灵敏度;  $2N+1$  到  $3N$  行除以摄动量  $h_a$  为响应对  $\theta_a$  的一阶灵敏度;  $3N+1$  到  $4N$  行除以摄动量  $h_a h_b$  为动响应对两设计参数的混合灵敏度。

### 1.3 实现流程

图 1 为多复域摄动法转子系统灵敏度分析流程图, 具体步骤如下:

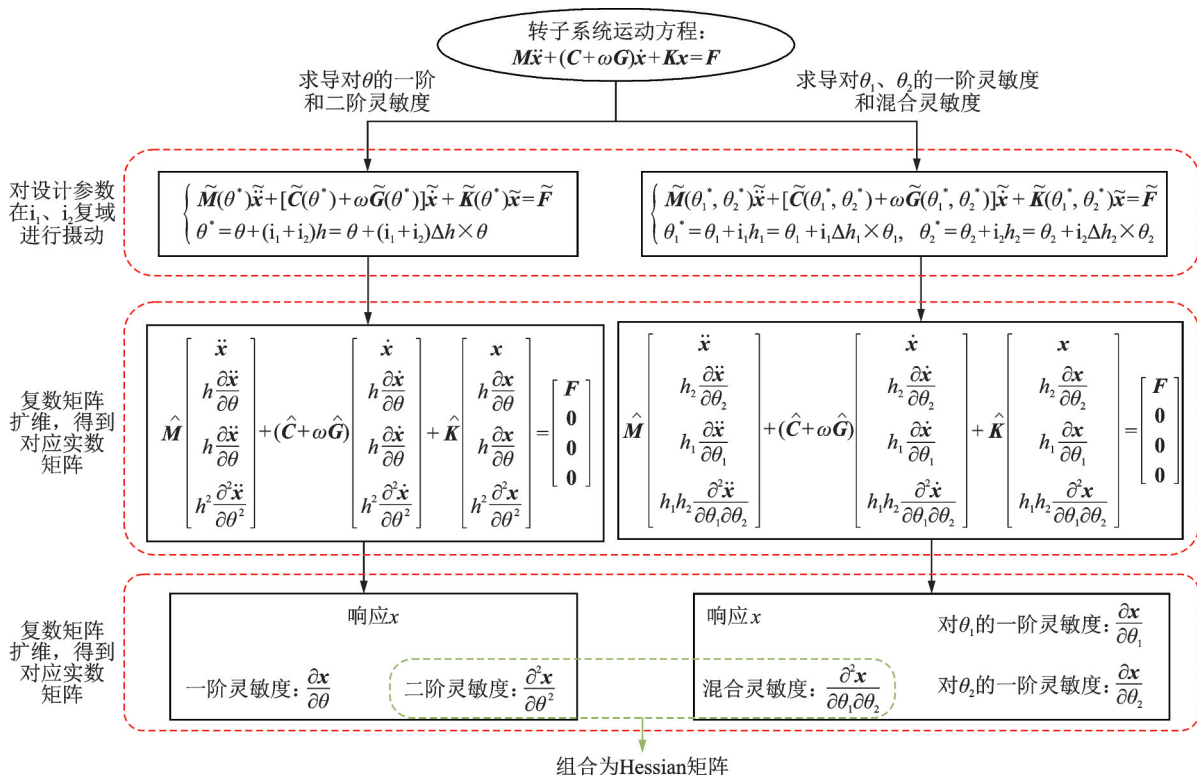


图 1 多复域摄动法转子系统灵敏度分析流程图

Fig. 1 Sensitivity analysis flow chart of rotor system based on multi-complex domain perturbation method

(1)对转子系统进行动力学建模,得到结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和合外力向量,得到转子系统运动方程;

(2)在两个虚数方向构造设计参数摄动,单参数摄动时对同一个设计参数在两个虚数方向进行摄动,双参数摄动时对两个设计参数分别在不同虚数方向进行摄动;

(3)将摄动后的双复数运动方程运用柯西-黎曼矩阵进行扩维,得到等价的实数运动方程,并利用数值方法求解;

(4)提取运动方程的运算结果,得到一阶灵敏度、二阶灵敏度、混合灵敏度和 Hessian 矩阵。

## 2 算 例

### 2.1 单盘转子系统

为研究多复域灵敏度方法在转子动响应灵敏度求解中的有效性,本节以单盘转子系统为例进行研究,其结构如图 2 所示。

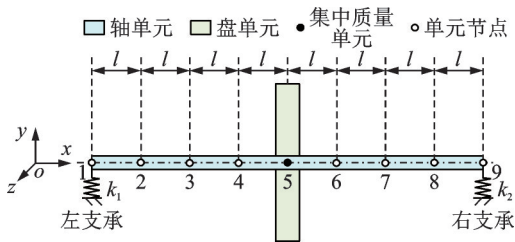


图 2 单盘转子系统

Fig. 2 Single disk rotor system

单盘转子系统由单盘转子和支承两部分组成。转子部分轴段使用 Timoshenko 梁模型来模拟,共分为 8 个轴段 9 个节点。各轴段的密度均为  $7800 \text{ kg/m}^3$ ,弹性模量为  $1.96 \text{ GPa}$ ,轴段泊松比为  $0.3$ ,轴段长度为  $15 \text{ mm}$ 、轴段直径为  $10 \text{ mm}$ 。圆盘以集中质量单元形式将质量、直径转动惯量和极转动惯量添加在 5 号节点处,同样转子系统圆盘偏心力也加在 5 号节点处。支承部分考虑其弹性变形,以弹簧来模拟弹性支承与转轴串联,左、右支承刚度为  $20 \text{ kN/mm}$ 。系统阻尼采用瑞利阻尼:

$$\begin{cases} C = \alpha M + \beta K \\ \alpha = 2 \left( \frac{\xi_2}{\omega_2} - \frac{\xi_1}{\omega_1} \right) / \left( \frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) \\ \beta = 2 (\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \end{cases} \quad (22)$$

式中,  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别为转子的前两阶固有角频率;  $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别对应前两阶固有频率的模态阻尼比。

为验证多复域摄动法具有精度高、简便等特点,本例分别使用直接微分法、有限差分法和本文多复域摄动法求解动响应左支承刚度的一、二阶灵敏度。

首先推导直接灵敏度法求解方程。  $\theta$  为设计参数,转子运动方程两边同时对  $\theta$  求偏导,得到系统的一阶灵敏度:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \theta} \ddot{x} + M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial C}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \dot{x} + \\ (C + \omega G) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} + \frac{\partial K}{\partial \theta} x + K \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (23)$$

再对运动方程两边同时对  $\theta$  求偏导,得到系统的二阶灵敏度:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} \ddot{x} + 2 \frac{\partial M}{\partial \theta} \ddot{y} + M \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} + \omega \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right) \dot{x} + \\ 2 \left( \frac{\partial C}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \dot{y} + (C + \omega G) \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 K}{\partial \theta^2} x + \\ 2 \frac{\partial K}{\partial \theta} y + K \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (24)$$

式中,  $y = \partial x / \partial \theta$ ,  $\dot{y} = \partial \dot{x} / \partial \theta$ ,  $\ddot{y} = \partial \ddot{x} / \partial \theta$ 。以左支承刚度为目标设计参数,求得直接微分法的一阶灵敏度为:

$$M \ddot{y} + (C + \omega G) \dot{y} + K y = - \frac{\partial K}{\partial \theta} x \quad (25)$$

式中,  $\partial K / \partial \theta$  为  $K$  矩阵每个元素对  $\theta$  求偏导,结果为  $K$  矩阵中添加支承刚度的元素为 1,其余为 0。对左支撑刚度的二阶灵敏度方程为:

$$M \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta} + (C + \omega G) \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} + K \frac{\partial y}{\partial \theta} = - 2 \frac{\partial K}{\partial \theta} y \quad (26)$$

使用 Newmark- $\beta$  法对此运动方程进行求解即得到此系统的一、二阶灵敏度。

图 3 为选取适当摄动系数的有限差分法(一阶、二阶灵敏度摄动系数分别为  $10^{-3}$  和  $10^{-2}$ )、多复域摄动法(一阶、二阶灵敏度摄动系数分别为  $10^{-5}$  和  $10^{-6}$ )求解结果与直接微分法求结果对比图。表 1 为有限差分法和多复域摄动法求解相同时间步长的响应灵敏度所用计算时间。

为对比计算结果的精度,将直接微分法求解时的步长相较于其他两种方法减小两个数量级,以此作为动响应灵敏度的近似精确值,统计有限差分法和多复域摄动法计算误差。计算摄动系数从  $10^{-1}$  到  $10^{-9}$  中每个摄动系数下有限差分法和多复域摄动法与准确值之间的误差。定义灵敏度分析结果误差  $e$  为:

$$e = \frac{\sum \left( \frac{s_i^c - s_i^p}{s_i^p} \right)^2}{N_w} \quad (27)$$

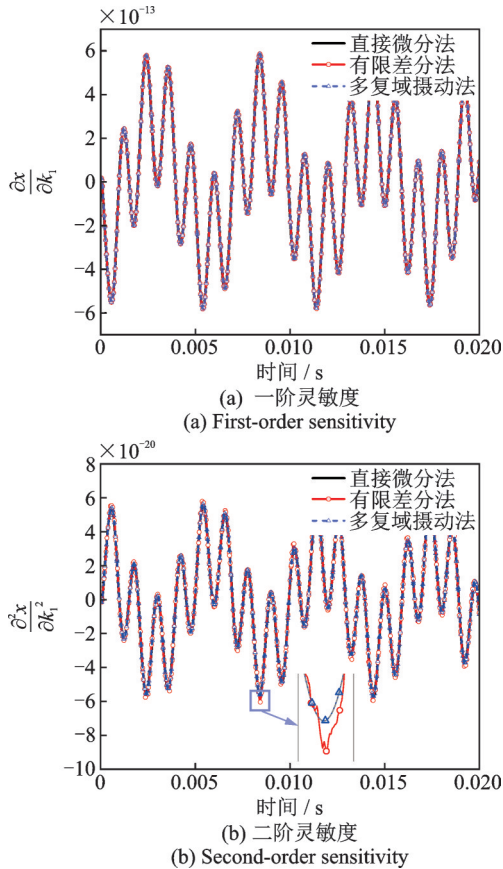


图 3 三种求解灵敏度方法的结果

Fig. 3 Results of three solving sensitivity methods

表 1 两种方法的计算时长

Tab. 1 The calculation time of the two methods

求解方法	求解时间/s
有限差分法	5.419
多复域摄动法	23.1717

式中,  $s_i^f$  表示每个时间点灵敏度计算值;  $s_i^p$  表示每个时间点灵敏度的精确值;  $N_o$  为总的时间节点数目。

图 4 为有限差分法和多复域摄动法在不同摄动系数下一、二阶灵敏度分析结果误差, 随着摄动系数数量级的减小求解的灵敏度精度逐渐提高。求解一阶灵敏度误差结果显示, 有限差分法在摄动系数为  $10^{-3}$  时达到最准确结果, 误差的数量级能达到  $10^{-6}$ ; 多复域摄动法的相对误差在摄动系数为  $10^{-5}$  时达到最准确结果, 误差的数量级能达到  $10^{-13}$ 。二阶灵敏度误差结果显示, 有限差分法在摄动系数为  $10^{-2}$  时达到最准确结果, 误差的数量级为  $10^{-3}$ ; 多复域摄动法的相对误差在摄动系数为  $10^{-6}$  时达到最准确结果, 误差的数量级能达到  $10^{-13}$ 。多复域摄动法的最小误差远小于有限差分法的最小误差, 多复域摄动法具有更高的精度。

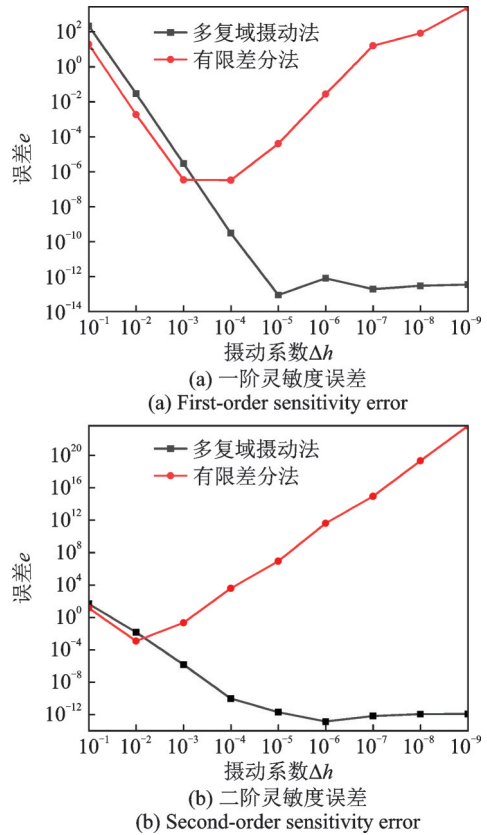


图 4 两种分析方法求解的一、二阶灵敏度误差分析

Fig. 4 First and second order sensitivity error analysis of two analysis methods

## 2.2 燃气发生器模拟转子

参考真实航空发动机构造燃气发生器模拟转子如图 5(a) 所示。由于主要研究转子振动问题, 忽略气动性能, 去除了叶片等部件。

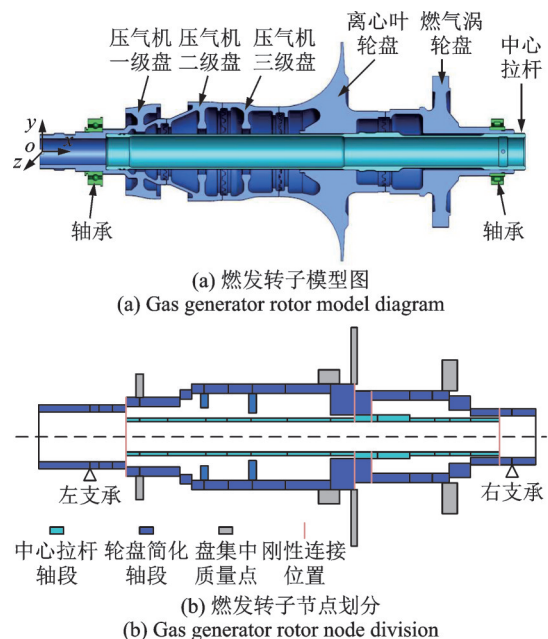


图 5 燃气发生器模拟转子系统模型与节点划分示意图

Fig. 5 Gas generator simulated rotor system model and node division diagram

模拟转子主要由五级轮盘和中心拉杆组成。外部从左至右分别为压气机一级盘、二级盘、三级盘、离心叶轮盘和燃气涡轮盘,由内部的中心拉杆压紧固定;支承位置位于转子的两端。

模拟转子有限元模型采用 Timoshenko 梁单元建立,各部分的模型参数如表 2 所示。五级轮盘划分为 21 个轴段,22 个节点,节点编号从左到右依次为 1~22,各轴段参数如表 3 所示;考虑盘单元的转动惯量和陀螺效应,简化为集中质量点添加到轮盘轴段对应节点处,如图 5(b) 所示。

表 2 燃发转子模型参数

Tab. 2 Gas generator rotor model parameters

部件名称	弹性模量/GPa	密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	泊松比
压气机一级盘	196	7800	0.3
压气机二级盘	121	4480	0.3
压气机三级盘	121	4480	0.3
离心叶轮盘	121	4480	0.3
燃气涡轮盘	214	8200	0.3
中心拉杆	204	7850	0.3

表 3 轮盘轴段参数

Tab. 3 Wheel shaft segment parameters

长度/mm	外径/mm	内径/mm
$L_{1-5}=92$	$D_{1-5}=48$	$d_{1-5}=34.5$
$L_{5-7}=41.5$	$D_{5-7}=65$	$d_{5-7}=55$
$L_{7-8}=31$	$D_{7-8}=84$	$d_{7-8}=77$
$L_{8-13}=146.5$	$D_{8-13}=111$	$d_{8-13}=98$
$L_{13-14}=26$	$D_{13-14}=134.6$	$d_{13-14}=42.5$
$L_{14-15}=17.8$	$D_{14-15}=91$	$d_{14-15}=54.5$
$L_{15-18}=93.9$	$D_{15-18}=88$	$d_{15-18}=42.4$
$L_{18-19}=20$	$D_{18-19}=80$	$d_{18-19}=40$
$L_{19-22}=73.6$	$D_{19-22}=54$	$d_{19-22}=34.5$

注: $L_{ij}$ 表示第*i*个节点和第*j*个节点之间轮盘长度, $D_{ij}$ 表示第*i*个节点和第*j*个节点之间轮盘外径, $d_{ij}$ 表示第*i*个节点和第*j*个节点之间轮盘内径。

简化后盘集中质量点参数如表 4 所示。其中离心叶轮盘沿轴向分布距离较长,且半径变化较大,将其简化为两个盘单元。中心拉杆被划分为 15 个轴段,16 个节点,节点编号从左到右依次为 1~16,各参数如表 5 所示。根据燃气发生器转子的实际配合关系,五级轮盘梁模型的节点 5、节点 14、节点 15、节点 20 分别与中心拉杆的节点 1、节点 9、节点 10、节点 16 采用近似刚性连接。综上所述,所建立的燃气发生器模拟转子的有限元模型共有 36 个轴段、38 个节点。系统阻尼采用瑞利阻尼,计算方法同式(22)。两侧支承以弹簧模拟,其刚度分别为 17 kN/mm、25 kN/mm。

表 4 集中质量盘单元参数

Tab. 4 Centralized mass disk unit parameters

质量/kg	直径惯性矩/ (10 <sup>-4</sup> kg·m <sup>2</sup> )	极惯性矩/ (10 <sup>-4</sup> kg·m <sup>2</sup> )
$m_1=1.02$	$J_{d1}=19.5$	$J_{p1}=10.6$
$m_2=0.135$	$J_{d2}=1.7$	$J_{p2}=0.9$
$m_3=0.121$	$J_{d3}=1.5$	$J_{p3}=0.7$
$m_4=0.106$	$J_{d4}=0.7$	$J_{p4}=4.5$
$m_5=1.424$	$J_{d5}=98.1$	$J_{p5}=49.4$
$m_6=2.573$	$J_{d6}=102.2$	$J_{p6}=51.7$

表 5 中心拉杆轴段参数

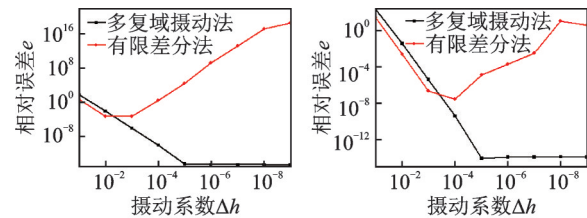
Tab. 5 Center tie rod shaft segment parameters

长度/mm	外径/mm	内径/mm
$L_{1-9}=320$	$D_{1-9}=40$	$d_{1-9}=36.9$
$L_{9-10}=41.5$	$D_{9-10}=42.5$	$d_{9-10}=34.5$
$L_{10-11}=31$	$D_{10-11}=68$	$d_{10-11}=34.5$
$L_{11-12}=146.5$	$D_{11-12}=52$	$d_{11-12}=34.5$
$L_{12-16}=26$	$D_{12-16}=37.7$	$d_{12-16}=34.5$

注:同表 3 表注。

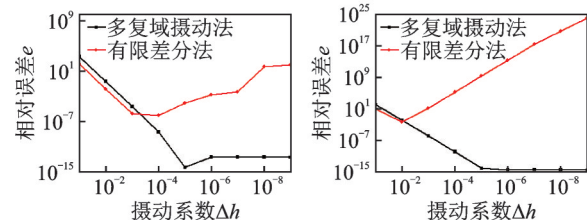
以左支承刚度为目标参数,分别使用直接微分法、有限差分法和多复域摄动法求解位移响应对左支承刚度( $k_1$ )的一、二阶灵敏度。将直接微分法求解时的步长相较于其他两种方法减小两个数量级,以此得到的结果作为动响应灵敏度的近似准确值,使用 2.1 节误差统计方法对多复域摄动法与有限差分法进行误差对比,其对比结果如图 6 所示。

图 6 所示的 8 幅图左侧为对应节点响应的一阶灵敏度,右侧为二阶灵敏度。首先每幅图结果都表



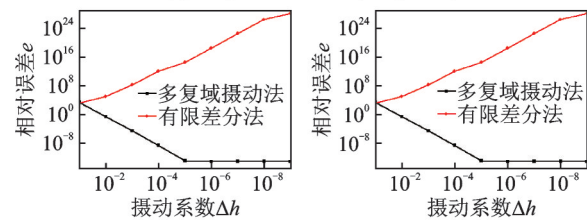
(a) 左支承处响应灵敏度

(a) Response sensitivity at left support



(b) 一级盘处响应灵敏度

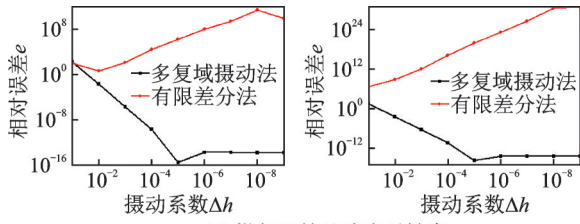
(b) Response sensitivity at primary disc



(c) 三级盘处响应灵敏度

(c) Response sensitivity at tertiary disc





(d) 燃气涡轮处响应灵敏度  
(d) Response sensitivity at gas turbine

图 6 多复域摄动法和有限差分法求解响应一、二阶灵敏度误差

Fig. 6 Multi-complex domain perturbation method and finite difference method to solve the first and second order sensitivity error of response

明使用本文所提多复域方法获得的最佳精度都远优于有限差分法。有限差分法的一、二阶灵敏度最优精度在左支承节点、一级盘节点、三级盘节点和燃气涡轮节点处依次降低,特别是三级盘节点处二阶灵敏度、燃气涡轮节点处一、二阶灵敏度误差巨大。这是由于越远离左支承节点的动响应对左支承刚度灵敏度越低,而过小的灵敏度代表摄动后动响应与原响应的差值越小,在有限差分法计算时两动响应结果差值小于计算机最低计算精度的时刻越多,造成误差越大。有限差分法获得的最优结果的摄动系数不稳定,摄动系数过大会造成有限差分法过大的截断误差,而过小的摄动系数又会造成过大的舍入误差。

与之相比,多复变量求导法(MVDM)的最优误差的数量级稳定控制在 $10^{-10}$ 以下,精度较高,且随着摄动系数减小不会发散维持高精度。这种特点在使用时能便捷地选取摄动系数取得高精度的灵敏度值。

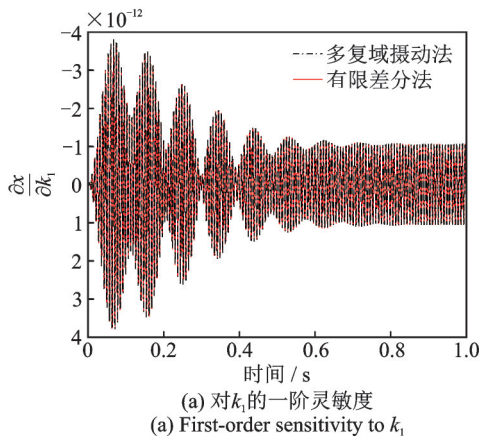
根据式(21),对左支承刚度( $k_1$ )和离心叶轮质量( $m_1$ )分别在不同复域进行摄动,求解转子系统位移响应对左支承刚度的一阶灵敏度、对离心叶轮质量的一阶灵敏度和对两参数的混合灵敏度,并使用有限差分法(FDM)分别求解上述灵敏度进行对比。图7(a)、(b)分别为对两参数的一阶灵敏度。

MVDM 计算响应对支承刚度和离心叶轮质量的二阶灵敏度和混合灵敏度可组集为响应对两参数的 Hessian 矩阵  $G$ 。组合后的 Hessian 矩阵为:

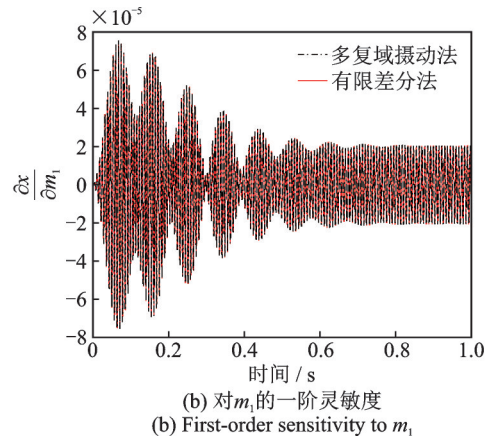
$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial k_1^2} & \frac{\partial^2 x(t)}{\partial k_1 \partial m_1} \\ \frac{\partial^2 x(t)}{\partial m_1 \partial k_1} & \frac{\partial^2 x(t)}{\partial m_1^2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中, $\partial^2 x(t)/\partial k_1^2$ 、 $\partial^2 x(t)/\partial m_1^2$ 分别为转子动响应对左支承刚度和离心叶轮质量的二阶灵敏度; $\partial^2 x(t)/(\partial k_1 \partial m_1)$ 、 $\partial^2 x(t)/(\partial m_1 \partial k_1)$ 为转子动响应对左支承刚度和离心叶轮质量的混合灵敏度。

四条灵敏度曲线如图8所示。四条灵敏度曲线中同一时刻的灵敏度值填入式(28)中对应位置,即为转子系统时域响应对 $k_1$ 和 $m_1$ 的 Hessian 矩阵。



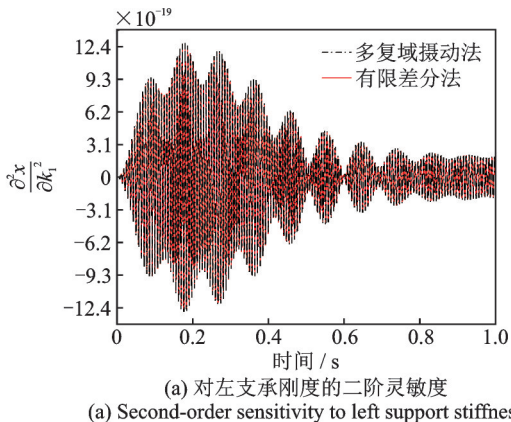
(a) 对 $k_1$ 的一阶灵敏度  
(a) First-order sensitivity to  $k_1$



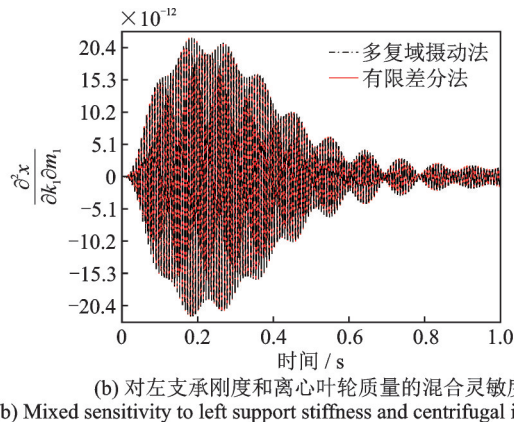
(b) 对 $m_1$ 的一阶灵敏度  
(b) First-order sensitivity to  $m_1$

图 7 一阶灵敏度

Fig. 7 First-order sensitivity



(a) 对左支承刚度的二阶灵敏度  
(a) Second-order sensitivity to left support stiffness



(b) 对左支承刚度和离心叶轮质量的混合灵敏度  
(b) Mixed sensitivity to left support stiffness and centrifugal impeller mass

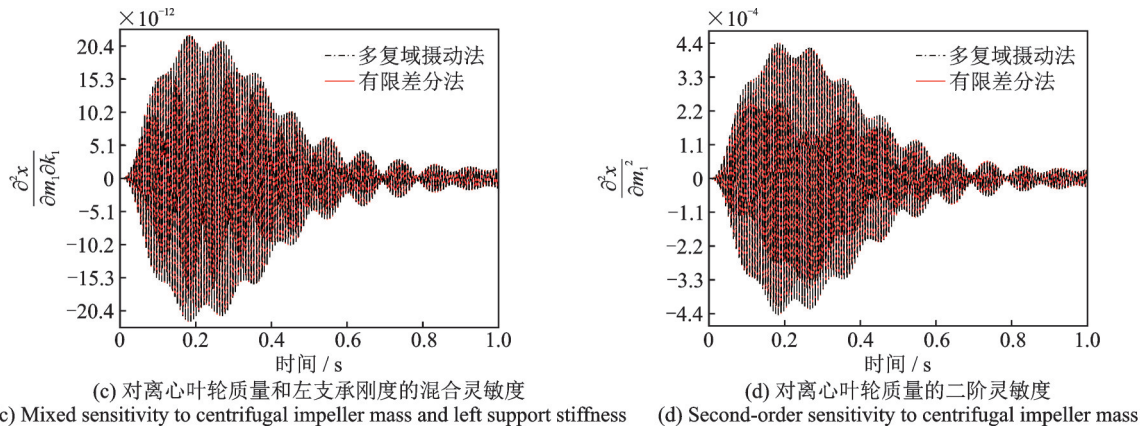


图8 Hessian矩阵包含的灵敏度

Fig. 8 Sensitivity contained in Hessian matrix

### 3 结论

本文提出一种基于多复域摄动法的转子系统动响应一阶、二阶和混合灵敏度分析方法。多复域摄动法使用双复域拓展复变量微分法,延续了复变量微分法高精度和对摄动步长不敏感的优点,并通过多复数的实数矩阵表达使其在求解转子动响应灵敏度时能够方便应用。以单盘转子系统、燃气发生器模拟转子为例,使用本文方法计算动响应的一阶灵敏度、二阶灵敏度和混合灵敏度。并以直接微分法求解时步长相较于有限差分法和多复域方法小多个数量级作为准确值,与有限差分法进行误差比较,证明本文方法的可行性和准确性。

相较于有限差分法,本文所提多复域摄动法计算精度稳定,不受摄动步长和灵敏度本身大小影响,能为转子系统模型修正、结构优化等提供准确的高阶灵敏度。以此方法继续在复域扩展,能对参数进行更多复域的摄动,从而求解更高阶灵敏度。

#### 参考文献:

- [1] CAO Z, FEI Q, JIANG D, et al. A sensitivity-based nonlinear finite element model updating method for nonlinear engineering structures[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 100: 632-655.
- [2] 陈敏, 刘广, 汪利, 等. 基于增强响应灵敏度法的多体系统参数识别[J]. 振动与冲击, 2022, 41(21): 121-128.  
CHEN Min, LIU Guang, WANG Li, et al. Parametric identification of multibody system based on enhanced response sensitivity method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(21): 121-128.
- [3] HE J, JIANG D, ZHANG D, et al. Interval model validation for rotor support system using Kmeans Bayesian method[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2022, 70: 103364.
- [4] 李佳靖, 朱宏平, 翁顺, 等. 动力特征解灵敏度分析的结构关键区域判别[J]. 振动工程学报, 2022, 35(5): 1181-1187.  
LI Jiajing, ZHU Hongping, WENG Shun, et al. Evaluation of critical region based on dynamic eigensensitivity analysis[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(5): 1181-1187.
- [5] 林荣洲, 侯磊, 孙传宗, 等. 某航空发动机整机系统非线性振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2022, 35(3): 557-568.  
LIN Rongzhou, HOU Lei, SUN Chuazong, et al. Nonlinear vibration analysis of the overall aeroengine system[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(3): 557-568.
- [6] HELD A. On design sensitivities in the structural analysis and optimization of flexible multibody systems[J]. Multibody System Dynamics, 2022, 54(1): 53-74.
- [7] 高朋, 侯磊, 陈予恕. 双转子-中介轴承系统非线性振动特性[J]. 振动与冲击, 2019, 38(15): 1-10.  
GAO Peng, HOU Lei, CHEN Yushu. Nonlinear vibration characteristics of a dual-rotor system with inter-shaft bearing[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(15): 1-10.
- [8] PUGACHEV A O. Application of gradient-based optimization methods for a rotor system with static stress, natural frequency, and harmonic response constraints[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 47(6): 951-962.
- [9] 罗忠, 刘家希, 刘凯宁, 等. 弹性环式支承结构动刚度分析及其对转子系统的影响[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2022, 43(5): 667-673.  
LUO Zhong, LIU Jiashi, LIU Kaining, et al. Analysis of dynamic stiffness of the elastic ring support structure and its influence on the rotor system[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2022, 43

- (5): 667-673.
- [10] 李坤, 曾劲, 于明月, 等. 考虑螺栓连接刚度不确定性的带法兰-圆柱壳结构频响函数分析[J]. 振动工程学报, 2020, 33(3): 517-524.  
LI Kun, ZENG Jin, YU Mingyue, et al. Frequency response function analysis of flanged cylindrical shell structure with uncertainty of bolted connection stiffness[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(3): 517-524.
- [11] XU Y, LIU J, WAN Z, et al. Rotor fault diagnosis using domain-adversarial neural network with time-frequency analysis[J]. Machines, 2022, 10(8): 610.
- [12] 苏长青, 郭凡逸, 潘广权, 等. 多盘转子系统的随机响应灵敏度分析[J]. 中国工程机械学报, 2018, 16(1): 10-16.  
SU Changqing, GUO Fanyi, PAN Guangquan, et al. Random response sensitivity of multi-plates system[J]. Chinese Journal of Construction Machinery, 2018, 16(1): 10-16.
- [13] 潘宏刚, 袁惠群, 赵天宇, 等. 轮盘质量和位置对转子临界转速灵敏度分析[J]. 振动. 测试与诊断, 2017, 37(3): 532-538.  
PAN Honggang, YUAN Huiqun, ZHAO Tianyu, et al. Sensitivity analysis of wheel quality and location on rotor critical speed[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2017, 37(3): 532-538.
- [14] TAHERKHANI Z, AHMADIAN H. Stochastic model updating of rotor support parameters using Bayesian approach[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 158: 107702.
- [15] WANG J Y, ZHAO Y C, WANG C. The dynamic response and sensitivity analysis of the SFD-sliding bearing flexible rotor system[J]. Advanced Materials Research, 2012, 472-475: 1460-1464.
- [16] CHEN Y, ZHU R, JIN G, et al. A new mathematical modeling method for four-stage helicopter main gearbox and dynamic response optimization[J]. Complexity, 2019, 2019: 5274712.
- [17] CAO Z, FEI Q, JIANG D, et al. Sensitivity analysis of nonlinear transient response based on perturbation in the complex domain[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, ASME, 2021, 16(1): 011001.
- [18] CAO Z, FEI Q, JIANG D, et al. Dynamic sensitivity-based finite element model updating for nonlinear structures using time-domain responses[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 184: 105788.
- [19] CAO Z, FEI Q, JIANG D, et al. Model updating of a stitched sandwich panel based on multistage parameter selection[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 2019: 1584953.
- [20] BAYBORDI S, ESFANDIARI A. Model updating and damage detection of jacket type platform using explicit and exact time domain sensitivity equation[J]. Ocean Engineering, 2023, 269: 113551.
- [21] 刘广, 刘济科, 吕中荣. 基于时域响应灵敏度分析的非线性系统参数识别[J]. 振动与冲击, 2018, 37(21): 213-219.  
LIU Guang, LIU Jike, LYU Zhongrong. Parametric recognition of a nonlinear system based on time domain response sensitivity analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(21): 213-219.
- [22] 胡智强, 马海涛. 结构动力响应灵敏度分析伴随法一致性研究[J]. 振动与冲击, 2015, 34(20): 167-173.  
HU Zhiqiang, MA Haitao. On the consistency issue of adjoint methods for sensitivity analysis of dynamic responses[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(20): 167-173.
- [23] 张磊, 张严, 丁喆. 黏性阻尼系统时域响应灵敏度及其一致性研究[J]. 力学学报, 2022, 54(4): 1113-1124.  
ZHANG Lei, ZHANG Yan, DING Zhe. Adjoint sensitivity methods for transient responses of viscously damped systems and their consistency issues[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(4): 1113-1124.
- [24] GARZA J, MILLWATER H. Multicomplex Newmark-Beta time integration method for sensitivity analysis in structural dynamics[J]. AIAA Journal, 2015, 53(5): 1188-1198.
- [25] LANTOINE G, RUSSELL R P, DARGENT T. Using multicomplex variables for automatic computation of high-order derivatives[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2012, 38(3): 16.
- [26] 田宇, 曹芝腑, 姜东. 基于多复域的频响函数灵敏度分析[J]. 振动与冲击, 2021, 40(18): 156-163.  
TIAN Yu, CAO Zhifu, JIANG Dong. Sensitivity analysis of frequency response functions based on multicomplex domain[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(18): 156-163.
- [27] PRICE G B. An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions[M]. New York: Marcel Dekker Inc., 1991.

通信作者: 姜东(1985—), 男, 博士, 副教授。

E-mail: jiangdong@njfu.edu.cn