

面内平动纳米板振动特性的两类尺度效应分析

王 璟^{1,2}, 于洋蓝^{1,2}, 沈火明³, 王宇星^{3,4}, 戴小军⁵

(1. 西南石油大学机电工程学院, 四川 成都 610500; 2. 西南石油大学油气藏地质及开发工程全国重点实验室, 四川 成都 610500; 3. 西南交通大学力学与航空航天学院, 四川 成都 611756; 4. 西南交通大学机械工程学院, 四川 成都 611756; 5. 西南石油大学土木工程与测绘学院, 四川 成都 610500)

摘要: 基于非局部应变梯度理论研究了具有轴向速度的二维纳米薄板的横向自由振动特性。根据广义哈密顿原理建立系统面内平动的振动控制方程, 以四端简支情况为例, 利用复模态分析法推导了纳米板的固有频率, 通过控制方程的平衡解确定了系统的临界速度, 并进一步对亚临界和超临界速度下前 4 阶模态函数的实部和虚部进行了分析。数值结果表明, 尺度效应在微纳尺度下会导致系统自振频率发生改变, 非局部参数和应变梯度参数分别对纳米板的等效刚度产生“软化”和“硬化”效应, 从而影响了纳米板的固有频率和模态函数, 高阶频率和振型受到尺度参数的影响更为显著。

关键词: 纳米板; 非局部应变梯度理论; 尺度效应; 临界速度

中图分类号: TB383; O326 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)03-0653-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.03.023

Vibration characteristics analysis of two types of size effects on in-plane translational nanoplates

WANG Jing^{1,2}, YU Yanglan^{1,2}, SHEN Huoming³, WANG Yuxing^{3,4}, DAI Xiaojun⁵

(1. School of Mechanical Engineering, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China;
2. State Key Laboratory of Oil and Gas Reservoir Geology and Exploitation, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China; 3. School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China;
4. School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China;
5. School of Civil Engineering and Architecture, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China.)

Abstract: The transverse free vibration characteristics of a two-dimensional nanoplate with axial velocity are investigated based on the nonlocal strain gradient theory. The vibration control equations for the in-plane advection of the system are established according to the generalized Hamilton's principle, and the intrinsic frequency of the nanoplate is derived by using complex modal analysis in the case of a four-ended simple support. The critical velocity of the system is determined by the equilibrium solution of the control equations, and the real and imaginary parts of the first-fourth-order modal functions are further analyzed for both the sub-critical and the supercritical velocities. The numerical results show that the scaling effect leads to a change in the self-oscillation frequency of the system at the micro- and nanoscale, and the nonlocal and strain gradient parameters have 'softening' and 'hardening' effects on the equivalent stiffness of the nanoplates, respectively, which affects the intrinsic frequency and the modal function of the nanoplates. This affects the intrinsic frequency and mode function of the nanoplates, and the higher order frequencies and vibration modes are more significantly affected by the size parameters.

Keywords: nanoplates; nonlocal strain gradient theory; size effect; critical speed

自 1991 年首次发现碳纳米管以来, 纳米力学领域便引起了人们的广泛关注, 众多实验和数值模拟发现, 微观材料变形会呈现出“尺度效应”现象, 因

而, 研究人员对经典连续介质理论的适用性产生质疑。鉴于此, 发展出了一系列修正理论用以描述材料和结构的尺度效应, 如非局部理论、偶应力理论、

收稿日期: 2024-01-27; **修订日期:** 2024-04-08

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(12102373); 四川省自然科学基金青年科学基金资助项目(2022NS-FSC1938, 2023NSFSC1300, 2023NSFSC1296); 中央高校基本科研业务费科技创新项目(2682022CX056); 四川省自然科学基金面上项目(2022NSFSC0412)

应变梯度理论、速度梯度理论和高阶剪切变形理论等。其中,非局部理论和应变梯度理论的应用最为广泛,这两种理论分别使用“硬化”和“软化”的力学参数来描述微观层面的尺度影响。LIM等^[1]将这两类参数结合在一起,提出了非局部应变梯度理论模型,通过探索碳纳米管波传播问题中的色散关系,发现系统中“软化”和“硬化”现象会同时存在。该理论提出以来,学者们将其应用于多种微纳结构的弯曲、屈曲、振动以及波传播等力学行为探索中,该理论下结构的力学行为对于尺寸的依赖程度与单一理论存在一定差异,这也使其成为目前研究的热点之一。

由于二维纳米板结构在纳米医学、芯片、传感器和军工等诸多工程领域都有广泛的应用,分析其力学行为和特性对于相关器件的设计和 optimization 至关重要。PRADHAN等^[2]推导了 Winkler 地基的非局部纳米板的运动方程,讨论了非局部参数、弹性模量和刚度等主要参数对无量纲振动频率的影响。REDDY^[3]使用非线性应变下的非局部微分本构关系,重新阐述了经典和剪切变形梁板理论,给出了广义位移形式的虚功。ZUR等^[4]建立了非局部修正正弦剪切变形磁电耦合功能梯度纳米板模型,并对其动态响应进行分析。GAO等^[5]基于修正偶应力理论结合 Reddy 梁和 Mindlin 板建立了三阶剪切板模型,求解了四端简支板静力弯曲和自由振动的问题。LI等^[6]在文献[5]的研究基础上,利用变分公式建立了一个尺寸相关的功能梯度微板模型,结论指出,修正偶应力模型预测的四端简支微板横向中心挠度、电势、应力和水平方向电位移小于经典正弦板模型的预测值。GHORBANPOUR等^[7]建立具有挠曲电和表面效应的非局部纳米环板,通过一阶剪切变形理论研究了长径比、小尺度参数、厚度等多个参数对动态力学行为的影响。ZHANG等^[8]采用具有对称性的负二阶梯度弹性理论对各向同性非矩形板进行分析,研究了环形、扇形及三角形微板的自由振动特性。MARYNOWSKI^[9]考察了热效应对具有轴向速度的多尺度板的影响,对温度、速度、内部阻尼等参数进行了讨论。MOSTAFA等^[10]进行弹性地基上受迫振动石墨烯板在热力耦合下的几何非线性分析,基于非局部应变梯度理论进行了瞬态行为的参数研究。BABAEI等^[11]建立了无限长功能梯度多孔材料圆柱板模型,利用非局部应变梯度理论和高阶剪切变形理论研究了模型的热响应和力学响应。KARIMI ASL等^[12]研究了黏弹性条件下磁电纳米板的临界荷载。BEDROUD^[13]基于 Mindlin 一阶剪切变形理论建立了非局部中厚圆形和环形功能梯度板模型,进行参数分析及静态屈曲分析。YAN等^[14]考虑表面效应和压电纳米薄板在力电耦合作用下的电弹性响应。YAN等^[15]进一步根据修正的 Kirchhoff

板模型研究了不同面内约束四端简支压电纳米板的表面效应,讨论了压电结构的尺度依赖性。

现有文献大多集中在研究纳米板的单一尺度效应上,大部分使用的是非局部理论或应变梯度理论,在这些理论框架下无法确定系统硬化、软化特性的竞争关系,因此有必要建立一种力学模型以综合考察两类尺度效应的影响。为解决这一问题,LUO等^[16]通过非局部应变梯度理论研究了轴对称功能梯度圆形纳米板在径向荷载下振动特性的尺度相关性,在此基础上,WANG等^[17]采用相同理论进一步讨论了圆形 Mindlin 纳米板面外自由振动的力学行为,但均未考虑到轴向速度的影响。在上述背景下,本文基于非局部应变梯度理论提出一类具有轴向速度的二维纳米薄板模型,通过广义哈密顿原理建立了横向自由振动的控制方程,运用复模态分析法推导了四端简支纳米板的固有频率和临界速度,讨论尺度参数对两者的影响,并进一步对亚临界和超临界速度下纳米板前 4 阶模态函数进行了分析。

1 面内平动非局部应变梯度纳米板模型

具有轴向速度的纳米矩形薄板模型如图 1 所示。板长为 L_a , 宽为 L_b , 厚度为 h , 材料密度为 ρ , 弹性模量为 E , 两端受不随厚度变化的拉力 f_x 和 f_y , 以速度 c 沿 x 方向作匀速运动。

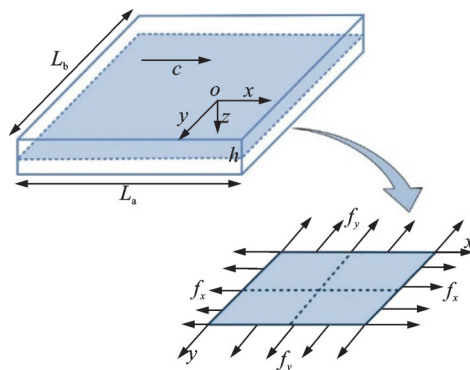


图 1 轴向运动纳米薄板模型

Fig. 1 Axially moving nanoplate model

由位移表达式可以得到纳米薄板存在 x, y, z 三个方向的平面应变:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t) - z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y, t) \right) \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, t) - z \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y, t) \right) \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) - 2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $u(x, y, t)$ 、 $v(x, y, t)$ 、 $w(x, y, t)$ 是薄板中面沿

x, y, z 方向的位移。

由文献[1]提出的非局部应变梯度理论可知,系统的总应力由传统的非局部应力及高阶非局部应力组成,其表达式为:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \nabla \sigma'_{ij} \quad (2)$$

式中, t_{ij} 为总应力; σ_{ij} 为非局部应力项; σ'_{ij} 为高阶非局部应力项; $i=x, y; j=x, y$ 。

通过引入线性非局部算子 $L_i = 1 - (e_i a)^2 \nabla^2$, ($i=0, 1$), 并假设 $e = e_0 = e_1$, 式(2)可简化为:

$$[1 - (ea)^2 \nabla^2] t_{ij} = E(1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{ij} = (1 - l^2 \nabla^2) \sigma_{ij} \quad (3)$$

式中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 表示拉普拉斯算子, e_0 和 e_1 是非局部的材料常数参数; a 是内特征长度参数, ea 合称为非局部参数; l 是材料长度尺度参数。

由式(3)可以得到包含两类尺度参数的非局部本构关系:

$$[1 - (ea)^2 \nabla^2] \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{xy} \end{pmatrix} = (1 - l^2 \nabla^2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{E}{1 - \mu^2} & \frac{\mu E}{1 - \mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1 - \mu^2} & \frac{E}{1 - \mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 + 2\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中, μ 为泊松比。

根据哈密顿原理, 可以计算纳米板振动控制方程:

$$\int_0^t (\delta K - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (5)$$

其中, 势能 U 的变分为:

$$\delta U = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dz dA \quad (6)$$

动能 K 的变分为:

$$\delta K = \frac{\rho h}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, y, t) \delta w(x, y, t) + c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y, t) \delta w(x, y, t) \right] + 2c \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} w(x, y, t) \delta w(x, y, t) \right] \right\} dA \quad (7)$$

外力做功的变分 δW 为:

$$\delta W = \int_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dA \quad (8)$$

式中, A 为薄板中面面积。

将式(6)~(8)代入式(5), 根据分部积分计算得面内平动纳米板的振动方程(详细计算过程见附录A):

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + f_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho h \left(2c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (9)$$

式中, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} 为非局部弯矩, 即:

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)中, 可以得到:

$$D(1 - l^2 \nabla^2) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = [1 - (ea)^2 \nabla^2] \cdot \left[f_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho h \left(2c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] \quad (11)$$

式中, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ 为纳米板弯曲刚度。

引入无量纲量:

$$X = \frac{x}{L_a}, Y = \frac{y}{L_b}, W = \frac{w}{h}, \lambda = \frac{L_a}{L_b}, K_1 = \frac{f_x L_a^2}{D}, K_2 = \frac{f_y L_a^2}{D}, \tau = \frac{ea}{L_a}, \xi = \frac{l}{L_a}, T = th \frac{\sqrt{E/[12(1 - \mu^2)\rho]}}{L_a^2}, \gamma = \sqrt{[12(1 - \mu^2)\rho]/E} \frac{L_a c}{h} \quad (12)$$

则无量纲化的振动控制方程为:

$$\xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial X^6} + \lambda^6 \xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial Y^6} + 3\lambda^2 \xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial X^4 \partial Y^2} + 3\lambda^4 \xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial X^4 \partial Y^2} - [1 + \tau^2 (K_1 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \lambda^2 [-2 - \tau^2 (K_1 + K_2 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} - \lambda^4 (\tau^2 K_2 + 1) \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} + 2\gamma \tau^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^3 \partial T} + \tau^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial T^2} + 2\gamma \tau^2 \lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X \partial Y^2 \partial T} + \lambda^2 \tau^2 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^2 \partial T^2} - (\gamma^2 - K_1) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda^2 K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} - 2\gamma \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T} - \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = 0 \quad (13)$$

2 模型分析与讨论

2.1 系统的固有频率

考虑四端简支的情况, 根据 Navier 法, 取满足四端简支边界条件的试算函数:

$$\bar{W}(X, Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \psi_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi X) \sin(n\pi Y); \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

当 m 和 n 均取 2 的时候,相应的无量纲化挠度函数可记为:

$$\bar{W}(X, Y) = A_{11}\psi_{11} + A_{21}\psi_{21} + A_{12}\psi_{12} + A_{22}\psi_{22} \quad (15)$$

设式(13)解的形式为:

$$W(X, Y, T) = \bar{W}(X, Y)e^{i\omega_{mn}T} \quad (16)$$

式中, ω_{mn} 为纳米板的固有频率,将式(16)代入式(13),可以得到:

$$\begin{aligned} & \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial X^6} + \lambda^6 \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial Y^6} + 3\lambda^2 \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial X^4 \partial Y^2} + \\ & 3\lambda^4 \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial X^2 \partial Y^4} - [1 - \tau^2(K_1 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial X^4} + \\ & \lambda^2 [2 - \tau^2(K_1 + K_2 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial X^2 \partial Y^2} - \\ & \lambda^4 (\tau^2 K_2 + 1) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial Y^4} + 2\gamma\tau^2 \omega_{mn} i \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial X^3} + \\ & \omega_{mn}^2 \tau^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X^2} + 2\gamma\tau^2 \lambda^2 \omega_{mn} i \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial X \partial Y^2} + \\ & \omega_{mn}^2 \lambda^2 \tau^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial Y^2} - (\gamma^2 - K_1) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X^2} - \\ & \lambda^2 K_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial Y^2} - 2\gamma\omega_{mn} i \frac{\partial \bar{W}}{\partial X} + \omega_{mn}^2 \bar{W} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

由伽辽金原理可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial X^6} + \lambda^6 \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial Y^6} + 3\lambda^2 \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial X^4 \partial Y^2} + \right. \\ & 3\lambda^4 \xi^2 \frac{\partial^6 \bar{W}}{\partial X^2 \partial Y^4} - [1 + \tau^2(K_1 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial X^4} + \\ & \lambda^2 [2 - \tau^2(K_1 + K_2 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial X^2 \partial Y^2} - \lambda^4 (\tau^2 K_2 - \\ & 1) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial Y^4} + 2\gamma\tau^2 \omega_{mn} i \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial X^3} + \omega_{mn}^2 \tau^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X^2} + \\ & 2\gamma\tau^2 \lambda^2 \omega_{mn} i \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial X \partial Y^2} + \omega_{mn}^2 \lambda^2 \tau^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial Y^2} - \\ & (\gamma^2 - K_1) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X^2} - \lambda^2 K_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial Y^2} \\ & \left. - 2\gamma\omega_{mn} i \frac{\partial \bar{W}}{\partial X} + \omega_{mn}^2 \bar{W} \right\} \bar{\psi}_{mn} dXdY = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

将式(15)代入式(18),整理后可以得到:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{G} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{A}} = 0 \quad (19)$$

式中, \mathbf{M} 为质量矩阵; \mathbf{G} 为阻尼矩阵; \mathbf{K} 为刚度矩阵, $\bar{\mathbf{A}} = [A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}]^T$ 分别为式(15)中的方程系数。根据式(19)有非零解的充分必要条件,可得系统固有频率的特征方程:

$$|-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{G} + \mathbf{K}| = 0 \quad (20)$$

根据式(20),首先确定截断精度。目前尺度参数的物理意义尚不明确,因此本文对这几个关键物

理性的取值参考了已有文献[18-29],表1给出了不同模型尺度参数的取值范围。

根据表1,文中参数取 $\tau=0.015$, $\xi=0.1$, $K_1=K_2=100$, $\lambda=1$ 。图2展示了前4阶固有频率受截断阶数的影响,其中紫色方块代表4阶截断结果,黄色圆形代表8阶截断结果,蓝色十字代表16阶截断结果。可以看出8阶截断与16阶截断结果趋势较为一致,当考察低阶频率时,4阶截断也能够频率分析中取得合理的精度。因此本文将以4阶截断为基础,分析不同参数对系统动力学行为的影响。

表1 不同模型尺度参数的取值范围

Tab. 1 Range of size parameters of different models

	e_0	$e_0 a$
梁	0~4 ^[18]	
	0~0.386 ^[19]	0.8 ^[24]
	0.82 ^[20]	
	0.546~1.043 ^[21]	0~0.2 ^[25]
	0.54~0.722 ^[22]	
板		1.7~2 ^[26]
	0.6/0.23 ^[23]	0.22~0.67 ^[27]
		0.87/1.41 ^[28]
		0.18 ^[29]

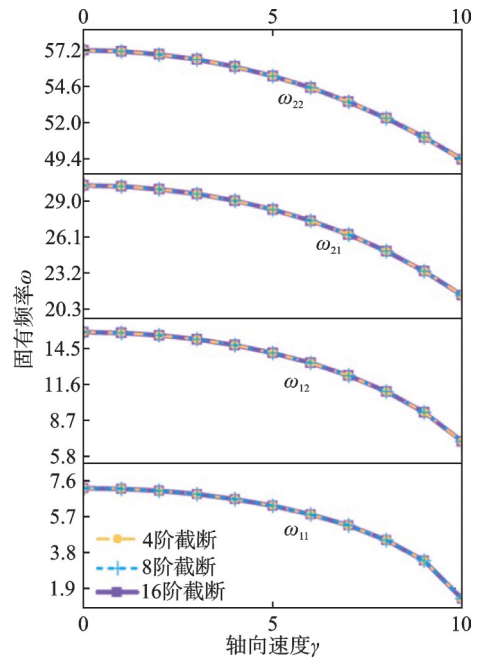


图2 伽辽金截断阶数对前四阶固有频率的影响

Fig. 2 The effect of Galerkin truncation order on the first four order natural frequencies

为了确认模型和方法的可靠性,可以借助退化比较的手段,将当前结果与已有数据进行验证比对。首先当 $\tau=0$, $\xi=0$, 系统被简化为宏观尺度下的运动板模型,文献[30]与本文结果的对比如图3(a)所示,其中圆形是通过本文模型得到的频率,实线是已

有文献中的数据^[30]。进一步,假设 $c=0$, 系统为微观尺度下的静态纳米板, 图 3(b) 给出了本文和已有文献的数据对比, 其中实线是本文得出的数据, 圆点为已有文献的数据^[31]。通过退化比较的结果可以看出, 本文获得的模型与已有文献数据结果较为一致, 表明模型准确性良好。

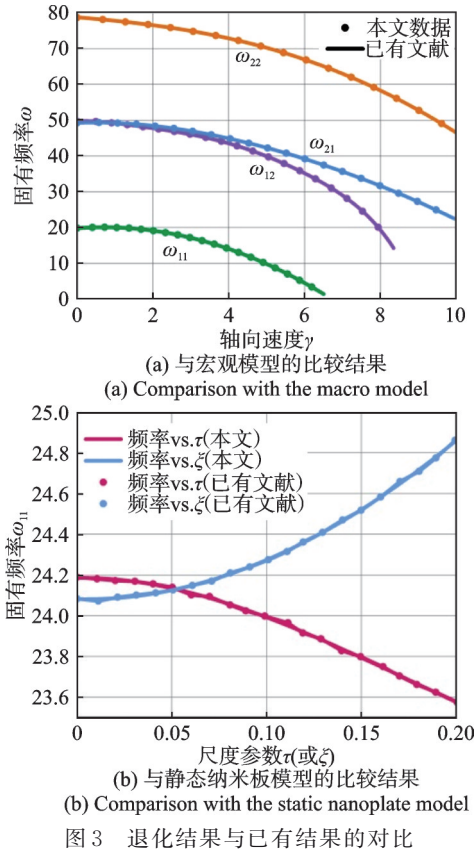


图 3 退化结果与已有结果的对比
Fig. 3 Comparison between degradation results and existing results

为了对比不同理论下对尺度效应的敏感程度, 图 4 展示了经典弹性理论 (CET), 经典非局部理论 (NET)、应变梯度理论 (SGT) 及非局部应变梯度理论 (NSGT) 下, 前 2 阶固有频率随轴向速度的变化情况。首先, 经典弹性理论主要适用于宏观尺度下的系统, 其局限性在于无法准确预测纳米尺度下系统的振动特性, 虽然应变梯度理论和经典非局部理论都考虑了尺度参数对固有频率的影响, 但由于其建模方式的不同导致了相反的结果。应变梯度理论预测的结果在系统等效刚度方面高于经典弹性理论, 而传统非局部理论的结果则低于经典弹性理论, 表明了等效刚度减小。当采用非局部应变梯度理论时, 数值计算的结果介于两者之间, 这表明该理论同时考虑了刚度“软化”和“硬化”效应。此外, 在不同理论框架下, 高阶固有频率对尺度参数的敏感性更高, 进一步验证了尺度效应的存在。综上所述, 不同理论模型对纳米板振动特性的描述存

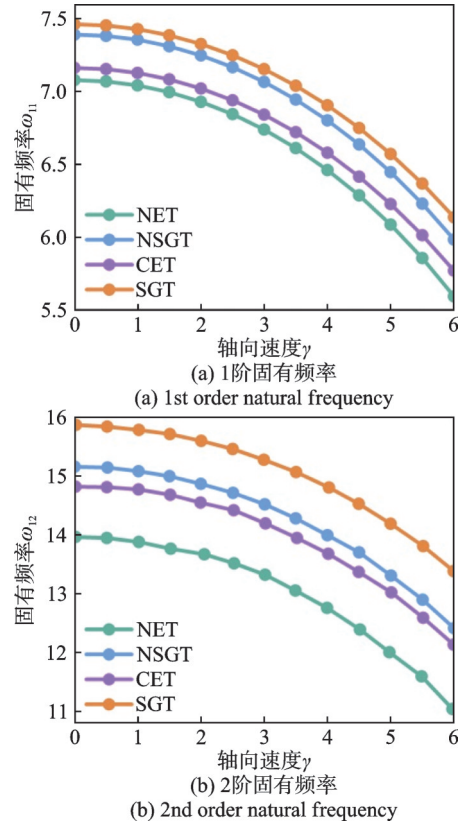


图 4 基于不同理论模型下的前两阶固有频率
Fig. 4 The first two natural frequencies based on different theoretical models

在差异, 而非局部应变梯度理论相较其他理论是一个更为全面的模型, 其中融合了对等效刚度增强和减弱的影晌。

为了进一步验证上述结论, 引入了一个新的关系式:

$$\xi = Z\tau \quad (21)$$

Z 作为一个引入的比例因子, 其功能在于衡量非局部参数与材料长度尺度参数的相对大小, 进而深入探讨这两种尺度参数对系统固有频率的实际影响, 定量评估这两个参数在小尺度结构振动分析中的重要性。

图 5 和 6 给出了不同比例因子下, 两个尺度参数对纳米板前两阶固有频率的影响。当比例因子 $Z=1$ 时, 系统的固有频率数值保持不变, 与宏观情况下的结果相一致, 未受到尺度效应的影响。当非局部参数和材料长度尺度参数的相互影响导致刚度的软化和硬化趋势互相平衡时, 系统的固有频率就不会随尺度参数的变化而发生明显的变化, 这种抵消效应导致在特定条件下, 尺度效应不会显著影响系统的动态特性, 为 PEDDIESON 等^[32] 基于 Eringen 非局部理论的研究中未观察到尺度依赖现象提供了合理的解释。当比例因子 $Z < 1$ 时, 表明非局部参数大于材料长度尺度参数, 系统等效刚度的降低将导

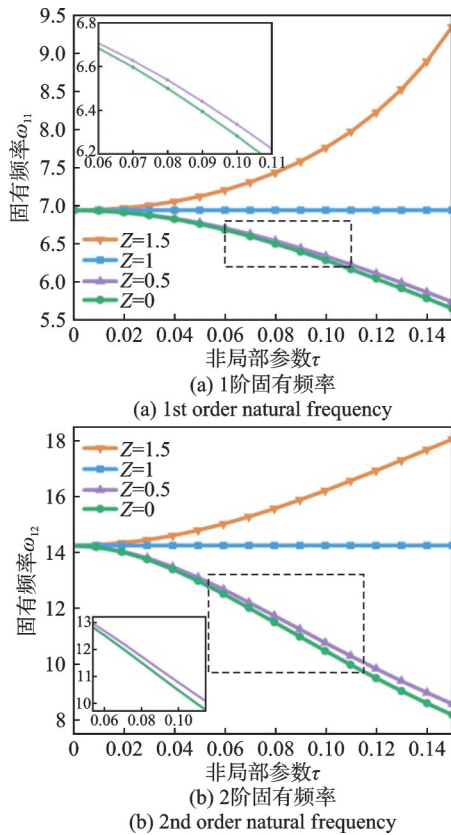


图5 不同比例因子下非局部参数对固有频率的影响
Fig.5 Effect of nonlocal parameters on natural frequency under different scaling factors

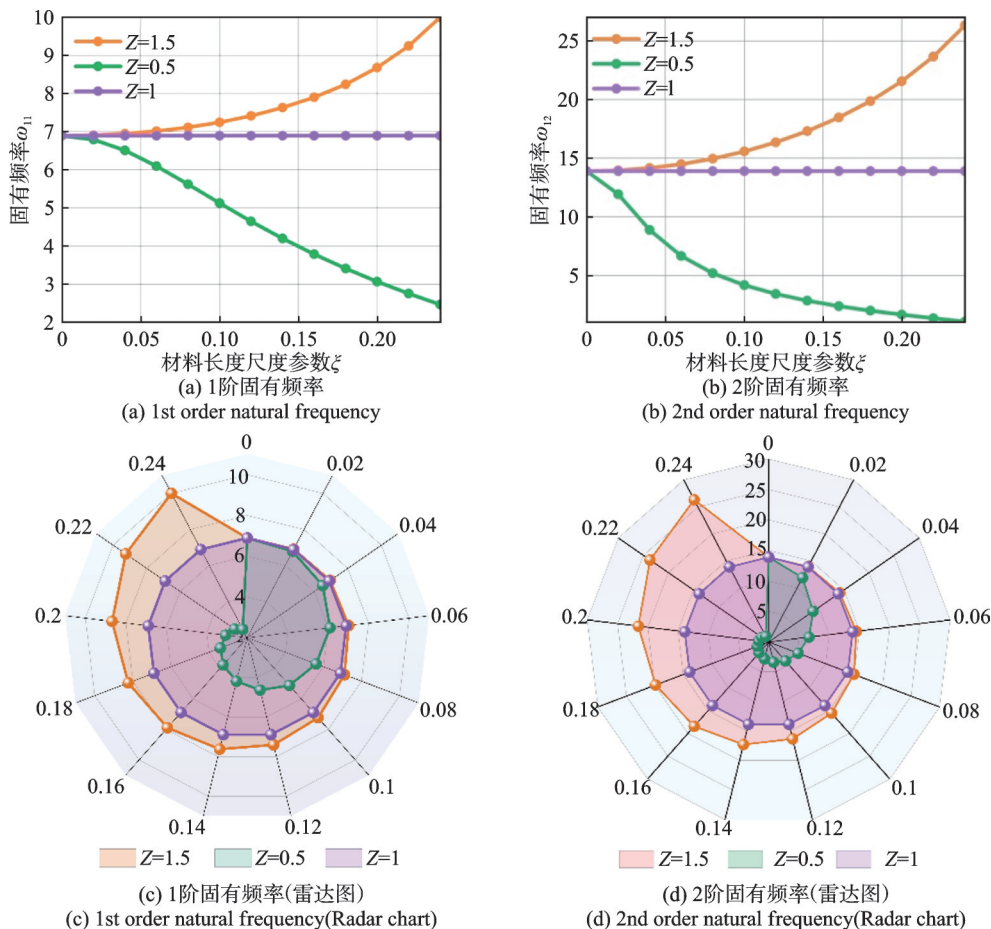


图6 不同比例因子下材料长度尺度参数对固有频率的影响

Fig.6 Effect of material characteristic length parameters on natural frequency under different scaling factors

致固有频率的降低,在该条件下,非局部参数相较于材料长度尺度参数对系统的振动特性具有更显著的影响,系统以“软化”效应为主。相反地,当 $Z > 1$ 时,此时材料长度尺度参数占优,系统“硬化”效果较为显著,固有频率升高。比较非局部参数和材料长度尺度参数的大小,可以确定在小尺度结构中起主导作用的参数:即非局部参数大于材料长度尺度参数,非局部效应对固有频率产生显著影响,反之则材料长度尺度参数占优。随着振动模态阶数的升高,系统的物理行为和响应特性更易受到尺度效应的影响。

图6(c)和(d)以雷达图的形式更加直观地描述出不同比例因子对系统的影响。当比例因子 $Z > 1$ 时,可以观察到橘色线所围成的区域最大,这表明非局部参数发挥主导作用,导致系统刚度的软化,固有频率降低。当比例因子 $Z = 1$ 时,可以看到紫色线所围成的区域不随参数变化而变化,这表示固有频率保持恒定,此时尺度效应消失,不再对系统产生影响。当比例因子 $Z < 1$ 时,绿色线所围成的区域最小,这说明此时材料长度尺度参数起主导作用,导致系统等效刚度增加,固有频率增大。

2.2 系统的模态函数

首先确定临界速度,若式(13)有平衡解,则位移不依赖于时间并满足边界条件,即

$$\begin{aligned} &\xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial X^6} + \lambda^6 \xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial Y^6} + 3\lambda^2 \xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial X^4 \partial Y^2} + \\ &3\lambda^4 \xi^2 \frac{\partial^6 W}{\partial X^2 \partial Y^4} - [1 + \tau^2 (K_1 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \\ &\lambda^2 [2 - \tau^2 (K_1 + K_2 - \gamma^2)] \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} - \\ &\lambda^4 (\tau^2 K_2 + 1) \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} - \\ &(\gamma^2 - K_1) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \lambda^2 K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

采用分离变量的方法可以确定系统的临界速度,表2给出了前8阶临界速度的值,其中参数取 $\tau=0.15, \xi=0.1, K_1=K_2=100, \lambda=1$ 。

表2 系统的前8阶临界速度

Tab. 2 The first 8 order critical speeds of the system			
阶数	临界速度	阶数	临界速度
1	8.735	5	17.469
2	9.983	6	23.293
3	11.647	7	34.939
4	13.976	8	69.879

进一步分别取无量纲速度为 $c=3, c=10$ 。图7和8分别给出了亚临界速度和超临界速度情况下线性派生系统的前4阶模态。可以观察到,尽管线性派生系统的纳米板的边界条件对称,但平动速度的存在破坏了模态函数实部与虚部关于板中点的对称性或反对称性。在处于低速阶段即亚临界速度范围内时,前4阶模态函数呈现出周期性,展现相对规律的特征,类似静止板的模态图形趋势,模态函数的实部具有明显的弯曲样式,位移模式稍显复杂。而在超临界速度下,系统的复模态振型呈现周期性,位移规律更加复杂,实部和虚部之间的差异更加明显。

通过改变非局部参数与材料长度尺度参数的数值比例关系,对比分析亚临界速度与超临界速度条件下,纳米板前4阶模态函数的实部与虚部的特性。如图9和10所示,可以看出,在亚临界速度条件下,模态函数的形状基本保持不变,尺度参数对模态的影响相对较小。随着模态阶数的提高,尺度参数对模态函数影响的显著性逐步增加。对于模态函数的实部,尺度参数引起的幅值变化较为有限,对虚部而言,幅值的变化则较为显著,两者变化趋势在整体上保持一致。

如图11和12所示,在超临界速度下,尺度参数不仅对实部和虚部函数的幅值有着较大的影响,还会显著改变其整体走势。随着临界速度的提升,模

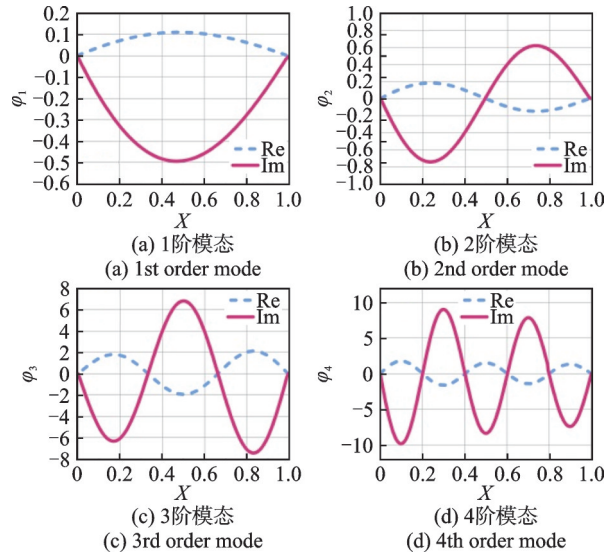


图7 亚临界速度下,前4阶模态函数的实部和虚部
Fig. 7 Real and imaginary parts of the first four-order modal functions at subcritical speed

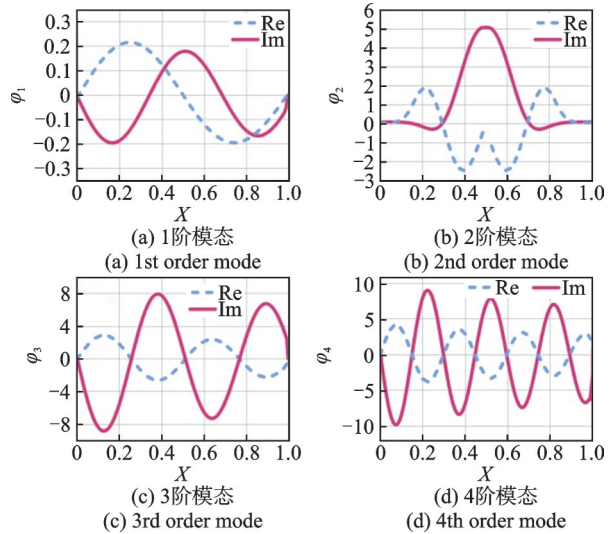


图8 超临界速度下,前4阶模态函数的实部和虚部
Fig. 8 Real and imaginary parts of the first four-order modal functions at supercritical speed

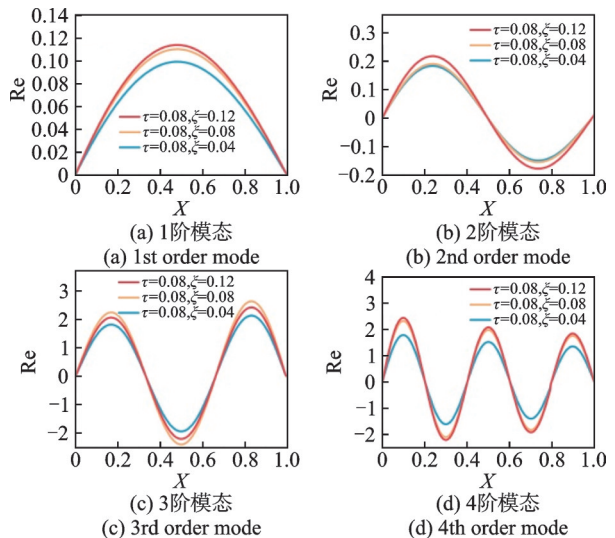


图9 亚临界速度下尺度参数对前4阶模态函数实部的影响
Fig. 9 Effect of size parameters on the real part of the first four-order modal function at subcritical speed

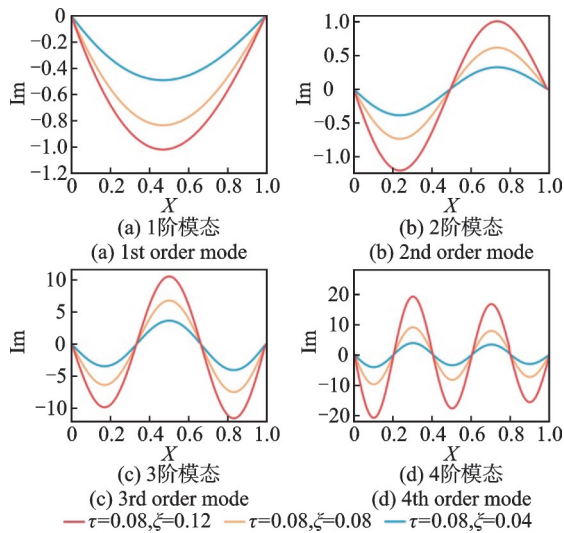


图10 亚临界速度下尺度参数对前4阶模态函数虚部的影响
Fig. 10 Effect of size parameters on the imaginary part of the first four-order modal function at subcritical speed

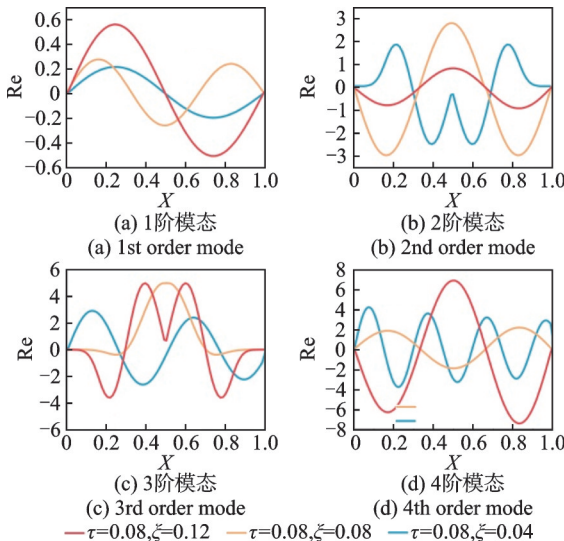


图11 超临界速度下尺度参数对前4阶模态函数实部的影响
Fig. 11 Effect of size parameters on the real part of the first four-order modal function at supercritical speed

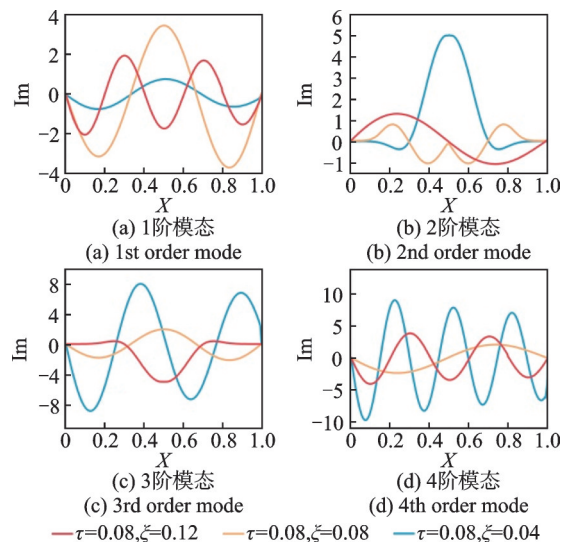


图12 超临界速度下尺度参数对前4阶模态函数虚部的影响
Fig. 12 Effect of size parameters on the imaginary part of the first four-order modal function at supercritical speed

态函数的驻点数量发生改变,导致在超临界速度下,尺度效应对模态振型的影响更为突出。

3 结 论

本文通过非局部应变梯度理论建立了具有轴向速度的纳米薄板运动模型,结合基尔霍夫板理论和哈密顿原理进行横向振动控制方程的推导,对四端简支情况进行了模态分析研究,具体结论如下:

(1) 尺度参数会影响系统的等效刚度导致固有频率发生改变。非局部参数使得系统等效刚度减小,产生软化的效果,固有频率随之减小。材料长度尺度参数导致相反的效果,即等效刚度增加,产生硬化的效果,固有频率增加。系统的高阶频率对尺度参数的敏感依赖性更加明显。值得注意的是,当非局部参数与材料长度尺度参数相等时,系统反映出的刚度软化和硬化效果会相互抵消,这与宏观尺度下的结果保持一致。

(2) 由于轴向运动速度的存在,模态函数的实部和虚部没有统一的对称性,既不关于板的中点对称也不存在反对称。当系统处于低速状态,即亚临界速度范围内,前4阶模态振型具有良好的周期性和规则性。随着速度增大系统进入超临界状态后,系统虽具有周期性,但位移的规律复杂性增加,实部和虚部差异明显。

(3) 在亚临界范围内,尺度效应随着阶数的升高变得更加敏感,但总体走势较为一致。而在超临界范围内,尺度效应会同时影响幅值、驻点和整体趋势的走向,说明尺度效应在超临界范围内更加敏感。

参考文献:

- [1] LIM C W, ZHANG G, REDDY J N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, 78: 298-313.
- [2] PRADHAN S C, PHADIKAR J K. Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 325(1-2): 206-223.
- [3] REDDY J N. Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2010, 48(11): 1507-1518.
- [4] ŽUR K K, AREFIM, KIM J, et al. Free vibration and buckling analyses of magneto-electro-elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher-order sinusoidal shear deformation theory [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2020, 182: 107601.

- [5] GAO X L, HUANG J X, REDDY J N. A non-classical third-order shear deformation plate model based on a modified couple stress theory[J]. *Acta Mechanica*, 2013, 224(11): 2699-2718.
- [6] LI Y S, PAN E. Static bending and free vibration of a functionally graded piezoelectric microplate based on the modified couple-stress theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2015, 97: 40-59.
- [7] GHORBANPOUR ARANI A, SOLTAN ARANI A H, HAGHPARAST E. Flexoelectric and surface effects on vibration frequencies of annular nanoplate[J]. *Indian Journal of Physics*, 2021, 95(10): 2063-2083.
- [8] ZHANG B, LI C, ZHANG L M, et al. Size-dependent free vibration of non-rectangular gradient elastic thick microplates[J]. *Symmetry*, 2022, 14(12): 2592.
- [9] MARYNOWSKI K. Vibration analysis of an axially moving multiscale composite plate subjected to thermal loading[J]. *MATEC Web of Conferences*, 2018, 148: 06003.
- [10] MOSTAFA E, ESMAEIL G M, MEHRAN K, et al. Geometrically nonlinear thermo-mechanical analysis of graphene-reinforced moving polymer nanoplates[J]. *Advances in Nano Research*, 2021, 10(2): 151-163.
- [11] BABAEI H, ESLAMI M R. Nonlinear analysis of thermal-mechanical coupling bending of FGP infinite length cylindrical panels based on PNS and NSGT[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 91: 1061-1080.
- [12] KARIMI ASL M, KARGARFARD K, EBRAHIMI F. Buckling of magneto-electro-hygro-thermal piezoelectric nanoplates system embedded in a visco-Pasternak medium based on nonlocal theory[J]. *Microsystem Technologies*, 2019, 25(3): 1031-1042.
- [13] BEDROUD M, NAZEMNEZHAD R, HOSSEINI-HASHEMI S. Axisymmetric/asymmetric buckling of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity[J]. *Meccanica*, 2015, 50(7): 1791-1806.
- [14] YAN Z, JIANG L Y. Surface effects on the electroelastic responses of a thin piezoelectric plate with nanoscale thickness[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2012, 45(25): 255401.
- [15] YAN Z, JIANG L Y. Vibration and buckling analysis of a piezoelectric nanoplate considering surface effects and in-plane constraints[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, 468(2147): 3458-3475.
- [16] LUO Q, LI C, LI S. Transverse free vibration of axisymmetric functionally graded circular nanoplates with radial loads[J]. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, 2021, 9(6): 1253-1268.
- [17] WANG Xinyue, LI Qiuyang, LI Cheng, et al. On the out-of-plane vibration of rotating circular nanoplates[J]. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2022, 39(1): 23-35.
- [18] DUAN W H, WANG C M, ZHANG Y Y. Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics[J]. *Journal of Applied Physics*, 2007, 101(2): 024305.
- [19] AYDOGDU M. Longitudinal wave propagation in nanorods using a general nonlocal unimodal rod theory and calibration of nonlocal parameter with lattice dynamics[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2012, 56: 17-28.
- [20] ZHANG Y Q, LIU G R, XIE X Y. Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity[J]. *Physical Review B*, 2005, 71(19): 195404.
- [21] ZHANG Y Y, TAN V B C, WANG C M. Effect of chirality on buckling behavior of single-walled carbon nanotubes[J]. *Journal of Applied Physics*, 2006, 100(7): 074304.
- [22] ANSARI R, SAHMANI S, ROUHI H. Rayleigh-Ritz axial buckling analysis of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions[J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(9): 1255-1263.
- [23] HU Y G, LIEW K M, WANG Q, et al. Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, 56(12): 3475-3485.
- [24] LI L, HU Y J, LING L. Wave propagation in viscoelastic single-walled carbon nanotubes with surface effect under magnetic field based on nonlocal strain gradient theory[J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2016, 75: 118-124.
- [25] KRISHNAN A, DUJARDIN E, EBBESEN T W, et al. Young's modulus of single-walled nanotubes[J]. *Physical Review B*, 1998, 58(20): 14013-14019.
- [26] ARASH B, ANSARI R. Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain[J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2010, 42(8): 2058-2064.
- [27] SHEN L, SHEN H S, ZHANG C L. Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments[J]. *Computational Materials Science*, 2010, 48(3): 680-685.
- [28] ANSARI R, SAHMANI S, ARASH B. Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets[J]. *Physics Letters A*, 2010, 375(1): 53-62.
- [29] ARASH B, WANG Q, LIEW K M. Wave propagation in graphene sheets with nonlocal elastic theory via finite element formulation[J]. *Computer Methods in Ap-*

- plied Mechanics and Engineering, 2012, 223-224: 1-9.
- [30] TANG Y Q, ZHANG D B, GAO J M. Vibration characteristic analysis and numerical confirmation of an axially moving plate with viscous damping[J]. Journal of Vibration and Control, 2017, 23(5): 731-743.
- [31] RAJABI K, HOSSEINI-HASHEMI S. Size-dependent free vibration analysis of first-order shear-deformable orthotropic nanoplates via the nonlocal strain gradient theory[J]. Materials Research Express, 2017, 4(7): 075054.
- [32] PEDDIESON J, BUCHANAN G R, MCNITT R P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology[J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41(3-5): 305-312.

第一作者: 王 璟(1987—),男,博士,副教授。

E-mail: wangjing@swpu.edu.cn

通信作者: 沈火明(1968—),男,博士,教授。

E-mail: hmshen123@126.com

附录 A

应变能:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy}) dz dA = \\ & \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial w_{xx}} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{xy} \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial w_{xy}} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial w_{yy}} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) dz dA = \\ & \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\frac{\partial^2}{\partial x^2} (-z \sigma_{xx}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (-2z \sigma_{xy}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (-z \sigma_{yy})] \delta w dz dA = \\ & - \int_A \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta w dA \end{aligned} \quad (A1)$$

动能:

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_A \rho h (\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x}) \delta (\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x}) dA = \\ & \int_A \rho h (\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x}) (\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}) \delta w dA = \\ & \int_A \rho h (\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \delta w dA \end{aligned} \quad (A2)$$

其中:

$$\delta \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta w, \quad \delta c \frac{\partial w}{\partial x} = c \frac{\partial}{\partial x} \delta w$$

外力功:

$$\delta W = \int_A f_x (\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x}) + f_y (\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y}) + f_{xy} \delta (\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}) dA = \int_A (f_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) \delta w dA \quad (A3)$$

将式(A1)~(A3)代入变分方程(5),可得:

$$\int_0^t \int_A \rho h (\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) - (\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}) + (f_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) \delta w dA dt = 0 \quad (A4)$$

整理后可得式(9)。