

# 双向齿条传动摩擦纳米发电机非线性动力学

莫 帅<sup>1,2</sup>, 王 震<sup>1,2</sup>, 刘文斌<sup>1,2</sup>, 张 伟<sup>1</sup>

(1. 广西大学省部共建特色金属材料与组合结构全寿命安全国家重点实验室, 广西南宁 530004;

2. 广西大学机械工程学院, 广西南宁 530004)

**摘要:** 考虑时变啮合刚度、时变支撑刚度、传动误差、齿侧间隙和轴承间隙, 建立双向齿条传动摩擦纳米发电机(TENG)系统非线性动力学模型。采用龙格-库塔法求解系统振动微分方程, 得到系统的时变啮合力图、时频图、相图、FFT 频谱图、庞加莱截面图、分岔图和三维频谱图, 探究外部负载激励频率对系统动力学特性的影响。结合摩擦纳米发电技术, 获取不同参数下 TENG 的输出性能, 研究外部负载激励频率和啮合刚度对系统能量收集的影响机理。结果表明: 双向齿条传动摩擦纳米发电机机械传动系统具有明显的非线性特性, 合理选择外部负载激励频率和啮合刚度, 避免不稳定区间的控制, 可以提高机械能转换效率, 增加发电量。

**关键词:** 非线性动力学; 摩擦纳米发电机(TENG); 输出性能; 能量收集

**中图分类号:** O322; TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)03-0645-08

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.03.022

## Nonlinear dynamics of a bidirectional gear-driven friction nanogenerator

MO Shuai<sup>1,2</sup>, WANG Zhen<sup>1,2</sup>, LIU Wenbin<sup>1,2</sup>, ZHANG Wei<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Featured Metal Materials and Life-cycle Safety for Composite Structures, Guangxi University, Nanning 530004, China; 2. School of Mechanical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract:** The nonlinear dynamics of the bidirectional gear-driven friction nanogenerator (TENG) system is modelled by considering the time-varying meshing stiffness, time-varying support stiffness, transmission error, tooth side clearance and bearing clearance. The ode45 function is used to solve the vibration differential equations of system, and the time-varying meshing force diagram, time-frequency diagram, phase diagram, FFT spectrum diagram, Poincaré diagram, bifurcation diagram and three-dimensional spectrum diagram of the system are obtained, to explore the effect of the excitation frequency of the external load on the system dynamics characteristics. In addition, friction nano-generation technology is combined to obtain the output performance of TENG under different parameters, and to investigate the mechanism of the influence of external load excitation frequency and average engagement stiffness on the energy harvesting of the system. The results show that the bidirectional gear-driven friction nanogenerator mechanical transmission system has obvious nonlinear characteristics, and reasonable selection of the external load excitation frequency and meshing stiffness to avoid the control of unstable intervals can improve the mechanical energy conversion efficiency and increase the power generation capacity of TENG.

**Keywords:** nonlinear dynamics; friction nanogenerator (TENG); output performance; energy harvesting

随着摩擦纳米发电机(TENG)的发明, 摩擦起电成为环境能源收集的主流技术之一。摩擦纳米发电机具有质量轻、体积小、结构简单等特点, 尤其在低频机械能收集方面有优异的输出特性, 在微纳能源、自驱动传感和蓝色能源等领域应用广泛。

自 TENG 发明以来, 文献[1-3]不断丰富和扩展摩擦纳米发电机理论模型, 探究了其在机械能、风

能和波浪能收集方面的影响机理; SUN 等<sup>[4]</sup>发明了一种固液界面摩擦-电磁复合发电机, 拓宽了可收获能的幅值与频率; HAN 等<sup>[5]</sup>提出了一种自供电、自感知轴承摩擦纳米发电机(TRBB), 分析了轴承设计参数对 TRBB 灵敏度的影响; LIN 等<sup>[6]</sup>提出了一种摆锤型摩擦纳米发电机, 并验证了其倍频输出、灵敏度高等特点; HE 等<sup>[7]</sup>将 TENG 与风力涡轮机结合

**收稿日期:** 2023-09-18; **修订日期:** 2023-11-02

**基金项目:** 广西科技重大专项资助项目(桂科 AAAA23073019); 国家自然科学基金资助项目(52265004); 直升机传动技术国防科技重点实验室开放基金资助项目(HTL-0-21G07)

提出了超低摩擦阻力风速传感器,拓展了自供电技术在灾害领域的应用前景。

TENG技术的应用与机械传动系统密不可分,因此机械传动系统的非线性动力学表现对TENG的能量采集具有重要影响。莫帅等<sup>[8-9]</sup>综合考虑裂纹、故障、磨损等因素,构建齿轮传动系统非线性动力学模型,探究了齿轮传动系统非线性全局行为的演化与考虑时滞反馈后系统主共振特性;YANG等<sup>[10]</sup>将微电机与TENG集成为摩擦点微电机,探究了不同结构参数下系统的性能;韩勤锴等<sup>[11]</sup>对摆式摩擦纳米发电机非线性机电耦合建模,探究摆式摩擦纳米发电机系统输出性能的影响机理。

已有文献中关于摩擦纳米发电机系统非线性动力学的研究鲜见报道,本文以双向齿条传动摩擦纳米发电机系统为研究对象,综合考虑时变啮合刚度、时变支撑刚度、齿侧间隙与轴承游隙等因素,构建系统非线性动力学模型。根据动力学模型建立振动方程,将无量纲化振动方程通过龙格-库塔法求解,计算获取内外部激励下系统分岔图、三维频谱图、时域图、相图与庞加莱截面,并结合摩擦纳米发电技术,探究外部负载激励频率和啮合刚度对系统机械能采集的影响机理。

## 1 双向齿条传动摩擦纳米发电机系统动力学模型

双向齿条传动摩擦纳米发电机系统结构如图1所示。它由压盘、齿条、齿轮、飞轮和摩擦材料组成。

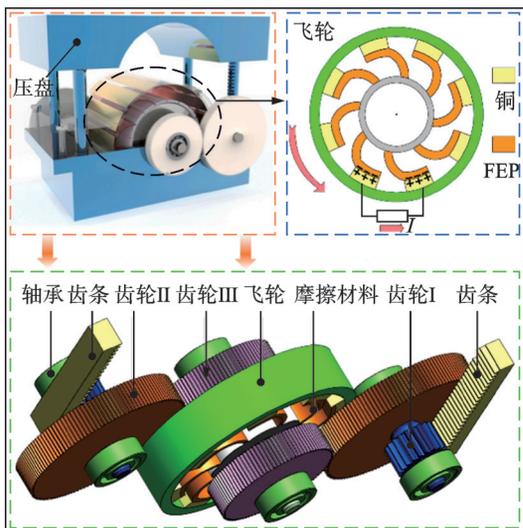


图1 双向齿条传动摩擦纳米发电机系统模型

Fig.1 Modelling of a bidirectional rack and pinion drive friction nanogenerator system

### 1.1 齿条副与齿轮副时变啮合刚度

依据文献[12],基于势能法计算齿轮齿条副时变啮合刚度:

$$k = F^2 / (2U_{a1} + 2U_{b1} + 2U_{f1} + 2U_{s1} + 2U_{a2} + 2U_{b2} + 2U_{f2} + 2U_{s2} + 2U_h) \quad (1)$$

式中, $k$ 为齿轮齿条副时变啮合刚度; $F$ 为啮合力; $U_{a1}$ 、 $U_{b1}$ 、 $U_{f1}$ 和 $U_{s1}$ 分别为齿条的径向压缩势能、弯曲势能、齿基变形势能和赫兹势能; $U_{a2}$ 、 $U_{b2}$ 、 $U_{f2}$ 和 $U_{s2}$ 分别为齿轮的径向压缩势能、弯曲势能、齿基变形势能和剪切势能; $U_h$ 为齿轮赫兹势能。

直齿轮在传动过程中处于单双齿交替啮合状态,啮合刚度存在时变性,可通过标准GB/T 3480.1—2019<sup>[13]</sup>计算:

$$\begin{cases} K(t) = K_c (0.75\epsilon_\alpha + 0.25 + \frac{\cos(\omega_m t + \varphi_0) \sqrt{2 - 2\cos[2\pi(\epsilon_\alpha - 1)]}}{\pi}) \\ K_m = (0.75\epsilon_\alpha + 0.25) K_c \end{cases} \quad (2)$$

式中, $K(t)$ 为直齿轮副时变啮合刚度; $K_m$ 为平均啮合刚度; $\varphi_0$ 为初始相位角; $\omega_m$ 为啮合频率; $\epsilon_\alpha$ 为重合系数; $K_c$ 为单对齿轮的啮合刚度。

### 1.2 时变支撑刚度

轴承力为轴承滚动体与内外圈接触力合力,其分力由Hertz接触理论可得:

$$\begin{cases} F_{bx} = \sum_{i=1}^{Z_b} \cos\gamma'_i \cdot K_b \delta^n H(\delta) \cos\theta_i \\ F_{by} = \sum_{i=1}^{Z_b} \cos\gamma'_i \cdot K_b \delta^n H(\delta) \sin\theta_i \end{cases} \quad (3)$$

式中,指数 $n=2/3$ ; $Z_b$ 为滚动体数; $\theta_i$ 为滚动体转角; $K_b$ 为轴承支撑刚度; $\gamma'_i$ 为接触角; $\delta$ 为滚动体变形量;其中Heaviside函数 $H(\delta)$ 取值为:

$$H(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta \leq 0 \\ 1, & \delta > 0 \end{cases}$$

### 1.3 齿条副与齿轮副时变啮合力

双向齿条传动摩擦纳米发电机系统动力学模型考虑以下18个自由度:

$$\{x_{c0}, y_{c0}, \theta_{c0}, x_{b0}, y_{b0}, x_{b1}, y_{b1}, x_{c1}, y_{c1}, \theta_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, \theta_{c2}, x_{b3}, y_{b3}, x_{c3}, y_{c3}, \theta_{c3}\} \quad (4)$$

式中, $\theta_{c0}$ 、 $\theta_{c1}$ 、 $\theta_{c2}$ 、 $\theta_{c3}$ 分别为齿条、齿轮I、齿轮II和齿轮III的振动角位移; $x_{c0}$ 、 $y_{c0}$ 、 $x_{c1}$ 、 $y_{c1}$ 、 $x_{c2}$ 、 $y_{c2}$ 、 $x_{c3}$ 、 $y_{c3}$ 、 $x_{b0}$ 、 $y_{b0}$ 、 $x_{b1}$ 、 $y_{b1}$ 、 $x_{b2}$ 、 $y_{b2}$ 、 $x_{b3}$ 、 $y_{b3}$ 分别为齿条、齿轮I、齿轮II、齿轮III、轴承I、轴承II和轴承III沿坐标轴 $x$ 、 $y$ 方向的振动位移。

齿轮在加工与安装过程中存在误差,产生误差激励。齿轮在啮合过程中,综合啮合误差 $e(t)$ 可表

示为随啮合频率  $\omega_m$  变化的简谐函数:

$$e(t) = e_a + e_b \sin(\omega_m t + \varphi_0) \quad (5)$$

式中,  $e_a$  为综合误差常量;  $e_b$  为综合误差波动幅值;  $\varphi_0$  为综合误差初始相位角。

齿轮齿条副、直齿轮副啮合力分力  $F_{mx}$ 、 $F_{my}$  可通过啮合线上等效振动位移  $x_n$  与齿侧间隙非线性函数  $f(x_n)$  表示为:

$$\begin{cases} x_{n1} = (r_{c1}\theta_{c1} - r_{c0}\theta_{c0} + y_{c1} - y_{c0})\cos\alpha_n + \\ \quad (x_{c1} - x_{c0})\sin\alpha_n - e_1(t) \\ x_{n2} = (r_{c3}\theta_{c3} - r_{c2}\theta_{c2} + y_{c3} - y_{c2})\cos\alpha_n + \\ \quad (x_{c3} - x_{c2})\sin\alpha_n - e_2(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} F_{mx} = \left[ Kf(x_n) + C_m \frac{dx_n}{dt} \right] \cos\alpha_n \\ F_{my} = \left[ Kf(x_n) + C_m \frac{dx_n}{dt} \right] \sin\alpha_n \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $K$  为时变啮合刚度, 包括齿轮齿条副时变啮合刚度  $k$  和直齿轮副时变啮合刚度  $K(t)$ ;  $x_{n1}$ 、 $x_{n2}$  分别为齿轮齿条副、直齿轮副等效振动位移;  $r_{c0}$ 、 $r_{c1}$ 、 $r_{c2}$  和  $r_{c3}$  分别为齿条、齿轮 I、齿轮 II 和齿轮 III 的分度圆半径;  $\alpha_n$  为压力角;  $e_1(t)$  为齿轮齿条副综合啮合误差;  $e_2(t)$  为直齿轮副综合啮合误差;  $f(x_n)$  为齿侧间隙非线性函数;  $C_m$  为啮合阻尼。

### 1.4 摩擦纳米发电机系统动力学模型

由系统结构可知, 本模型为水平滑动式 TENG。由摩擦发电技术可得摩擦纳米发电机的输出性能:

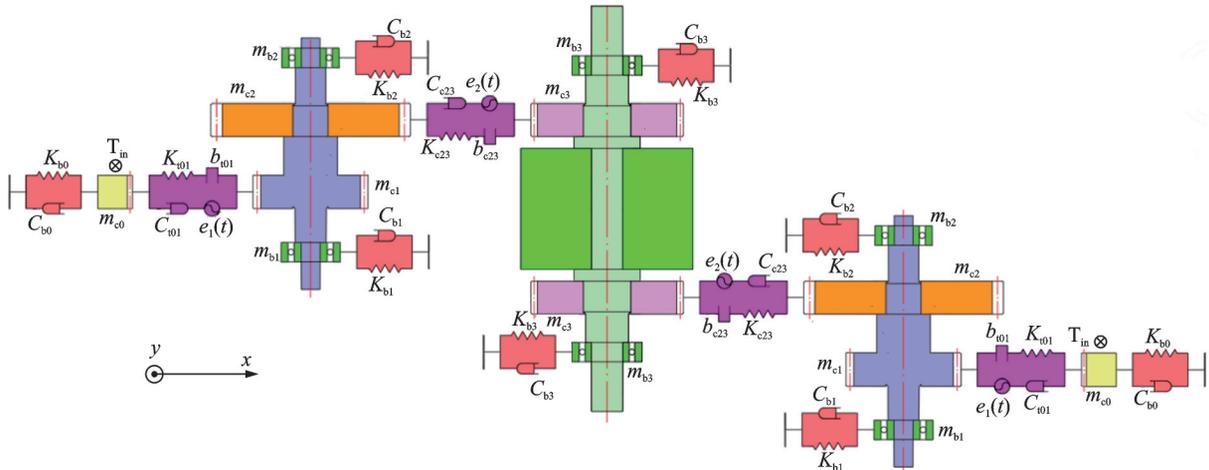


图 2 双向齿条传动摩擦纳米发电机系统动力学模型

Fig. 2 Modelling the dynamics of a bidirectional rack and pinion drive friction nanogenerator system

## 2 双向齿条传动摩擦纳米发电机系统振动微分方程

建立双向齿条传动摩擦纳米发电机系统振动微分方程, 对方程进行无量纲化, 得:

$$x = \frac{l+g}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi vt}{l+g} \right) \quad (8)$$

$$I_{sc} = \frac{\sigma \omega (l - dx)}{dt} \quad (9)$$

$$U_{oc} = \sigma \omega (l - x) / C \quad (10)$$

$$\eta = \frac{\int U_{oc} I_{sc} dt}{E_{in}} \quad (11)$$

式中,  $x$  为摩擦材料间距;  $v$  为飞轮转速;  $I_{sc}$  为短路电流;  $U_{oc}$  为开路电压;  $\eta$  为机械能转化率;  $E_{in}$  为输入的机械能, 其余参数含义及取值如表 1 所示。

表 1 摩擦纳米发电机参数

Tab. 1 Friction nanogenerator parameters

参数	数值
电极宽度 $w/m$	0.1
电极长度 $l/m$	0.05
表面电荷密度 $\sigma/(\mu C \cdot m^{-2})$	20
电极间隙 $g/cm$	1

图 2 为双向齿条传动摩擦纳米发电机系统非线性动力学模型。其中,  $m_{b0} \sim m_{b3}$  为各轴承的集中质量;  $m_{c0} \sim m_{c3}$  为齿条、齿轮 I、齿轮 II 和齿轮 III 的集中质量;  $K_{b0} \sim K_{b3}$  为相应轴的弯曲刚度,  $C_{b0} \sim C_{b3}$  为相应轴的弯曲阻尼;  $K_{i01}$ 、 $C_{i01}$  和  $b_{i01}$  分别为齿轮齿条副的时变啮合刚度、时变啮合阻尼、齿侧间隙的一半;  $T_{in}$  为输入转矩;  $K_{c23}$ 、 $C_{c23}$  和  $b_{c23}$  分别是直齿轮副的时变啮合刚度、时变啮合阻尼、齿侧间隙的一半。

$$\begin{cases} \ddot{x}_{n1} + 2\zeta_{i01}\dot{x}_{n1}\cos\alpha_n + \kappa_{i01}(\tau)f(\bar{x}_{n1})\cos\alpha_n + \\ \quad (x_{c0} - x_{c1})\cos\alpha_n + (z_{c0} - z_{c1})\sin\alpha_n = \\ \quad f_{i01} - f_{e1} \\ \ddot{x}_{n2} + 2\zeta_{c23}\dot{x}_{n2}\cos\alpha_n + \kappa_{c23}(\tau)f(\bar{x}_{n2})\cos\alpha_n + \\ \quad (y_{c2} - y_{c3})\cos\alpha_n + (z_{c2} - z_{c3})\sin\alpha_n = \\ \quad f_{c23} - f_{e2} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{c0} + 2\zeta_{b0}(\dot{\bar{x}}_{c0} - \dot{\bar{x}}_{b0}) + \kappa_{b0}(\bar{x}_{c0} - \bar{x}_{b0}) = -\bar{F}_{mxc01} \\ \ddot{\bar{y}}_{c0} + 2\zeta_{b0}(\dot{\bar{y}}_{c0} - \dot{\bar{y}}_{b0}) + \kappa_{b0}(\bar{y}_{c0} - \bar{y}_{b0}) = \bar{F}_{myc01} - f_{g0} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{b0} + 2\zeta_{b0}(\dot{\bar{x}}_{b0} - \dot{\bar{x}}_{c0}) + \kappa_{b0}(\bar{x}_{b0} - \bar{x}_{c0}) = -\bar{F}_{bx0} \\ \ddot{\bar{y}}_{b0} + 2\zeta_{b0}(\dot{\bar{y}}_{b0} - \dot{\bar{y}}_{c0}) + \kappa_{b0}(\bar{y}_{b0} - \bar{y}_{c0}) = -\bar{F}_{by0} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{b1} + 2\zeta_{b1}(\dot{\bar{x}}_{b1} - \dot{\bar{x}}_{c1}) + \kappa_{b1}(\bar{x}_{b1} - \bar{x}_{c1}) = -\bar{F}_{bx2} \\ \ddot{\bar{y}}_{b1} + 2\zeta_{b1}(\dot{\bar{y}}_{b1} - \dot{\bar{y}}_{c1}) + \kappa_{b1}(\bar{y}_{b1} - \bar{y}_{c1}) = -\bar{F}_{by2} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{c1} + 2\zeta_{b1}(\dot{\bar{x}}_{c1} - \dot{\bar{x}}_{b1}) + \kappa_{b1}(\bar{x}_{c1} - \bar{x}_{b1}) = \bar{F}_{mxc01} \\ \ddot{\bar{y}}_{c1} + 2\zeta_{b1}(\dot{\bar{y}}_{c1} - \dot{\bar{y}}_{b1}) + \kappa_{b1}(\bar{y}_{c1} - \bar{y}_{b1}) = -\bar{F}_{myc01} - f_{g1} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{c2} + 2\zeta_{b2}(\dot{\bar{x}}_{c2} - \dot{\bar{x}}_{b2}) + \kappa_{b2}(\bar{x}_{c2} - \bar{x}_{b2}) = -\bar{F}_{mxc23} \\ \ddot{\bar{y}}_{c2} + 2\zeta_{b2}(\dot{\bar{y}}_{c2} - \dot{\bar{y}}_{b2}) + \kappa_{b2}(\bar{y}_{c2} - \bar{y}_{b2}) = \bar{F}_{myc23} - f_{g2} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{b2} + 2\zeta_{b2}(\dot{\bar{x}}_{b2} - \dot{\bar{x}}_{c2}) + \kappa_{b2}(\bar{x}_{b2} - \bar{x}_{c2}) = -\bar{F}_{bx2} \\ \ddot{\bar{y}}_{b2} + 2\zeta_{b2}(\dot{\bar{y}}_{b2} - \dot{\bar{y}}_{c2}) + \kappa_{b2}(\bar{y}_{b2} - \bar{y}_{c2}) = -\bar{F}_{by2} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{b3} + 2\zeta_{b3}(\dot{\bar{x}}_{b3} - \dot{\bar{x}}_{c3}) + \kappa_{b3}(\bar{x}_{b3} - \bar{x}_{c3}) = -\bar{F}_{bx3} \\ \ddot{\bar{y}}_{b3} + 2\zeta_{b3}(\dot{\bar{y}}_{b3} - \dot{\bar{y}}_{c3}) + \kappa_{b3}(\bar{y}_{b3} - \bar{y}_{c3}) = -\bar{F}_{by3} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_{c3} + 2\zeta_{b3}(\dot{\bar{x}}_{c3} - \dot{\bar{x}}_{b3}) + \kappa_{b3}(\bar{x}_{c3} - \bar{x}_{b3}) = \bar{F}_{mxc23} \\ \ddot{\bar{y}}_{c3} + 2\zeta_{b3}(\dot{\bar{y}}_{c3} - \dot{\bar{y}}_{b3}) + \kappa_{b3}(\bar{y}_{c3} - \bar{y}_{b3}) = -\bar{F}_{myc23} - f_{g3} \end{cases} \quad (20)$$

式中,  $\bar{x}_i = x_i/b_m$ ;  $\bar{y}_i = y_i/b_m$ ;  $\tau = \omega_n t$ ;  $\bar{z}_i = z_i/b_m$ ;  $\omega_n = \sqrt{K_m/m_e}$ ;  $\omega_a = \sqrt{K_a/m_e}$ ; 等效支撑刚度  $\kappa_a = \omega_a^2/\omega_n^2$ ;  $\kappa_d = K(t)/K_m$ ; 等效啮合力  $f_d = F \cos \alpha_n / (m_e b_m \omega_n^2)$ ; 等效支撑阻尼  $\zeta_a = C_d / (2m_e \omega_n)$ ;  $\zeta_d = C_d / (2m_e \omega_n)$ ; 等效质量系数  $f_b = g / (b_m \omega_n)$ ,  $m_e$  为等效质量; 等效综合啮合误差  $f_c = d^2 e(\tau) / (d\tau^2 \cdot b_m)$ ; 等效齿隙非线性函数:  $f(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_n) / b_m = \bar{x}_n - 1$ ,  $\bar{x}_n > 1; 0, -1 \leq \bar{x}_n \leq 1; \bar{x}_n + 1, \bar{x}_n < -1$  ( $i = b0, b1, b2, b3, c01, c23$ ;  $a = b0, b1, b2, b3$ ;  $b = g1, g2, g3$ ;  $c = e1, e2$ ;  $d = t01, c23$ )。

表 2 双向齿条传动摩擦纳米发电机系统齿轮参数

Tab. 2 Gear parameters for bidirectional rack and pinion drive friction nanogenerator systems

齿轮	模数	齿数
I	1	20
II	0.5	100
III	0.5	140

表 3 双向齿条传动摩擦纳米发电机系统参数

Tab. 3 Bidirectional rack and pinion drive friction nano-generator system parameters

系统参数	数值/( $10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	系统参数	数值/( $10^4 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ )
$K_{b0}$	5.83	$C_{b0}$	1.1
$K_{b1}$	6.02	$C_{b1}$	1.3
$K_{b2}$	6.6	$C_{b2}$	1.5
$K_{b3}$	7	$C_{b3}$	1.55

### 3 双向齿条传动摩擦纳米发电机系统动态响应

本部分采用龙格-库塔法求解无量纲化后的系统动力学微分方程。系统无量纲后基准参数:  $\zeta_{t01} = 0.03$ ,  $\zeta_{c23} = 0.12$ , 以时变啮合力图、时频图、相图、FFT 频谱图、庞加莱截面图、分岔图和三维频谱图作为表征方式, 研究外部负载激励频率  $\omega_e$  变化时双向齿条传动摩擦纳米发电机系统的非线性动态特性。

#### 3.1 外部负载激励频率 $\omega_e$ 对系统的影响

以无量纲外载荷激励频率  $\omega_e = \omega_m / \omega_n$  为变量, 采用龙格-库塔法求解系统动力学微分方程, 得到齿条副振动位移  $x_{n1}$  随外载荷激励频率  $\omega_e$  变化的分岔图与三维频谱, 如图 3 所示。

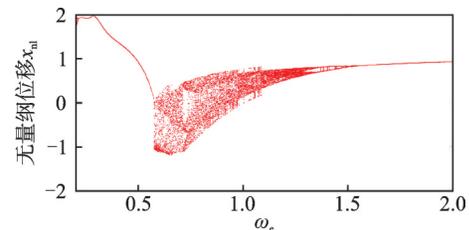
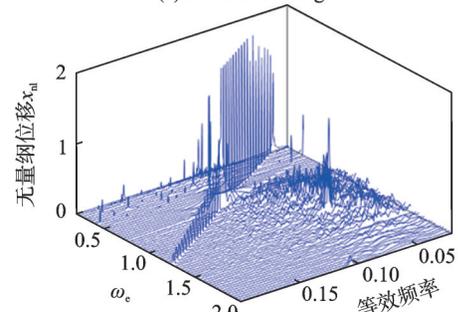
(a) 分岔图  
(a) Bifurcation diagram(b) 三维频谱图  
(b) 3D spectrogram

图 3 齿条副分岔图和三维频谱图

Fig. 3 Bifurcation and 3D spectrogram of rack and pinion pair

如图 3 所示, 当  $0.2 < \omega_e < 0.58$  时, 齿条副动力学特性为单周期运动, 系统处于稳定状态; 当  $0.58 < \omega_e < 1.33$  时, 齿条副动力学特性为混沌运动, 系统处于不稳定状态; 当  $\omega_e > 1.33$  时, 齿条副动力学特性由混沌

运动逐渐退化为多周期运动,系统逐渐趋于稳定;当  $\omega_e > 1.6$  后,齿条副动力学特性为单周期运动,系统处于稳定状态。

为进一步验证外载荷激励频率  $\omega_e$  对系统动态特性的影响,取激励频率  $\omega_e = 0.5, 0.15$  和 1,齿条副动态响应如图 4 所示。

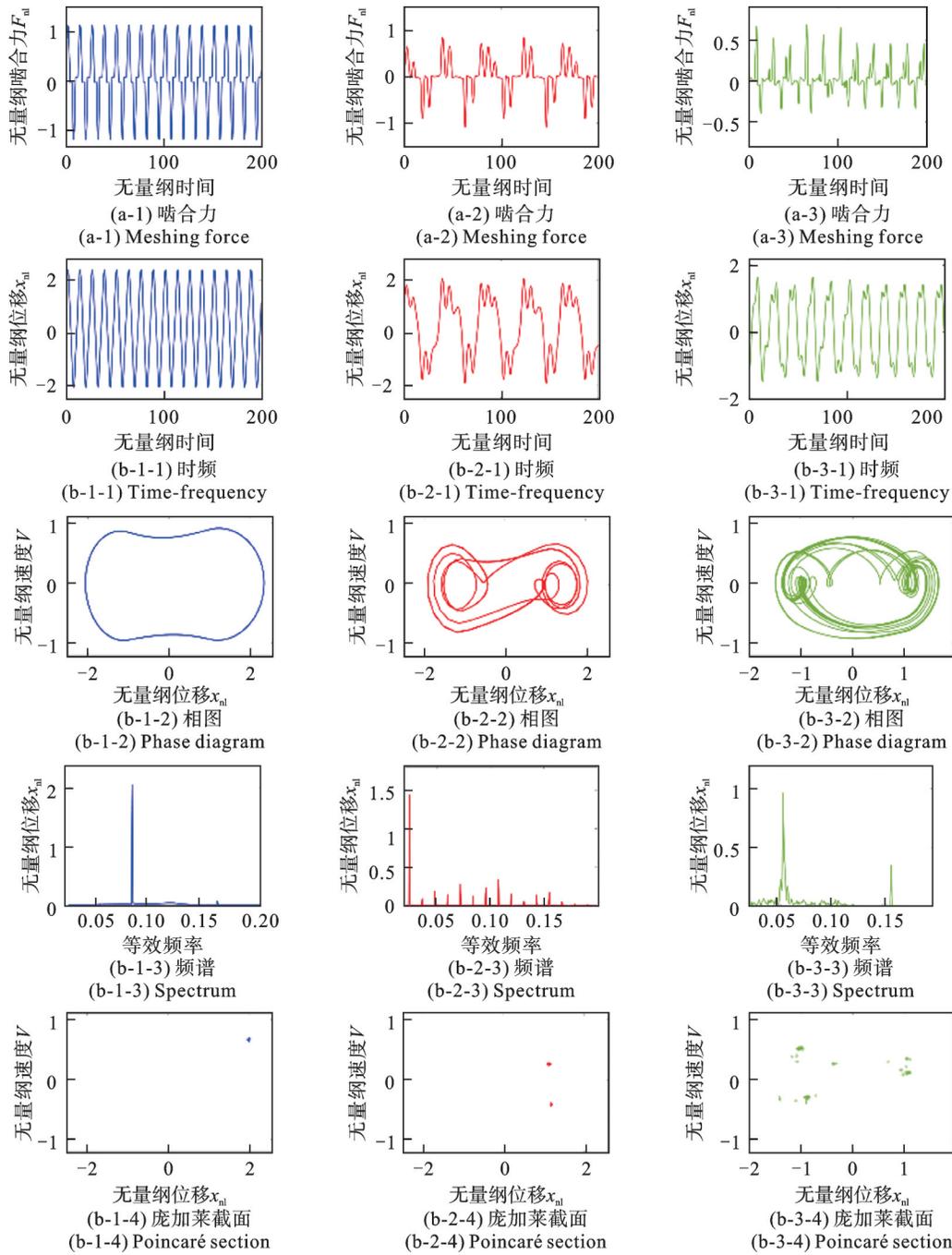


图 4 齿条副三种运动状态下动态响应((b-1) $\omega_e = 0.5$ , (b-2) $\omega_e = 0.15$ , (b-3) $\omega_e = 1$ )

Fig. 4 Dynamic response of the rack sub for three states of motion ((b-1) $\omega_e = 0.5$ , (b-2) $\omega_e = 0.15$ , (b-3) $\omega_e = 1$ )

由图 4 可知,当  $\omega_e = 0.5$  时,齿条副的时变啮合力稳定变化,时频稳定变化,相图为单个封闭圆,频域信号稳定,庞加莱截面图为一个点,齿条副动力学特性为单周期运动,系统处于稳定状态;当  $\omega_e = 0.15$  时,齿条副的时变啮合力规律变化,时频呈现周期变化,相图为多个相互缠绕的封闭圆,频域信号稳定,庞加莱截面图为两点,齿条副动力学特性为准周期运动,系统趋于稳定的运动状态(2 周期);当  $\omega_e = 1$ ,

齿条副的时变啮合力无规律变化,时频也无规律变化,相图中轨迹出现大量偏移,频域信号出现离散现象,相图中轨迹出现大量偏移,频域信号出现离散现象,庞加莱截面图为无规律分布的点集,齿条副动力学特性为混沌运动状态,系统处于不稳定状态。

以无量纲外部载荷激励频率  $\omega_e$  为变量,采用龙格-库塔法求解直齿轮副动力学微分方程,得到直齿轮副振动位移  $x_{n2}$  随外部载荷激励频率  $\omega_e$  的分岔图和三维频谱,如图 5 所示。

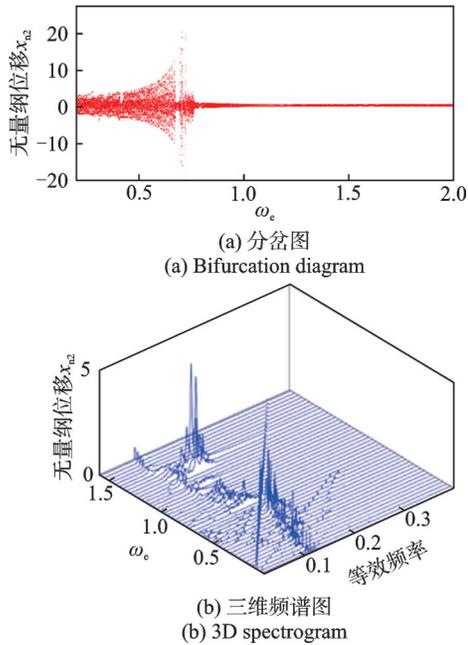


图5 齿轮副分岔图与三维频谱图

Fig. 5 Bifurcation and 3D spectrogram of the gear pair

如图5所示,当 $0.2 < \omega_e < 0.65$ 和 $0.68 < \omega_e < 0.72$ 时,直齿轮副动力学特性为混沌运动,系统处于不稳定状态;当 $0.65 < \omega_e < 0.68$ 时,直齿轮副动力学特性为临界点单周期运动,系统处于稳定状态; $\omega_e > 0.72$ 并继续增大时,直齿轮副动力学特性由混沌运动逐渐退化为多周期运动,系统逐渐趋于稳定。因此,随着无量纲外部载荷激励频率 $\omega_e$ 的增大,系统动力学特性为混沌运动与多周期运动交替出现,并最终趋于稳定状态。

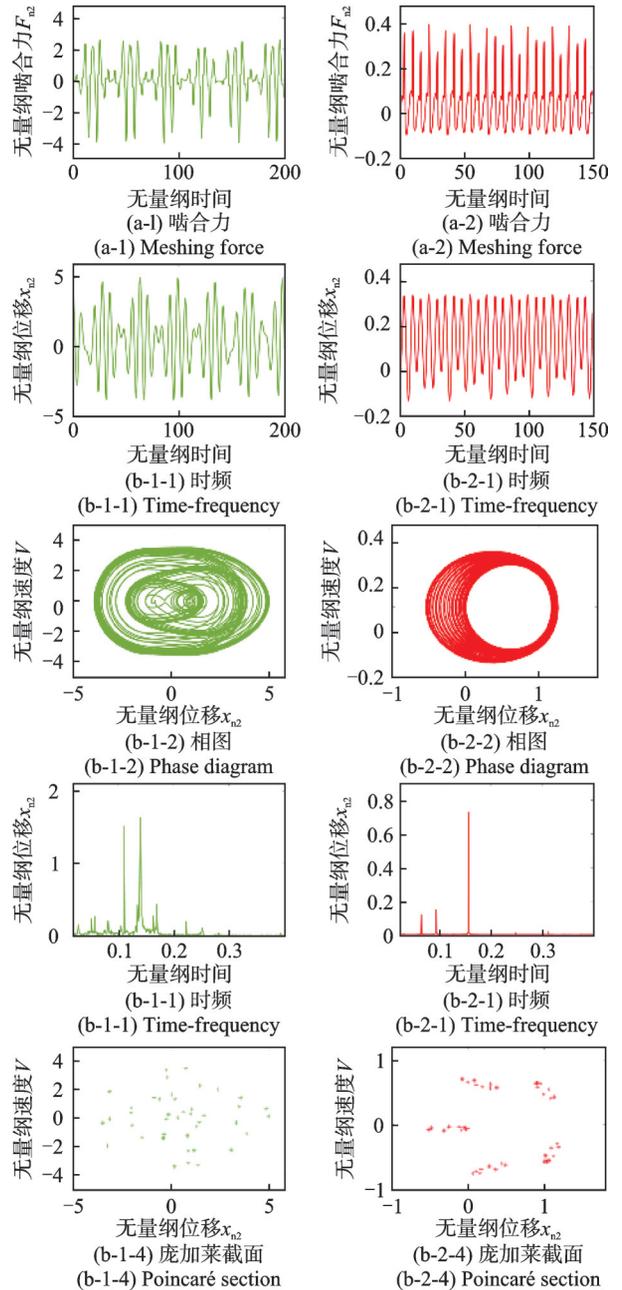
为了进一步验证外部载荷激励频率对系统动态特性的影响,图6为 $\omega_e = 0.5$ 和 $0.7$ 时直齿轮副啮合力两种运动状态下的动态响应。

如图6所示,当 $\omega_e = 0.5$ 时,直齿轮副的动态啮合力无规律变化,时频也无规律变化,相图为多个相互缠绕的不闭合轨迹,频域信号出现离散现象,庞加莱截面图为无规则分布的点集,直齿轮副动力学特性为混沌运动,系统处于不稳定状态;当 $\omega_e = 0.7$ 时,直齿轮副的动态啮合力周期性变化,时频规律变化,相图为多个相互缠绕的封闭圆,频域信号稳定,庞加莱截面图为5个同样大小且周期性分布的点集,直齿轮副动力学特性为多周期运动(5周期),系统处于稳定状态。

### 3.2 外部负载激励频率 $\omega_e$ 与啮合刚度 $K_m$ 对系统输出性能的影响

从摩擦纳米发电技术出发,结合系统的动态特性,研究外部负载激励频率 $\omega_e$ 和啮合刚度 $K_m$ 对系统能量收集的影响机理。

当外部负载激励频率 $\omega_e$ 变化时,根据接触式

图6 齿轮副二种运动状态下动态响应((b-1) $\omega_e = 0.5$ , (b-2) $\omega_e = 0.7$ )Fig. 6 Dynamic response of the gear pair in two states of motion((b-1) $\omega_e = 0.5$ , (b-2) $\omega_e = 0.7$ )

TENG的基本方程(8)~(11)可以推导出输入速率在 $[1, 100]$ 变化时系统在不同激励频率下的输出性能,如图7所示。

如图7所示,系统产生的开路电压的大小并不随激励频率 $\omega_e$ 的增加而变化,但电压的增长率增加;系统产生的短路电流的大小随激励频率 $\omega_e$ 的增加先增加后减少,电流的变化率随 $\omega_e$ 的增加而增加。

当激励频率 $\omega_e = 0.2$ 和其他初始参数不变,啮合刚度 $K_m$ 在 $[5 \times 10^5, 5 \times 10^6]$ 变化时,根据接触式TENG的基本方程(8)~(11),可以得出系统在不同啮合刚度 $K_m$ 下的输出性能,如图8所示。

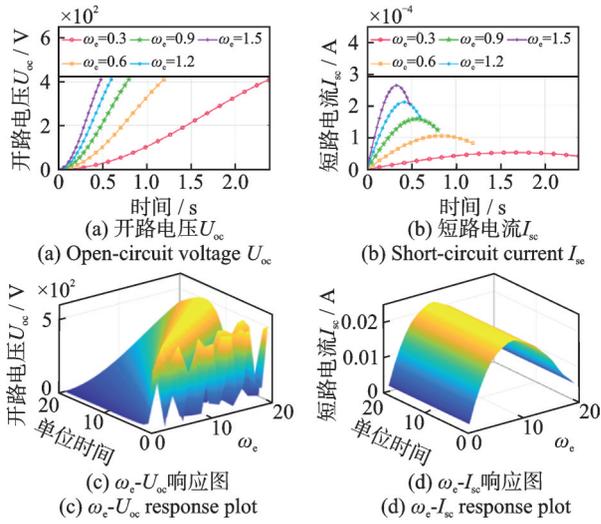


图 7 不同激励频率下 TENG 的输出性能

Fig. 7 Output performance of TENG at different excitation frequencies

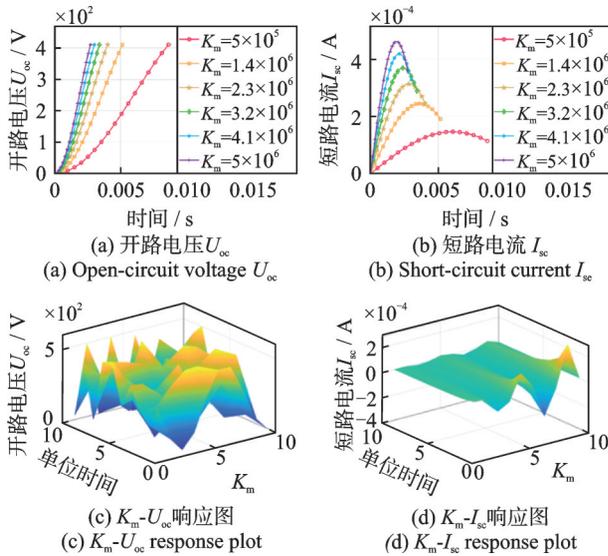


图 8 不同啮合刚度下 TENG 输出性能

Fig. 8 Output performance of TENG at different meshing stiffnesses

如图 8 所示,随着啮合刚度  $K_m$  的增大,系统产生的开路电压大小不变,电压增长率增大,且电压大小不受激励频率范围变化的影响;系统产生的短路电流随着啮合刚度的增大呈现先增后减周期性变化且峰值增大,短路电流变化率随着啮合刚度的增大而增大。

在其他初始参数保持不变的情况下,根据接触式 TENG 的基本方程(8)~(11),可以得出系统在不同激励频率  $\omega_e$  和啮合刚度  $K_m$  下的输出性能,如图 9 所示。

从图 9 可以看出,系统的机械能转换效率  $\eta$  随外部负载激励频率  $\omega_e$  的增加而降低;系统的机械能转换效率  $\eta$  随啮合刚度  $K_m$  的增加而降低。

在其他初始参数保持不变的情况下,系统在激

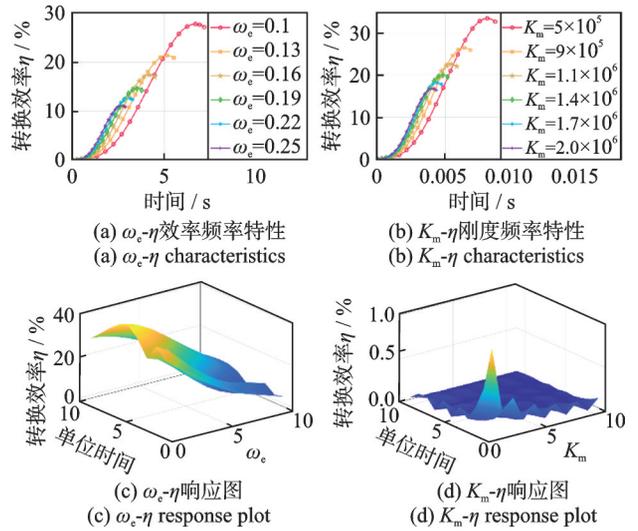


图 9 不同激励频率与啮合刚度下 TENG 机械能转换效率

Fig. 9 Mechanical energy conversion efficiency of the TENG for different excitation frequencies and engagement stiffnesses

振频率激励频率  $\omega_e$  和啮合刚度  $K_m$  耦合下的输出性能可由接触式 TENG 的基本方程(8)~(11)得出,如图 10 所示。

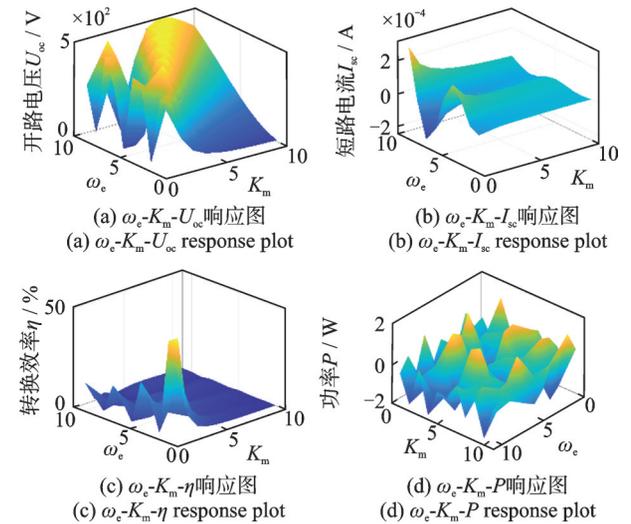


图 10 激励频率与啮合刚度耦合下 TENG 输出性能

Fig. 10 TENG output performance under coupling of excitation frequency and meshing stiffness

如图 10 所示,随外部负载激励频率  $\omega_e$  和啮合刚度  $K_m$  的增大,系统开路电压保持不变,短路电流增大,系统的发电量与功率增加,系统的机械能转换效率  $\eta$  降低,系统的发电量与机械能转换效率  $\eta$  主要受外部负载激励频率  $\omega_e$  影响。

## 4 结 论

本文通过考虑时变啮合刚度、传动误差、齿侧间隙和轴承间隙等因素,建立了双向齿条传动摩擦纳

米发电系统非线性动力学模型,并以分岔图、三维频谱图、时变啮合力图、时域图、相图、频域图和Poincaré图表征系统动态特性。此外,结合摩擦纳米发电技术分析双向齿条传动摩擦纳米发电机输出性能,并通过数值分析方法研究了外部负载激励频率 $\omega_e$ 与啮合刚度 $K_m$ 对系统能量收集的影响,得出以下结论:

(1) 仿真结果表明,双向齿轮传动摩擦纳米发电系统具有丰富的非线性现象,随着外部负载激励频率的变化,系统将经历三种不同的运动状态:周期运动、准周期运动和混沌运动。不合适的激励频率会破坏系统的稳定性,使其进入混沌状态。合适的激励频率会使系统从混沌运动跃迁到周期运动。这为研究激励频率对双向齿轮驱动摩擦纳米发电机能量采集的影响机理提供了理论支持。

(2) 外部负载激励频率 $\omega_e$ 和啮合刚度 $K_m$ 均为系统的能量收集的影响因素,且以外部负载激励频率 $\omega_e$ 为主。系统的功率与发电量随外部负载激励频率 $\omega_e$ 和啮合刚度 $K_m$ 的增加而增加,但系统的机械能转换效率 $\eta$ 反而降低。因此,摩擦纳米发电机在设计时可通过合理控制平均啮合刚度和外部负载输入率来控制机械能转换率,有效提高发电量。

#### 参考文献:

- [1] LU X H, XU Y H, QIAO G D, et al. Triboelectric nanogenerator for entire stroke energy harvesting with bidirectional gear transmission[J]. *Nano Energy*, 2020, 72: 104726.
- [2] LIU S M, LI X, WANG Y Q, et al. Magnetic switch structured triboelectric nanogenerator for continuous and regular harvesting of wind energy[J]. *Nano Energy*, 2021, 83: 105851.
- [3] WANG J Y, PAN L, GUO H Y, et al. Rational structure optimized hybrid nanogenerator for highly efficient water wave energy harvesting[J]. *Advanced Energy Materials*, 2019, 9: 1802892.
- [4] SUN X, SHANG C J, MA H X, et al. A tube-shaped solid-liquid-interfaced triboelectric-electromagnetic hybrid nanogenerator for efficient ocean wave energy harvesting[J]. *Nano Energy*, 2022, 100: 107540.
- [5] HAN Q K, DING Z, QIN Z Y, et al. A triboelectric rolling ball bearing with self-powering and self-sensing capabilities[J]. *Nano Energy*, 2020, 67: 104277.
- [6] LIN Z M, ZHANG B B, GUO H Y, et al. Super-robust and frequency-multiplied triboelectric nanogenerator for efficient harvesting water and wind energy[J]. *Nano Energy*, 2019, 64: 103908.
- [7] HE H C, MU J L, MU J B, et al. Breeze-activated wind speed sensor with ultra-low friction resistance for self-powered gale disaster warning[J]. *Science China Technological Sciences*, 2023, 66: 57-70.
- [8] 莫帅, 张应新, 罗炳睿, 等. 时滞反馈下非正交面齿轮主共振特性的多尺度法研究[J]. *振动工程学报*, 2023, 36(3): 623-633.
- MO S, ZHANG Y X, LUO B R, et al. Multi-scale method analysis on the primary resonance of non-orthogonal face gears with time-delay feedback[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2023, 36(3): 623-633.
- [9] 莫帅, 周长鹏, 王楠, 等. 机器人关节裂纹传动系统机电耦合动态特性研究[J]. *机械工程学报*, 2022, 58(19): 57-67.
- MO S, ZHOU C P, WANG L, et al. Research on dynamic characteristics of electromechanical coupling of robot joint crack transmission system[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(19): 57-67.
- [10] YANG H, PANG Y K, BU T Z, et al. Triboelectric micromotors actuated by ultralow frequency mechanical stimuli[J]. *Nature Communications*, 2019, 10: 2309.
- [11] 韩勤锴, 高帅, 邵卿洋, 等. 摆式摩擦发电机非线性机电耦合建模研究[J]. *力学学报*, 2023, 55(10): 2178-2188.
- HAN Q K, GAO S, SHAO Q Y, et al. Nonlinear electromechanical modeling of pendulum-type triboelectric nanogenerators[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(10): 2178-2188.
- [12] ZHOU C J, DONG X J, WANG H B, et al. Time-varying mesh stiffness model of a modified gear-rack drive with tooth friction and wear[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022, 44(5): 213.
- [13] 国家市场监督管理总局, 国家标准化管理委员会. 直齿轮和斜齿轮承载能力计算 第1部分: 基本原理、概述及通用影响系数: GB/T 3480.1—2019[S]. 北京: 中国标准出版社, 2019.
- State Administration for Market Regulation, Administration Standardization. Calculation of load capacity of spur and helical gears—Part 1: basic principles, introduction and general influence factors: GB/T 3480.1—2019[S]. Beijing: Standards Press of China, 2019.

通信作者: 莫帅(1987—), 男, 博士, 教授。

E-mail: moshuai2010@163.com